Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Варшавский, Д. А. Каждан, Лемма Йонеды для полных пространств Сигала, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 3–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:12:18

Лемма Йонеды для полных пространств Сигала*

© 2014. Я. ВАРШАВСКИЙ, Д. КАЖДАН

Памяти И. М. Гельфанда

В заметке дана формулировка и замкнутое доказательство леммы Йонеды для ∞ -категорий на языке полных пространств Сигала.

Введение

В последние годы ∞ -категории, или, более формально, $(\infty, 1)$ -категории, возникают в различных областях математики. Например, они стали неотъемлемым ингредиентом геометрической проблемы Ленглендса. В книгах [4], [5] Лурье разработал теорию ∞ -категорий на языке квазикатегорий и распространил на этот случай многие результаты обычной теории категорий.

Резк [6] ввел другую модель ∞ -категорий, которую он назвал полными пространствами Сигала. Эта модель имеет определенные преимущества. Например, ее можно обобщить на (∞, n) -категории (см. [7]).

Естественно было бы распространить результаты обычной теории категорий на случай полных пространств Сигала. В настоящей статье это сделано для леммы Йонеды.

Чтобы сформулировать ее, нам нужно построить удобную модель « ∞ -категории пространств», которая была бы ∞ -аналогом категории множеств. Под влиянием результатов Лурье мы определяем эту ∞ -катеорию как симплициальное пространство, «классифицирующее левые расслоения». После того как это сделано, построение вложения Йонеды и доказательство леммы Йонеды проводятся почти таким же образом, как и в случае обычных категорий.

В последующих статьях [2], [3] мы изучаем сопряженные функторы, пределы и копределы. Мы докажем более сильную версию леммы Йонеды и обобщим результаты данной работы на (∞, n) -категории.

Мы благодарны Эммануэлю Фарджуну, Владимиру Хиничу и Нику Розенблюму за воодушевляющие беседы и ценные замечания.

Эта работа устроена следующим образом. Чтобы сделать изложение замкнутым, в §1 мы приводим основные определения и обсуждаем свойства модельных категорий, симплициальных множеств, симплициальных пространств и пространств Сигала, предполагая известными лишь основы теории категорий. В §2 мы вводим левые расслоения, строим ∞ -катеорию пространств $\mathfrak{S}$ и приводим формулировку и доказательство леммы Йонеды. В §3 изучаются квазирасслоения симплициальных пространств, которые необходимы для наших рассуждений, а также сами по себе являются весьма интересными объектами. Последний

*Исследования Я. В. частично поддержаны грантом ISF № 1017/13, исследования Д. К. частично поддержаны грантом ERC № 247049-GLC.

параграф посвящен доказательству свойств ∞ -категории $\mathfrak{S}$, сформулированных во втором параграфе.

§1. Предварительные сведения

1.1. Модельные категории.

1.1.1. Обозначения. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. (а) Для объекта $Z \in \mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{C}/Z$ надкатегорию над Z , т. е. категорию морфизмов $X \rightarrow Z$ в $\mathcal{C}$.

(б) Для пары морфизмов $i: A \rightarrow B$ и $p: X \rightarrow Y$ в $\mathcal{C}$ обозначим через $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, p)$ множество коммутативных диаграмм в $\mathcal{C}$ вида

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array} \quad (1.1)$$

Будем говорить, что i — *ретракт* морфизма p , если существуют $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, p)$ и $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(p, i)$, такие, что $\beta \circ \alpha = \text{Id}_i$.

(с) Будем говорить, что p обладает свойством *правой поднимаемости* или, короче, *поднимаем справа* относительно i (и что i обладает свойством *левой поднимаемости* или, короче, *поднимаем слева* относительно p), если для любой коммутативной диаграммы (1.1) существует морфизм $c: B \rightarrow X$, такой, что $p \circ c = b$ и $c \circ i = a$.

Очевидно, это происходит тогда и только тогда, когда естественное отображение множеств

$$(i^*, p_*): \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(A, X) \times_{\text{Hom}(A, Y)} \text{Hom}(B, Y)$$

сюръективно.

(д) Предположим, что в $\mathcal{C}$ существуют расслоенные произведения. Тогда для морфизма $f: X \rightarrow Y$ в $\mathcal{C}/Z$ и морфизма $g: Z' \rightarrow Z$ в $\mathcal{C}$ будем писать $g^*(f): g^*(X) \rightarrow g^*(Y)$ вместо $f \times_Z Z': X \times_Z Z' \rightarrow Y \times_Z Z'$ и назовем этот морфизм *пулбэком морфизма f* .

(е) Будем говорить, что категория $\mathcal{C}$ *декартова*, если в ней существуют конечные произведения и для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ существует элемент $X^Y \in \mathcal{C}$, представляющий функтор $Z \mapsto \text{Hom}(Z \times Y, X)$; этот элемент называется *внутренним hom* элементов X и Y .

1.1.2. Пример. Пусть $\mathcal{C}$ — категория функторов, $\mathcal{C} = \text{Fun}(\Gamma^{\text{op}}, \text{Set})$, где Γ — малая категория, а Set — категория множеств.

(а) Так как в категории Set существуют все пределы и копределы, то это же верно и для категории $\mathcal{C}$. Явным образом, функтор $\alpha: I \rightarrow \mathcal{C}$ для каждого $\gamma \in \Gamma$ определяет функтор $\alpha(\gamma): I \rightarrow \text{Set}$, такой, что $(\lim_I \alpha)(\gamma) = \lim_I (\alpha(\gamma))$ и аналогичное соотношение выполнено для копределов. В частности, в категории $\mathcal{C}$ существуют произведения.

(б) Для любого $\gamma \in \Gamma$ обозначим через $F_\gamma \in \mathcal{C}$ представимый функтор $\text{Hom}_\Gamma(\cdot, \gamma)$. Тогда для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ существует внутренний hom $X^Y \in \mathcal{C}$, определенный правилом $X^Y(\gamma) = \text{Hom}(Y \times F_\gamma, X)$ с очевидными отображениями перехода. Другими словами, категория $\mathcal{C}$ декартова.

Следующая лемма непосредственно вытекает из определений.

1.1.3. Лемма. Пусть $\mathcal{C}$ — декартова категория, и пусть $i: A \rightarrow B, j: A' \rightarrow B'$ и $p: X \rightarrow Y$ — морфизмы в $\mathcal{C}$. Тогда j поднимаем слева относительно $(i^*, p_*): X^B \rightarrow X^A \times_{Y^A} Y^B$ в том и только в том случае, когда морфизм $(i_*, j_*): (A \times B') \sqcup_{(A \times A')} (B \times A') \rightarrow B \times B'$ поднимаем слева относительно p .

1.1.4. Определение (ср. [1, гл. II, §1]). Модельная категория — это категория $\mathcal{C}$, оснащенная тремя наборами морфизмов, называемых корасслоениями, расслоениями и слабыми эквивалентностями соответственно, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

СМ1. В категории $\mathcal{C}$ существуют все конечные пределы и копределы.

СМ2 (свойство «2 из 3»). Если в диаграмме $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ какие-либо два из морфизмов f, g и $g \circ f$ являются слабыми эквивалентностями, то третий морфизм также является слабой эквивалентностью.

СМ3 (ретракт). Если морфизм f является ретрактом морфизма g , а g — слабая эквивалентность, расслоение или корасслоение, то f также обладает соответствующим свойством.

СМ4 (свойство поднимаемости). Пусть i — корасслоение, а p — расслоение. Тогда p поднимаемо справа относительно i при условии, что либо i , либо p — слабая эквивалентность.

СМ5 (свойство разложимости). Любой морфизм f имеет разложения вида

(a) $f = p \circ i$, где p — расслоение, а i — корасслоение и слабая эквивалентность;

(b) $f = q \circ j$, где q — расслоение и слабая эквивалентность, а j — корасслоение.

1.1.5. Обозначения. (a) Морфизм в модельной категории $\mathcal{C}$ называется *тривиальным корасслоением* (соответственно *тривиальным расслоением*), если он является корасслоением (соответственно расслоением) и слабой эквивалентностью.

(b) Говорят, что элемент $X \in \mathcal{C}$ *фибрантен* (соответственно *кофибрантен*), если каноническое отображение $X \rightarrow \text{pt}$ (соответственно $\emptyset \rightarrow X$), где pt (соответственно $\emptyset$) — конечный (соответственно начальный) объект категории $\mathcal{C}$, является расслоением (соответственно корасслоением).

(c) Согласно аксиоме СМ5, каждый морфизм $f: X \rightarrow Y$ можно записать в виде композиции $X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p} Y$, где i — тривиальное корасслоение, а p — расслоение. В этом случае говорят, что p — *фибрантная замена* морфизма f . В частности, если $Y = \text{pt}$, то говорят, что X' — *фибрантная замена* объекта X .

Следующий фундаментальный факт содержится, например, в [1, гл. II, лемма 1.1].

1.1.6. Лемма. (a) *Отображение $f: X \rightarrow Y$ в модельной категории $\mathcal{C}$ является корасслоением (соответственно тривиальным корасслоением) тогда и только тогда, когда оно поднимаемо слева относительно всех тривиальных расслоений (соответственно расслоений).*

(b) *Отображение $f: X \rightarrow Y$ в модельной категории $\mathcal{C}$ является расслоением (соответственно тривиальным расслоением) тогда и только тогда, когда оно поднимаемо справа относительно всех тривиальных корасслоений (соответственно корасслоений).*

1.1.7. Замечания. (a) Из леммы 1.1.6 вытекает, в частности, что класс (тривиальных) корасслоений и класс (тривиальных) расслоений замкнуты относительно композиций и что все изоморфизмы являются тривиальными корасслоениями и тривиальными расслоениями.

(b) Из леммы 1.1.6 также сразу следует, что (тривиальные) расслоения сохраняются при всех пулбэках, а (тривиальные) корасслоения сохраняются при всех пушаутах.

(c) Из аксиом CM5(a) и CM2 следует, что всякая слабая эквивалентность f имеет разложение вида $f = p \circ i$, где p — тривиальное расслоение, а i — тривиальное корасслоение.

1.1.8. Определение. Будем говорить, что модельная категория $\mathcal{C}$ *декартова*, если она декартова как категория (см. 1.1.1(e)), ее конечный объект кофибрантен и для каждого корасслоения $i: A \rightarrow B$ и расслоения $p: X \rightarrow Y$ индуцированное отображение $q: X^B \rightarrow X^A \times_{Y^A} Y^B$ является расслоением и, кроме того, слабой эквивалентностью при условии, что слабой эквивалентностью является i либо p .

1.1.9. Замечание. Взяв $A = \emptyset$ или $Y = \text{pt}$ в определении декартовой модельной категории, мы получаем следующие частные случаи:

(a) Если B кофибрантно, то для любого (тривиального) расслоения $X \rightarrow Y$ индуцированное отображение $X^B \rightarrow Y^B$ — (тривиальное) расслоение.

(b) Если X фибрантно, то для любого (тривиального) корасслоения $A \rightarrow B$ индуцированное отображение $X^B \rightarrow X^A$ — (тривиальное) расслоение.

1.1.10. Лемма. Пусть $\mathcal{C}$ — модельная категория, являющаяся декартовой как категория и такая, что ее конечный объект кофибрантен. Тогда $\mathcal{C}$ является декартовой модельной категорией в том и только в том случае, когда для любых двух корасслоений $i: A \rightarrow B$ и $i': A' \rightarrow B'$ индуцированный морфизм $j: (A \times B') \sqcup_{(A \times A')} (B \times A') \rightarrow B \times B'$ является корасслоением и, кроме того, слабой эквивалентностью при условии, что слабой эквивалентностью является либо i , либо i' .

Доказательство следует из комбинации лемм 1.1.6 и 1.1.3. □

1.1.11. Определение. Модельная категория $\mathcal{C}$ называется

(a) *правильной справа*, если слабые эквивалентности сохраняются при пулбэках вдоль расслоений;

(b) *правильной слева*, если слабые эквивалентности сохраняются при пушаутах вдоль корасслоений;

(c) *правильной*, если она правильна и слева, и справа.

1.2. Симплициальные множества.

1.2.1. Категория Δ . (a) Для $n \geq 0$ обозначим через $[n]$ категорию, соответствующую частично упорядоченному множеству $\{0 < 1 < \dots < n\}$. Пусть Δ — полная подкатегория малой категории Cat , состоящая из объектов $[n]$, $n \geq 0$.

(b) Для каждого упорядоченного набора из $m + 1$ целых чисел $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m \leq n$ определим отображение $\delta^{k_0, \dots, k_m}: [m] \rightarrow [n]$, такое, что $\delta^{k_0, \dots, k_m}(i) = k_i$ для всех i .

(c) Для $0 \leq i \leq n$ определим включение $d^i: [n-1] \hookrightarrow [n]$, такое, что $i \notin \text{Im } d^i$; для $0 \leq i < j \leq n$ определим включение $d^{i,j}: [n-2] \hookrightarrow [n]$, такое, что $i, j \notin \text{Im } d^{i,j}$; для $0 \leq i \leq n-m$ определим включение $e^i: [m] \rightarrow [n]$ формулой $e^i(k) := k + i$.

1.2.2. Пространства. (a) Под категорией *пространств*, или, что то же самое, категорией *симплициальных множеств*, мы понимаем категорию функторов $Sp := \text{Fun}(\Delta^{op}, \text{Set})$.

(b) Для $X \in Sp$ положим $X_n := X([n])$. Для любого морфизма $\tau: [n] \rightarrow [m]$ в Δ обозначим через $\tau^*: X_m \rightarrow X_n$ индуцированное отображение множеств. Для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ в Sp обозначим через f_n соответствующее отображение $X_n \rightarrow Y_n$.

(c) Согласно 1.1.2, категория Sp декартова и в ней существуют все пределы и копределы.

1.2.3. Стандартный n -симплекс. (a) Для каждого $n \geq 0$ обозначим через $\Delta[n] \in Sp$ функтор $\text{Hom}_\Delta(\cdot, [n]): \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$. Тогда $\text{pt} := \Delta[0]$ — конечный объект категории Sp .

(b) Лемма Йонеды определяет отождествления $\text{Hom}_{Sp}(\Delta[n], X) = X_n$ и $\text{Hom}_{Sp}(\Delta[n], \Delta[m]) = \text{Hom}_\Delta([n], [m])$ для всех $X \in Sp$ и $n, m \geq 0$.

(c) Обозначим через $\Delta^i[n]$ образ включения $d^i: \Delta[n-1] \rightarrow \Delta[n]$ и положим $\partial\Delta[n] := \bigcup_{i=0}^n \Delta^i[n] \subset \Delta[n]$ и $\Lambda^k[n] := \bigcup_{i \neq k} \Delta^i[n] \subset \Delta[n]$ для всех $k = 0, \dots, n$.

1.2.4. Слои. (a) Для $X \in Sp$ пишем $x \in X$ вместо $x \in X_0$. Согласно 1.2.3(b), каждому $x \in X$ соответствует отображение $x: \text{pt} \rightarrow X$.

(b) Для каждого морфизма $f: Y \rightarrow X$ обозначим через $f^{-1}(x)$ или Y_x расслоенное произведение $\{x\} \times_X Y := \text{pt} \times_{x,X} Y$ и назовем его *слоем морфизма f в точке x* .

(c) Для любых $Z \in Sp$ и $X, Y \in Sp/Z$ обозначим через $\text{Map}_Z(X, Y)$ слой морфизма $Y^X \rightarrow Z^X$ над проекцией $(X \rightarrow Z) \in Z^X$.

1.2.5. Определение. (a) Отображение $f: X \rightarrow Y$ в Sp называется *расслоением (Кана)*, если оно поднимается справа относительно включений $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ для всех $n > 0$, $k = 0, \dots, n$.

(b) Отображение $f: X \rightarrow Y$ в Sp называется *слабой эквивалентностью*, если оно индуцирует слабую эквивалентность $|f|: |X| \rightarrow |Y|$ геометрических реализаций (см. [1, с. 60]).

(c) Отображение $f: X \rightarrow Y$ в Sp называется *корасслоением*, если $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ является включением для всех n .

1.2.6. Теорема. Категория Sp имеет структуру правильной декартовой модельной категории, в которой корасслоения, расслоения и слабые эквивалентности заданы определением 1.2.5. В частности, все $X \in Sp$ кофибрантны, а тривиальные расслоения — это в точности отображения, поднимаемые справа относительно включений $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$, $n \geq 0$.

Доказательство. См. [1, гл. I, теорема 11.3, предложение 11.5, и гл. II, следствие 8.6] с учетом того факта, что в случае модельной категории Sp прилагательное «декартова» означает то же самое, что и «симплициальная». $\square$

1.2.7. Определение. Будем говорить, что $X \in Sp$ — (*стягиваемый*) *комплекс Кана*, если проекция $X \rightarrow \text{pt}$ — (тривиальное) расслоение.

1.2.8. Компоненты связности. (a) Будем говорить, что объект $X \in Sp$ *связен*, если его нельзя представить как несвязное объединение $X = X' \sqcup X''$, где $X', X'' \neq \emptyset$. Будем говорить, что $Y \subset X$ — *компонента связности пространства X* , если она является максимальным связным подпространством в X . Заметим, что X является несвязным объединением своих компонент связности.

(b) Обозначим множество компонент связности пространства X через $\pi_0(X)$. Тогда каждое отображение $f: X \rightarrow Y$ в Sp индуцирует отображение $\pi_0(f):$

$\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Заметим, что X связно тогда и только тогда, когда связна его геометрическая реализация $|X|$. В частности, справедливо равенство $\pi_0(X) = \pi_0(|X|)$. Поэтому для любой слабой эквивалентности $f: X \rightarrow Y$ в Spr отображение $\pi_0(f)$ является биекцией.

(с) При $x, y \in X$ мы говорим, что $x \sim y$, если x и y принадлежат одной и той же компоненте связности пространства X . Если X — комплекс Кана, то $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует отображение $\alpha: \Delta[1] \rightarrow X$, такое, что $\alpha(0) = x$ и $\alpha(1) = y$ (см. [1, лемма 6.1]).

1.2.9. Лемма. (а) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — тривиальное расслоение. Тогда его пространство сечений $\text{Мар}_Y(Y, X)$ непусто и связно.

(б) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — расслоение в Spr . Тогда f тривиально в том и только в том случае, когда комплекс Кана $f^{-1}(y)$ стягиваем для любого $y \in Y$.

(с) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение расслоений над Z в Spr . Тогда f является слабой эквивалентностью в том и только в том случае, когда отображение слоев $f_z: X_z \rightarrow Y_z$ — слабая эквивалентность для любого $z \in Z$.

Доказательство. (а) Поскольку Y кофибрантно, проекция $X^Y \rightarrow Y^Y$ является тривиальным расслоением (в силу 1.1.9(а)). Поэтому его слой $\text{Мар}_Y(Y, X)$ — стягиваемый комплекс Кана (в силу 1.1.7(б)), и потому он непуст и связан в силу 1.2.8(б).

(б) Согласно последнему утверждению теоремы 1.2.6, расслоение f тривиально тогда и только тогда, когда его публэк $\tau^*(f)$ — тривиальное расслоение для любого $\tau: \Delta[n] \rightarrow Y$. Таким образом, можно предположить, что $Y = \Delta[n]$. Тогда для любого $y \in \Delta[n]$ включение $y: \Delta[0] \rightarrow \Delta[n]$ является слабой эквивалентностью. Таким образом, $X_y \rightarrow X$ — слабая эквивалентность, потому что категория Spr правильна справа. Значит, в силу свойства «2 из 3» f является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда слабой эквивалентностью является $X_y \rightarrow \Delta[0]$.

(с) Это будет доказано в 1.3.13. □

1.3. Симплициальные пространства.

1.3.1. Обозначения. (а) Под категорией *симплициальных пространств* мы понимаем категорию функторов $sSpr = \text{Fun}(\Delta^{op}, Spr) = \text{Fun}(\Delta^{op} \times \Delta^{op}, Set)$.

(б) Для $X \in sSpr$ и $n, m \geq 0$ положим $X_n := X([n]) \in Spr$ и $X_{n,m} := (X_n)_m \in Set$. Для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ в $sSpr$ обозначим через $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ соответствующий морфизм в Spr .

(с) Для любого $\tau: [n] \rightarrow [m]$ в Δ обозначим через $\tau^*: X_m \rightarrow X_n$ индуцированное отображение пространств. Положим также $\delta_{k_0, \dots, k_m} := (\delta^{k_0, \dots, k_m})^*: X_n \rightarrow X_m$, $d_i := (d^i)^*: X_n \rightarrow X_{n-1}$ и $e_i := (e^i)^*: X_n \rightarrow X_m$.

(д) Согласно 1.1.2, категория $sSpr$ декартова и в ней существуют все пределы и копределы. Для $X, Y \in sSpr$ определим пространство отображений $\text{Мар}(Y, X) := (X^Y)_0 \in Spr$.

1.3.2. Два вложения $Spr \hookrightarrow sSpr$. (а) Обозначим через $diag: Spr \rightarrow sSpr$ (соответственно $diag: Set \rightarrow Spr$) отображение, сопоставляющее каждому объекту X постоянное симплициальное пространство (соответственно множество) $[n] \mapsto X$, $\tau \mapsto \text{Id}_X$. Для любого $X \in Spr$, обозначим постоянное симплициальное пространство $diag(X) \in sSpr$ просто через X .

(b) Вложение $diag: Set \rightarrow Sp$ индуцирует вложение $disc: Sp = \text{Fun}(\Delta^{op}, Set) \rightarrow sSp = \text{Fun}(\Delta^{op}, Sp)$. Тогда образ вложения $disc$ состоит из *дискретных симплициальных пространств*, а именно из $X \in sSp$, таких, что $X_n \in Sp$ дискретно (т. е. каждое отображение $\Delta[1] \rightarrow X_n$ постоянно) для всех n .

(c) Положим $F[n] := disc(\Delta[n])$, $\partial F[n] := disc(\partial \Delta[n])$ и $F^i[n] := disc(\Lambda^i[n])$.

1.3.3. Стандартный бисимплекс. (a) Для $n, m \geq 0$ положим $[n, m] := ([n], [m]) \in \Delta^2$ и $\square[n, m] := F[n] \times \Delta[m] \in sSp$. В частности, $F[n] = \square[n, 0]$, $\Delta[m] = \square[0, m]$ и $\text{pt} = F[0] = \Delta[0]$.

(b) Заметим, что $\square[n, m]$ — не что иное, как функтор $\text{Hom}_{\Delta \times \Delta}(\cdot, [n, m])$. Тогда в силу леммы Йонеды получаем отождествления $\text{Hom}(\square[n, m], \square[n', m']) = \text{Hom}([n, m], [n', m'])$ и $\text{Hom}(\square[n, m], X) = X_{n, m}$. В частности, справедливы отождествления $\text{Map}(F[n], X) = X_n$ и $\text{Hom}(F[n], F[m]) = \text{Hom}([n], [m])$.

(c) Положим также $\partial \square[n, m] := (\partial F[n] \times \Delta[m]) \sqcup_{(\partial F[n] \times \partial \Delta[m])} (F[n] \times \partial \Delta[m])$ и $X_{\partial n} := \text{Map}(\partial F[n], X)$.

1.3.4. Слои. (a) Для $X \in sSp$ пишем $x \in X$ вместо $x \in X_{0,0}$ и $x \sim y \in X$ вместо $x \sim y \in X_0$. Согласно 1.3.3(b), каждому $x \in X$ соответствует отображение $x: \text{pt} \rightarrow X$.

(b) Как и в 1.2.4, для любого морфизма $f: Y \rightarrow X$ в sSp обозначим через $f^{-1}(x)$ или Y_x расслоенное произведение $\{x\} \times_X Y := \text{pt} \times_{x, X} Y$ и назовем его *слоем морфизма f в точке x* .

(c) Для любых $Z \in sSp$ и $X, Y \in sSp/Z$ обозначим через $\mathcal{M}ap_Z(X, Y) \in sSp$ слой морфизма $Y^X \rightarrow Z^X$ над проекцией $(X \rightarrow Z) \in Z^X$. Также обозначим через $\text{Map}_Z(X, Y) := \mathcal{M}ap_Z(X, Y)_0 \in Sp$ нулевое пространство слоя $\mathcal{M}ap_Z(X, Y)$.

1.3.5. Определение. Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow Y$ в sSp является *расслоением (Риди)*, если для любого $n \geq 0$ индуцированное отображение $\bar{f}_n: X_n \rightarrow Y_n \times_{Y_{\partial n}} X_{\partial n}$ является расслоением Кана в Sp .

1.3.6. Теорема. Категория sSp обладает структурой декартовой правильной модельной категории, такой, что расслоения являются расслоениями Риди, а корасслоения и слабые эквивалентности определяются покоординатно, т. е. $f: X \rightarrow Y$ является корасслоением (слабой эквивалентностью), если таково $\bar{f}_n: X_n \rightarrow Y_n$ для всех n .

Доказательство. Все утверждения кроме утверждения, что эта модельная категория декартова, доказаны в [1, гл. IV, теорема 3.9]. Для доказательства оставшегося утверждения используем лемму 1.1.10. Теперь утверждение следует из того факта, что пушауты, произведения, корасслоения и слабые эквивалентности определяются покоординатно, а модельная категория Sp декартова. $\square$

1.3.7. Замечания. (a) Из леммы 1.1.3 следует, что отображение $f: X \rightarrow Y$ в sSp является расслоением тогда и только тогда, когда оно поднимаемо справа относительно всех включений $(\partial F[n] \times \Delta[m]) \sqcup_{(\partial F[n] \times \Lambda^i[m])} (F[n] \times \Lambda^i[m]) \hookrightarrow \square[n, m]$.

(b) Если $f: X \rightarrow Y$ — расслоение Риди, то отображение $\bar{f}_n: X_n \rightarrow Y_n$ является расслоением для всех n . Действительно, $f_0 = \bar{f}_0$ — расслоение по определению, $f^{F[n]}: X^{F[n]} \rightarrow Y^{F[n]}$ — расслоение в силу 1.1.9(a), так что $\bar{f}_n = (f^{F[n]})_0$ — тоже расслоение.

(с) Пусть $X \rightarrow Y$ — расслоение в sSp , и пусть $i: A \rightarrow B$ — корасслоение над Y . Тогда отображение $X^B \rightarrow Y^B \times_{Y^A} X^A$ является расслоением по теореме 1.3.6. Взяв нулевые пространства слоев над проекцией $(B \rightarrow Y) \in Y^B$, заключаем, что отображение $i^*: \text{Мар}_Y(B, X) \rightarrow \text{Мар}_Y(A, X)$ является расслоением. В частности, $\text{Мар}_Y(B, X) \in Sp$ — комплекс Кана.

1.3.8. Гомотопическая эквивалентность. Пусть $Z \in sSp$ (соответственно $Z \in Sp$).

(а) Будем говорить, что отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ в sSp/Z (соответственно в Sp/Z) *гомотопны над Z* , и писать $f \sim_Z g$, если $f \sim g$ как элементы из $\text{Мар}_Z(X, Y)$.

Заметим, что если $Y \rightarrow Z$ — расслоение, то $\text{Мар}_Z(X, Y) \in Sp$ — комплекс Кана (в силу 1.3.7(с)), так что в силу 1.2.8(с) соотношение $f \sim_Z g$ означает, что существует отображение $h: X \times \Delta[1] \rightarrow Y$ над Z , такое, что $h|_0 := h|_{X \times \{0\}} = f$ и $h|_1 := h|_{X \times \{1\}} = g$.

(b) Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow Y$ — *гомотопическая эквивалентность над Z* , если существует отображение $g: Y \rightarrow X$ над Z , называемое *гомотопически обратным к f* , такое, что $f \circ g \sim_Z \text{Id}_Y$ и $g \circ f \sim_Z \text{Id}_X$.

1.3.9. Замечания. (а) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность над Z с гомотопически обратным g . Тогда для любого $\tau: Z' \rightarrow Z$ публэк $\tau^*(f)$ является гомотопической эквивалентностью над Z' с гомотопически обратным $\tau^*(g)$. Аналогично, для любого $K \in sSp$ отображение $f^K: X^K \rightarrow Y^K$ является гомотопической эквивалентностью с гомотопически обратным $g^K: Y^K \rightarrow X^K$. Кроме того, композиция гомотопических эквивалентностей является гомотопической эквивалентностью.

(b) По определению, если $f \sim_Z g$ в sSp , то $f_n \sim_{Z_n} g_n$ в Sp для всех n .

(с) Если $f \sim_Z g$, то f является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда слабой эквивалентностью является g . Действительно, утверждение для Sp следует из того факта, что если $f \sim_Z g$, то геометрические реализации удовлетворяют соотношению $|f| \sim_{|Z|} |g|$, а утверждение для sSp следует из утверждения для Sp и из (b).

(d) Как и в (с), можно показать, что каждая гомотопическая эквивалентность является слабой эквивалентностью.

1.3.10. Сильный деформационный ретракт. Пусть $Z \in sSp$ и $X \in sSp/Z$ (соответственно $Z \in Sp$ и $X \in Sp/Z$).

(а) Будем говорить, что $Y \subset X$ — *сильный деформационный ретракт над Z* , если существует отображение $h: X \times \Delta[1] \rightarrow X$ над Z , такое, что $h|_0 = \text{Id}_X$, $h|_1(X) \subset Y$ и $h|_{Y \times \Delta[1]}$ совпадает с $Y \times \Delta[1] \xrightarrow{\text{pr}_1} Y \subset X$.

(b) Если $Y \subset X$ — сильный деформационный ретракт над Z , то вложение $i: Y \hookrightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью над Z , а $h|_1: X \rightarrow Y$ — ее гомотопически обратный. Таким образом, i — тривиальное корасслоение в силу 1.3.9(d), а $Y \rightarrow Z$ — ретракт морфизма $X \rightarrow Z$. В частности, $Y \rightarrow Z$ — расслоение, если $X \rightarrow Z$ — расслоение (в силу аксиомы СМЗ).

(с) Обратно, если включение $i: Y \hookrightarrow X$ — тривиальное корасслоение расслоений над Z , то $i(Y) \subset X$ — сильный деформационный ретракт над Z .

Доказательство п. (с). Поскольку $i: Y \rightarrow X$ — тривиальное корасслоение, в то время как $Y \rightarrow Z$ — расслоение, существует отображение $p: X \rightarrow Y$ над Z , такое, что $p \circ i = \text{Id}_Y$. Далее, индуцированное отображение $(X \times \partial\Delta[1]) \sqcup_{(Y \times \partial\Delta[1])}$

$(Y \times \Delta[1]) \hookrightarrow X \times \Delta[1]$ является тривиальным корасслоением (по лемме 1.1.10). Поскольку $X \rightarrow Z$ — расслоение, существует отображение $h: X \times \Delta[1] \rightarrow X$ над Z , такое, что $h|_0 = \text{Id}_X$, $h|_1 = p$ и $h|_{Y \times \Delta[1]} = \text{pr}_1$. $\square$

1.3.11. Лемма. (а) Морфизм $f: X \rightarrow Y$ над Z является гомотопической эквивалентностью над Z тогда и только тогда, когда для любого отображения $\alpha: K \rightarrow Z$ в sSp индуцированное отображение $\pi_0(\text{Map}_Z(K, X)) \rightarrow \pi_0(\text{Map}_Z(K, Y))$ является биекцией.

(б) Каждая слабая эквивалентность расслоений является гомотопической эквивалентностью. В частности, пулбэк слабой эквивалентности расслоений есть слабая эквивалентность.

(с) Для любого расслоения $X \rightarrow Y \times \Delta[1]$ существует слабая эквивалентность $X|_0 \rightarrow X|_1$ расслоений над Y .

(d) Пусть $f: Y_A \rightarrow A$ — расслоение, и пусть $A \hookrightarrow B$ — тривиальное корасслоение. Тогда существует расслоение $g: Y_B \rightarrow B$, сужение которого на A есть f .

Доказательство. (а) Если f — гомотопическая эквивалентность, то индуцированное отображение $\text{Map}_Z(K, X) \rightarrow \text{Map}_Z(K, Y)$ — также гомотопическая эквивалентность (в силу 1.3.9(a)), так что нужное утверждение следует из 1.3.9(d) и 1.2.8(b). Обратно, применяя предположение к проекции $Y \rightarrow Z$, находим морфизм $g: Y \rightarrow X$ над Z , такой, что $f \circ g \sim_Z \text{Id}_Y$. Далее, применяя предположение к проекции $X \rightarrow Z$, получаем, что $g \circ f \sim_Z \text{Id}_X$.

(б) Согласно 1.1.7(с) и 1.3.9(a), достаточно отдельно рассмотреть случаи тривиального корасслоения и тривиального расслоения. Если f — тривиальное корасслоение, то утверждение следует из 1.3.10(b),(c). Если f — тривиальное расслоение, то утверждение следует из (а). Действительно, каждое отображение $\text{Map}_Z(K, X) \rightarrow \text{Map}_Z(K, Y)$ является тривиальным расслоением, так что соответствующее отображение для π_0 является биекцией в силу 1.2.8(b). Последнее утверждение следует из 1.3.9(a).

(с) Поскольку каждое отображение $\delta^i: \Delta[0] \hookrightarrow \Delta[1]$ является тривиальным корасслоением, индуцированное отображение $(\delta^i)^*: X^{\Delta[1]} \rightarrow X \times_{(Y \times \Delta[1])} (Y \times \Delta[1])^{\Delta[1]}$ есть тривиальное расслоение. Взяв пулбэк относительно включения $Y \hookrightarrow (Y \times \Delta[1])^{\Delta[1]}$, соответствующего $\text{Id}_{Y \times \Delta[1]}$, получаем тривиальное расслоение $\tilde{X} := X^{\Delta[1]} \times_{(\Delta[1] \times Y)^{\Delta[1]}} Y \rightarrow X|_i$ над Y . Таким образом, и $X|_0$, и $X|_1$ гомотопически эквивалентны $\tilde{X}$ над Y (в силу (b)).

(d) Это будет доказано в 3.2.3. $\square$

1.3.12. Замечание. Из леммы 1.3.11(b) и замечания 1.2.8(b) следует, что комплекс Кана $X \in Sp$ стягиваем тогда и только тогда, когда проекция $X \rightarrow \text{pt}$ является гомотопической эквивалентностью. По определению это происходит тогда и только тогда, когда X непусто и отображение Id_X гомотопно постоянному отображению $X \rightarrow \{x\} \subset X$.

1.3.13. Доказательство леммы 1.2.9(c). Если f — слабая эквивалентность, то каждое $f_z: X_z \rightarrow Y_z$ является слабой эквивалентностью по лемме 1.3.11(b).

Обратно, запишем f как $p \circ i$, где $i: X \rightarrow X'$ — тривиальное корасслоение, а $p: X' \rightarrow Y$ — расслоение. Согласно части «только в том случае», каждое i_z есть слабая эквивалентность. Поскольку каждое f_z — тривиальное расслоение

по предположению, каждое p_z есть слабая эквивалентность по свойству «2 из 3». Поскольку $p_z: X'_z \rightarrow Y_z$ — расслоение, оно является тривиальным расслоением. Тогда все слои каждого p_z стягиваемы, так что все слои отображения p стягиваемы. Поэтому p — тривиальное расслоение по лемме 1.2.9(b) и, значит, f — слабая эквивалентность. $\square$

1.4. Пространства Сигала. Наше изложение близко следует статье Резка [6].

1.4.1. Обозначения. (а) Будем говорить, что $X \in sSp$ является *пространством Сигала*, если X фибрантно и

$$\varphi_n =: \delta_{01} \times \delta_1 \cdots \times \delta_{n-1} \delta_{n-1,n}: X_n \rightarrow X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

— слабая эквивалентность для любого $n \geq 2$.

(b) Так как модельная категория Риди декартова, то для любого фибрантно-объекта $X \in Sp$ отображение φ_n есть расслоение. Таким образом, фибрантный объект $X \in sSp$ является пространством Сигала тогда и только тогда, когда каждое отображение φ_n есть тривиальное расслоение.

1.4.2. «Объекты» и «пространства отображений». Пусть X — пространство Сигала.

(а) Под его *пространством объектов* мы понимаем пространство X_0 . Положим $\text{Ob } X := X_{0,0}$ и назовем его *множеством объектов* пространства Сигала X . Как и в 1.3.4, пишем $x \in X$ вместо $x \in \text{Ob } X$.

(b) Для любых $x, y \in X$ обозначим через $\text{map}(x, y) = \text{map}_X(x, y) \in Sp$ слой отображения $(\delta_0, \delta_1): X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ над (x, y) . Заметим, что поскольку X фибрантно, отображение (δ_0, δ_1) есть расслоение, так что каждое пространство $\text{map}(x, y)$ является комплексом Кана. Для любых $x, y, z \in X$ обозначим через $\text{map}(x, y, z)$ слой отображения $(\delta_0, \delta_1, \delta_2): X_3 \rightarrow (X_0)^3$ над (x, y, z) .

(с) Для любого $x \in X$ положим $\text{id}_x := \delta_{0,0}(x) \in \text{map}_X(x, x)$.

(d) Назовем отображение пространств Сигала $f: X \rightarrow Y$ *вполне строгим*, если для любых $x, y \in X$ индуцированное отображение $\text{map}_X(x, y) \rightarrow \text{map}_Y(f(x), f(y))$ есть слабая эквивалентность.

1.4.3. Гомотопическая категория. (а) Пусть X — пространство Сигала, а $x, y, z \in X$. Тогда тривиальное расслоение $\varphi_2: X_2 \rightarrow X_1 \times_{X_0} X_1$ индуцирует тривиальное расслоение $\text{map}(x, y, z) \rightarrow \text{map}(x, y) \times \text{map}(y, z)$ (в силу 1.1.7(b)), которое по лемме 1.2.9(a) имеет сечение s , единственное с точностью до гомотопии. Таким образом, имеется корректно определенное отображение

$$[s] := \pi_0(s): \pi_0(\text{map}(x, y)) \times \pi_0(\text{map}(y, z)) \rightarrow \pi_0(\text{map}(x, y, z)).$$

(b) Отображение $\delta_{02}: X_2 \rightarrow X_1$ индуцирует отображение $\delta_{02}: \text{map}(x, y, z) \rightarrow \text{map}(x, z)$. Поэтому для любых $[\alpha] \in \pi_0(\text{map}(x, y))$ и $[\beta] \in \pi_0(\text{map}(y, z))$ можно определить композицию

$$[\beta] \circ [\alpha] := \pi_0(\delta_{02})([s]([\alpha], [\beta])) \in \pi_0(\text{map}(x, z)). \quad (1.2)$$

Нетрудно доказать (см. [6, предложение 5.4]), что эта композиция ассоциативна и удовлетворяет соотношению $[\alpha] \circ [\text{id}_x] = [\alpha] = [\text{id}_y] \circ [\alpha]$ для всех $\alpha \in \text{map}(x, y)$.

(с) Используя (b), можно сопоставить пространству Сигала X его *гомотопическую категорию* $\text{Ho } X$, объекты которой — это $\text{Ob } X$, морфизмы определены равенством $\text{Hom}_{\text{Ho } X}(x, y) := \pi_0(\text{map}_X(x, y))$, композиция определена в (1.2), а тождественное отображение есть $[\text{id}_x] \in \text{Hom}_{\text{Ho } X}(x, x)$.

1.4.4. Полные пространства Сигала. Пусть X — пространство Сигала.

(а) Будем говорить, что $\alpha \in \text{map}_X(x, y) \subset X_1$ — *гомотопическая эквивалентность*, если соответствующий морфизм $[\alpha] \in \text{Hom}_{\text{Ho } X}(x, y)$ является изоморфизмом. Явным образом это означает, что существует $\beta \in \text{map}(y, x)$, такое, что $[\beta] \circ [\alpha] = [\text{id}_x]$ и $[\alpha] \circ [\beta] = [\text{id}_y]$.

(b) Пусть $X_{\text{heq}} \subset X_1$ — максимальное подпространство, такое, что каждое $\alpha \in X_{\text{heq}}$ есть гомотопическая эквивалентность. Нетрудно доказать (см. [6, лемма 5.8]), что $X_{\text{heq}} \subset X_1$ — объединение компонент связности.

(с) Заметим, что так как каждый морфизм $[\text{id}_x]$ является изоморфизмом, то $\text{id}_x \in X_{\text{heq}}$ для любого $x \in X$. Поэтому отображение $s_0 := \delta_{0,0}: X_0 \rightarrow X_1$ пропускается через X_{heq} . Будем говорить, что X — *полное пространство Сигала*, если отображение $s_0: X_0 \rightarrow X_{\text{heq}}$ — слабая эквивалентность.

1.4.5. Лемма. Пусть $X \in sSp$ — пространство Сигала.

(а) Пусть $X'_1 \subset X_1$ — объединение компонент связности, пересекающихся с $s_0(X_0)$, и пусть $X'_3 := \delta_{02}^{-1}(X'_1) \cap \delta_{13}^{-1}(X'_1) \subset X_3$. Тогда $X'_1 \subset X_{\text{heq}}$ и $\delta_{12}(X'_3) = X_{\text{heq}}$.

(b) X полно тогда и только тогда, когда $\delta_0: X_{\text{heq}} \hookrightarrow X_1 \rightarrow X_0$ — тривиальное расслоение.

Доказательство. (а) Так как $X_{\text{heq}} \subset X_1$ — объединение связных компонент, то из вложения $s_0(X_0) \subset X_{\text{heq}}$ следует, что $X'_1 \subset X_{\text{heq}}$. Далее, для любого $\alpha \in X'_3$ имеем $\delta_{02}(\alpha), \delta_{13}(\alpha) \in X'_1 \subset X_{\text{heq}}$, так что $[\delta_{02}(\alpha)] = [\delta_{12}(\alpha)] \circ [\delta_{01}(\alpha)]$ и $[\delta_{13}(\alpha)] = [\delta_{23}(\alpha)] \circ [\delta_{12}(\alpha)]$ — изоморфизмы в $\text{Ho } X$. Поэтому $[\delta_{12}(\alpha)]$ — изоморфизм, так что $\delta_{12}(\alpha) \in X_{\text{heq}}$.

Обратно, пусть $\alpha \in \text{map}(x, y) \subset X_{\text{heq}}$, и пусть $\beta \in \text{map}(y, x)$ удовлетворяет условиям $[\beta] \circ [\alpha] = [\text{id}_x]$ и $[\alpha] \circ [\beta] = [\text{id}_y]$. Поскольку φ_3 — тривиальное расслоение, оно сюръективно. Таким образом, существует $\gamma \in X_3$, такое, что $\delta_{01}(\gamma) = \delta_{23}(\gamma) = \beta$ и $\delta_{12}(\gamma) = \alpha$. Тогда по предположению $\delta_{02}(\gamma) \sim \text{id}_y$ и $\delta_{13}(\gamma) \sim \text{id}_x$, так что $\gamma \in X'_3$.

(b) Согласно 1.4.4(b), композиция $X_{\text{heq}} \hookrightarrow X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ является расслоением, так что проекция $\delta_0: X_{\text{heq}} \rightarrow X_0$ — также расслоение. Поскольку $\delta_0 \circ s_0 = \text{Id}_{X_0}$, заключаем, что $s_0: X_0 \rightarrow X_{\text{heq}}$ является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда $\delta_0: X_{\text{heq}} \rightarrow X_0$ — тривиальное расслоение. $\square$

1.4.6. Декартова структура. Резк показал (см. [6, следствие 7.3]), что если X — (полное) пространство Сигала, то X^K — также (полное) пространство Сигала для любого $K \in sSp$.

§2. Лемма Йонеды

2.1. Левые расслоения.

2.1.1. Определение. Назовем расслоение $f: X \rightarrow Y$ в sSp *левым расслоением*, если отображение $(f_*, (\delta^0)^*): X^{F[1]} \rightarrow X \times_Y Y^{F[1]}$, индуцированное отображением $\delta^0: F[0] \hookrightarrow F[1]$, является тривиальным расслоением.

2.1.2. Лемма. (а) Пулбэк левого расслоения есть левое расслоение.

(b) Если $f: X \rightarrow Y$ — левое расслоение, то $f^Z: X^Z \rightarrow Y^Z$ — левое расслоение для любого $Z \in sSp$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из того факта, что пулбэк (тривиального) расслоения есть (тривиальное) расслоение (см. 1.1.7(b)).

(b) По определению отображение $X^{F[1]} \rightarrow X \times_Y Y^{F[1]}$ есть тривиальное расслоение. Поскольку модельная структура Риди декартова, заключаем, что f^Z — расслоение, в то время как отображение $(X^Z)^{F[1]} = (X^{F[1]})^Z \rightarrow (X \times_Y Y^{F[1]})^Z = X^Z \times_{Y^Z} (Y^Z)^{F[1]}$ есть тривиальное расслоение (мы использовали 1.1.9). Таким образом, $f^Z: X^Z \rightarrow Y^Z$ — левое расслоение. $\square$

2.1.3. Лемма. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — расслоение в $sSpr$. Следующие условия эквивалентны:

- (a) f — левое расслоение,
- (b) для любого $n \geq 1$ отображение $(f_*, (\delta^0)^*): X^{F[n]} \rightarrow X \times_Y Y^{F[n]}$, индуцированное отображением $\delta^0: [0] \hookrightarrow [n]$, есть тривиальное расслоение,
- (c) для любого $n \geq 1$ отображение $p_n: X_n \rightarrow X_0 \times_{Y_0} Y_n$, индуцированное отображением $\delta^0: [0] \hookrightarrow [n]$, есть тривиальное расслоение.

Доказательство. (a) $\implies$ (b). Согласно (a) и 1.1.9(b), отображение

$$p: X^{F[1] \times F[n]} = (X^{F[1]})^{F[n]} \rightarrow (X \times_Y Y^{F[1]})^{F[n]} = X^{F[n]} \times_{Y^{F[n]}} Y^{F[1] \times F[n]}$$

является тривиальным расслоением. Поскольку тривиальные расслоения устойчивы при переходе к ретракту (аксиома CM3), остается показать, что отображение $X^{F[n+1]} \rightarrow X \times_Y Y^{F[n+1]}$ — ретракт отображения p . Достаточно показать, что $\delta^0: [0] \hookrightarrow [n+1]$ — ретракт отображения $\delta^0: [n] \times [0] \hookrightarrow [n] \times [1]$. Рассмотрим отображения $[n+1] \xrightarrow{\alpha} [n] \times [1] \xrightarrow{\beta} [n+1]$, где $\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(i) = (i-1, 1)$ для $i \geq 1$ и $\beta(i, j) = (i+1)j$. Тогда $\beta \circ \alpha = \text{Id}$, $\alpha(0) \in [n] \times \{0\}$ и $\beta([n] \times \{0\}) = 0$, так что α и β реализуют $\delta^0: [0] \hookrightarrow [n+1]$ как ретракт отображения $\delta^0: [n] \times [0] \hookrightarrow [n] \times [1]$.

(b) $\implies$ (c). Достаточно перейти к нулевым пространствам.

(c) $\implies$ (a). Сначала предположим, что Y фибрантно. Так как f — расслоение, то X фибрантно и индуцированное отображение $X^{F[1]} \rightarrow X \times_Y Y^{F[1]}$ является расслоением. Остается показать, что каждое отображение $(X^{F[1]})_n \rightarrow X_n \times_{Y_n} (Y^{F[1]})_n$ — слабая эквивалентность. Так как отображение $X_n \rightarrow X_0 \times_{Y_0} Y_n$ есть тривиальное расслоение, то его пулбэк

$$X_n \times_{Y_n} (Y^{F[1]})_n \rightarrow (X_0 \times_{Y_0} Y_n) \times_{Y_n} (Y^{F[1]})_n = X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[1]})_n$$

— тривиальное расслоение. Остается показать, что отображение $(X^{F[1]})_n \rightarrow X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[1]})_n$, или, что эквивалентно, $q_n: (X^{F[1] \times F[n]})_0 \rightarrow X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[1] \times F[n]})_0$, есть слабая эквивалентность.

Мы рассуждаем, как в [6, лемма 10.3]. Пусть $\gamma^i: [n+1] \rightarrow [n] \times [1]$ (соответственно $\epsilon^i: [n] \rightarrow [n] \times [1]$) — отображение, переводящее j в $(j, 0)$, если $j \leq i$, и в $(j-1, 1)$ (соответственно в $(j, 1)$) в противном случае. Тогда отображения γ^i и ϵ^i индуцируют для $F[n] \times F[1]$ разложение $F[n+1] \sqcup_{F[n]} \cdots \sqcup_{F[n]} F[n+1]$, где все отображения $F[n] \rightarrow F[n+1]$ являются корасслоениями.

Поэтому получаем для $(X^{F[n] \times F[1]})_0$ и $X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[1] \times F[n]})_0$ разложения

$$(X^{F[n+1]})_0 \times_{(X^{F[n]})_0} \cdots \times_{(X^{F[n]})_0} (X^{F[n+1]})_0,$$

$$(X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[n+1]})_0) \times_{(X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[n]})_0)} \cdots \times_{(X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[n]})_0)} (X_0 \times_{Y_0} (Y^{F[n+1]})_0).$$

Поскольку X и Y фибрантны, все отображения в обоих расслоенных произведениях являются расслоениями.

Таким образом, отображение q_n можно записать как расслоенное произведение отображений $X_{n+1} \rightarrow X_0 \times_{Y_0} Y_{n+1}$ над $X_n \rightarrow X_0 \times_{Y_0} Y_n$. Поскольку эти

отображения являются слабыми эквивалентностями в силу (b), заключаем, что p — слабая эквивалентность в силу следствия 3.1.5 (см. далее).

Для общего Y выберем его фибрантную замену Y' . Тогда по лемме 1.3.11(d) существует расслоение $f': X' \rightarrow Y'$, сужение которого на Y есть f . Мы утверждаем, что f' удовлетворяет предположению (c). Поскольку f' — расслоение, каждое $p'_n: X'_n \rightarrow X'_0 \times_{Y'_0} Y'_n$ является расслоением. Таким образом, остается показать, что p'_n — слабая эквивалентность.

Рассмотрим декартову диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \xrightarrow{p_n} & X_0 \times_{Y_0} Y_n & \longrightarrow & Y_n \\ i'' \downarrow & & i' \downarrow & & i \downarrow \\ X'_n & \xrightarrow{p'_n} & X'_0 \times_{Y'_0} Y'_n & \longrightarrow & Y'_n \end{array}$$

и заметим, что все горизонтальные отображения являются расслоениями. Поскольку i — слабая эквивалентность, а Sp правильна справа, заключаем, что i' и i'' — слабые эквивалентности. Поскольку p_n — слабая эквивалентность по предположению, p'_n есть слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3».

Согласно импликации (c) $\implies$ (a) для фибрантного Y , отображение $q': X'^{F[1]} \rightarrow X' \times_{Y'} Y'^{F[1]}$ есть тривиальное расслоение. Поэтому q , являясь сужением отображения q' на $X \times_Y Y^{F[1]}$, также есть тривиальное расслоение. $\square$

2.1.4. Замечания. (a) Согласно лемме 2.1.3(c), морфизм $f: X \rightarrow Y$ является левым расслоением тогда и только тогда, когда он поднимаем справа относительно корасслоений

$$\begin{aligned} (F[n] \times \Lambda^i[m]) \sqcup_{(\partial F[n] \times \Lambda^i[m])} (\partial F[n] \times \Delta[m]) &\hookrightarrow \square[n, m], \\ (F[n] \times \partial \Delta[m]) \sqcup_{(F[0] \times \partial \Delta[m])} (F[0] \times \Delta[m]) &\hookrightarrow \square[n, m]. \end{aligned}$$

В частности, морфизм $f: X \rightarrow Y$ есть левое расслоение тогда и только тогда, когда для любого морфизма $\tau: \square[n, m] \rightarrow Y$ пулбэк $\tau^*(f): \tau^*(X) \rightarrow \square[n, m]$ есть левое расслоение.

(b) Из леммы 2.1.3(c) можно также вывести, что если $f: X \rightarrow Y$ — левое расслоение и Y — (полное) пространство Сигала, то X — также (полное) пространство Сигала. В данной работе мы не пользуемся этим фактом.

2.1.5. Лемма. *Морфизм $f: X \rightarrow Y$ левых расслоений над Z является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда отображение слоев $f_z: (X_z)_0 \rightarrow (Y_z)_0$ есть слабая эквивалентность для любого $z \in Z$.*

Доказательство. Заметим, что $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ — морфизм расслоений над Z_0 . Таким образом, f_0 есть слабая эквивалентность тогда и только тогда, когда индуцированное отображение слоев $f_z: (X_z)_0 \rightarrow (Y_z)_0$ есть слабая эквивалентность для всех $z \in Z_0$ (по лемме 1.2.9(c)). Таким образом, остается показать, что если f_0 — слабая эквивалентность, то f_n — слабая эквивалентность для любого n . Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 \times_{Z_0} Z_n & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & Y_0 \times_{Z_0} Z_n \end{array}$$

в которой вертикальные отображения являются тривиальными расслоениями по лемме 2.1.3(с). Поскольку f_0 — слабая эквивалентность, в то время как $X_0 \rightarrow Z_0$ и $Y_0 \rightarrow Z_0$ — расслоения, отображение $\tilde{f}_0$ есть слабая эквивалентность в силу следствия 3.1.5. Поэтому f_n — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3». $\square$

2.1.6. Обозначения. (а) Для $X \in sSp$ и $x \in X$ положим $x \backslash X := \{x\} \times_X X^{F[1]} \rightarrow X$, где отображение $X^{F[1]} \rightarrow X$ индуцировано отображением $\delta^0: F[0] \rightarrow F[1]$, и определим $\text{id}_x := s_0(x) \in \{x\} \times_{X_0} X_1 = (x \backslash X)_0$.

(б) Мы утверждаем, что у проекции $\text{pr}_2: \text{id}_x \backslash (x \backslash X) \rightarrow x \backslash X$ есть сечение r , такое, что $r(\text{id}_x) = \text{id}_{\text{id}_x}$. Действительно, положим $A := (F[1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times F[1]) \subset F[1] \times F[1]$. Тогда отображение $m: [1] \times [1] \rightarrow [1]$, определенное соотношением $m(i, j) := ij$, индуцирует отображение $m: F[1] \times F[1] \rightarrow F[1]$, такое, что $m(A) = 0$. Поскольку $\text{id}_x \backslash (x \backslash X) \subset X^{F[1] \times F[1]}$ можно записать в виде $\{x\} \times_{X^A} X^{F[1] \times F[1]}$, отображение $m^*: X^{F[1]} \rightarrow X^{F[1] \times F[1]}$ индуцирует отображение $r: x \backslash X \rightarrow \text{id}_x \backslash (x \backslash X)$, которое удовлетворяет соотношениям $r(\text{id}_x) = \text{id}_{\text{id}_x}$ и $\text{pr}_2 \circ r = \text{Id}$.

Следующий результат является одним из основных шагов в доказательстве леммы Йонеды.

2.1.7. Предложение. Для любого левого расслоения $\pi: E \rightarrow X$ и любого $x \in X$ отображение $\text{ev}_{\text{id}_x}: \text{Map}_X(x \backslash X, E) \rightarrow \text{Map}_X(\{\text{id}_x\}, E) = (E_x)_0$, индуцированное включением $\{\text{id}_x\} \hookrightarrow x \backslash X$, есть тривиальное расслоение.

Доказательство. Поскольку $\{\text{id}_x\} \hookrightarrow x \backslash X$ — корасслоение, в то время как $E \rightarrow X$ — расслоение, отображение ev_{id_x} является расслоением (см. 1.3.7(с)). Поэтому остается показать, что для любого $\alpha \in E_x$ комплекс Кана $\text{Map}_X(x \backslash X, E)_\alpha := \text{ev}_{\text{id}_x}^{-1}(\alpha)$ стягиваем (по лемме 1.2.9(b)). Используя замечание 1.3.12, достаточно показать, что тождественное отображение комплекса $\text{Map}_X(x \backslash X, E)_\alpha$ пропускается через стягиваемый комплекс Кана.

Поскольку $E \rightarrow X$ — левое расслоение, проекция $E^{F[1]} \rightarrow E \times_X X^{F[1]}$ — это тривиальное расслоение. Таким образом, $\alpha \backslash E \rightarrow x \backslash X$, будучи его слоем над $\alpha \in E$, является тривиальным расслоением. Поэтому отображение $\text{ev}'_{\text{id}_x}: \text{Map}_{x \backslash X}(x \backslash X, \alpha \backslash E) \rightarrow ((\alpha \backslash E)_{\text{id}_x})_0$ является расслоением стягиваемых комплексов Кана. Значит, ev'_{id_x} — слабая эквивалентность и, следовательно, тривиальное расслоение. Отсюда вытекает, что его слой $\text{ev}'_{\text{id}_x}{}^{-1}(\text{id}_\alpha) = \text{Map}_{x \backslash X}(x \backslash X, \alpha \backslash E)_{\text{id}_\alpha}$ есть стягиваемый комплекс Кана.

Заметим, что проекция $\text{pr}_2: \alpha \backslash E \rightarrow E$ индуцирует проекцию

$$\rho: \text{Map}_{x \backslash X}(x \backslash X, \alpha \backslash E)_{\text{id}_\alpha} \rightarrow \text{Map}_X(x \backslash X, E)_\alpha.$$

Таким образом, достаточно показать, что у ρ есть сечение.

Естественный морфизм $\text{Map}_X(x \backslash X, E) \rightarrow \text{Map}_{X^{F[1]}}((x \backslash X)^{F[1]}, E^{F[1]})$ индуцирует морфизм $s': \text{Map}_X(x \backslash X, E)_\alpha \rightarrow \text{Map}_{x \backslash X}(\text{id}_x \backslash (x \backslash X), \alpha \backslash E)$. Согласно 2.1.6, у проекции $\text{pr}_2: \text{id}_x \backslash (x \backslash X) \rightarrow x \backslash X$ есть сечение r , такое, что $r(\text{id}_x) = \text{id}_{\text{id}_x}$. Тогда образ морфизма

$$r^* \circ s': \text{Map}_X(x \backslash X, E)_\alpha \rightarrow \text{Map}_{x \backslash X}(\text{id}_x \backslash (x \backslash X), \alpha \backslash E) \rightarrow \text{Map}_{x \backslash X}(x \backslash X, \alpha \backslash E)$$

лежит в $\text{Map}_{x \backslash X}(x \backslash X, \alpha \backslash E)_{\text{id}_\alpha}$ и $r^* \circ s'$ является сечением проекции ρ . $\square$

2.1.8. Следствие. Пусть $\pi: E \rightarrow X$ — левое расслоение, $x \in X$, а f и g — отображения $x \setminus X \rightarrow E$ над X , такие, что $f(\text{id}_x) \sim g(\text{id}_x) \in E_x$. Тогда $f \sim_X g$. В частности, f есть слабая эквивалентность тогда и только тогда, когда g — слабая эквивалентность.

Доказательство. Поскольку ev_{id_x} — тривиальное расслоение (в силу предложения 2.1.7), индуцированное отображение $\pi_0(\text{ev}_{\text{id}_x})$ является биекцией в силу 1.2.8(b). Последнее утверждение следует из 1.3.9(c). $\square$

2.1.9. Замечания. Пусть X — пространство Сигала. (а) По определению $(\delta_{01}, \delta_{12}): X_2 \rightarrow X_1 \times_{X_0} X_1$ и его пулбэк $\delta_{12}: X_0 \times_{s_0, X_1, \delta_{01}} X_2 \rightarrow X_1$ являются тривиальными расслоениями.

(b) Отображение $\delta_{02}: X_0 \times_{s_0, X_1, \delta_{01}} X_2 \rightarrow X_1$ является расслоением. Действительно, δ_{12} — пулбэк отображения $(\delta_{01}, \delta_{02}): X_2 \rightarrow X_1 \times_{X_0} X_1$, индуцированный включением $\delta^{01}F[1] \cup \delta^{02}F[1] \hookrightarrow F[2]$. Таким образом, δ_{02} — расслоение, потому что X фибрантно.

(c) Отображение δ_{02} из п. (b) — слабая эквивалентность. Действительно, отображение $r = (\delta_0, \delta_{001}): X_1 \rightarrow X_0 \times_{s_0, X_1, \delta_{01}} X_2$ удовлетворяет соотношению $\delta_{12} \circ r = \delta_{02} \circ r = \text{Id}$. Поскольку δ_{12} — слабая эквивалентность (в силу (a)), мы приходим к выводу, что r и δ_{02} являются слабыми эквивалентностями в силу свойства «2 из 3».

2.1.10. Лемма. Пусть X — пространство Сигала и $x \in X$. Тогда $\text{pr}_2: x \setminus X \rightarrow X$ — левое расслоение.

Доказательство. Поскольку X фибрантно, проекция $X^{F[1]} \rightarrow X^{\partial F[1]} = X \times X$ является расслоением, так что ее пулбэк $\text{pr}_2: x \setminus X \rightarrow X$ — также расслоение. Остается показать, что отображение $(x \setminus X)^{F[1]} \rightarrow (x \setminus X) \times_X X^{F[1]}$ — слабая эквивалентность, или, эквивалентным образом, что отображение $((x \setminus X)^{F[1]})_n \rightarrow (x \setminus X)_n \times_{X_n} (X^{F[1]})_n$ — слабая эквивалентность для всех n .

Используя отождествления $(X^{F[m]})_n = \text{Map}(F[m] \times F[n], X) = (X^{F[n]})_m$, мы можем переписать последнее отображение в виде $(x \setminus X^{F[n]})_1 \rightarrow (x \setminus X^{F[n]})_0 \times_{(X^{F[n]})_0} (X^{F[n]})_1$. Поскольку $X^{F[n]}$ — также пространство Сигала (см. 1.4.6), можно заменить X на $X^{F[n]}$. Остается показать, что отображение $(x \setminus X)_1 \rightarrow (x \setminus X)_0 \times_{X_0} X_1$ — тривиальное расслоение.

Используя разложение $F[1] \times F[1] = F[2] \sqcup_{F[1]} F[2]$, получаем разложение $(X^{F[1]})_1 = X_2 \times_{\delta_{02}, X_1, \delta_{02}} X_2$. Отсюда получаем разложение

$$(x \setminus X)_1 = (\{x\} \times_{X_1, \delta_{01}} X_2) \times_{(x \setminus X)_0} (\{x\} \times_{X_0, \delta_0} X_2), \quad (2.1)$$

которое отождествляет отображение $(x \setminus X)_1 \rightarrow (x \setminus X)_0 \times_{X_0} X_1$ с композицией

$$(x \setminus X)_1 \xrightarrow{f} \{x\} \times_{X_0, \delta_0} X_2 \xrightarrow{g} (x \setminus X)_0 \times_{X_0} X_1.$$

Мы утверждаем, что f и g — тривиальные расслоения. Поскольку g — пулбэк расслоения $(\delta_{01}, \delta_{12}): X_2 \rightarrow X_1 \times_{X_0} X_1$, в то время как f — пулбэк расслоения $\delta_{02}: \{x\} \times_{X_1, \delta_{01}} X_2 \rightarrow (x \setminus X)_0$ и, следовательно, пулбэк расслоения $\delta_{02}: X_0 \times_{s_0, X_1, \delta_{01}} X_2 \rightarrow X_1$, оба утверждения следуют из 2.1.9. $\square$

2.2. ∞ -категория пространств.

2.2.1. Обозначения. (а) Для любого $K \in sSp$ обозначим через $[K]$ категорию «бисимплексов симплициального пространства K ». Явным образом,

множество объектов категории $[K]$ есть несвязное объединение $\bigsqcup_{n,m} K_{n,m}$, и для любых $a \in K_{n,m}$ и $b \in K_{n',m'}$ множество морфизмов $\text{Mor}_{[K]}(a, b)$ есть множество таких $\tau \in \text{Mor}_{\Delta \times \Delta}([n', m'], [n, m])$, что $\tau^*(a) = b$.

(b) Заметим, что имеется естественный изоморфизм категорий $sSp/K \rightarrow \text{Fun}([K], \text{Set})$. А именно, каждое отображение $f: X \rightarrow K$ определяет функтор $[K] \rightarrow \text{Set}$, который переводит $a \in K_{n,m}$ в $f_{n,m}^{-1}(a) \subset X_{n,m}$. Обратно, каждый функтор $\phi: [K] \rightarrow \text{Set}$ определяет $X_\phi \in sSp/K$, где $(X_\phi)_{n,m} := \bigsqcup_{a \in K_{n,m}} \phi(a)$ с очевидными отображениями перехода.

(c) Каждое отображение $\phi: L \rightarrow K$ в sSp индуцирует функтор $[\phi]: [L] \rightarrow [K]$. Тогда биекция из п. (b) отождествляет $\phi^*: sSp/K \rightarrow sSp/L$ с пулбэк-функтором $[\phi]^*: \text{Fun}([K], \text{Set}) \rightarrow \text{Fun}([L], \text{Set})$.

2.2.2. Универсальные множества. Начиная с этого места, зафиксируем бесконечное множество $\mathcal{U}$, который назовем *универсальным множеством*.

(a) Пусть $\text{Set}_{\mathcal{U}} \subset \text{Set}$ — категория подмножеств множества $\mathcal{U}$, и пусть $\text{Set}_{|\mathcal{U}|}$ — категория множеств мощности $\leq |\mathcal{U}|$. Тогда категория $\text{Set}_{\mathcal{U}}$ является малой, и естественное вложение $\text{Set}_{\mathcal{U}} \rightarrow \text{Set}_{|\mathcal{U}|}$ представляет собой эквивалентность категорий.

(b) Положим $sSp|_{\mathcal{U}} := \text{Fun}(\Delta^{op} \times \Delta^{op}, \text{Set}_{|\mathcal{U}|}) \subset sSp$ и $sSp_{\mathcal{U}} := \text{Fun}(\Delta^{op} \times \Delta^{op}, \text{Set}_{\mathcal{U}}) \subset sSp$.

(c) Для $K \in sSp$ обозначим через $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$ (соответственно $(sSp/K)_{|\mathcal{U}|}$) полную подкатегорию в sSp/K , состоящую из морфизмов $f: X \rightarrow K$, таких, что слои всех $f_{n,m}: X_{n,m} \rightarrow K_{n,m}$ принадлежат $\text{Set}_{\mathcal{U}}$ (соответственно $\text{Set}_{|\mathcal{U}|}$).

(d) Биекция из 2.2.1(b) индуцирует биекцию между $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$ (соответственно $(sSp/K)_{|\mathcal{U}|}$) и функторами $[K] \rightarrow \text{Set}_{\mathcal{U}}$ (соответственно $[K] \rightarrow \text{Set}_{|\mathcal{U}|}$). В частности, категория $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$ является малой и включение $(sSp/K)_{\mathcal{U}} \rightarrow (sSp/K)_{|\mathcal{U}|}$ является эквивалентностью категорий.

(e) Обозначим через $(LFib/K)_{\mathcal{U}}$ множество левых расслоений $X \rightarrow K$, принадлежащих $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$. Согласно п. (c), 2.2.1(c) и лемме 2.1.2(a), для любого отображения $\phi: L \rightarrow K$ пулбэк-функтор $\phi^*: sSp/K \rightarrow sSp/L$ отображает $(LFib/K)_{\mathcal{U}}$ в $(LFib/L)_{\mathcal{U}}$.

2.2.3. Основная конструкция. (a) Пусть $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}} \in sSp$ — симплициальное пространство, такое, что

- $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n,m}$ есть множество левых расслоений $(LFib/\square[n, m])_{\mathcal{U}}$;
- для $a \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n,m}$, соответствующего левому расслоению $p_a: E_a \rightarrow \square[n, m]$, и $\nu \in \text{Hom}([n', m'], [n, m]) = \text{Hom}(\square[n', m'], \square[n, m])$ элемент $\nu^*(a) \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n',m'}$ соответствует пулбэку $\nu^*(p_a): \nu^*(E_a) \rightarrow \square[n', m']$ (мы воспользовались замечанием 2.2.2(e)).

(b) Рассмотрим «универсальное левое расслоение» $p_{\mathcal{U}}: \mathcal{E}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$, где $(\mathcal{E}_{\mathcal{U}})_{n,m}$ определено как несвязное объединение $\bigsqcup_{a \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n,m}} (E_a)_{n,m}$, а $p_{\mathcal{U}}$ — отображение, которое переводит $(E_a)_{n,m}$ в $a \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n,m}$.

2.2.4. Лемма. Отображение $p_{\mathcal{U}}: \mathcal{E}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ — левое расслоение. Для любого $K \in sSp$ отображение $\phi \mapsto \phi^*(p_{\mathcal{U}})$ определяет биекцию между $\text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}})$ и $(LFib/K)_{\mathcal{U}}$.

Доказательство. По построению для любого $a \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})_{n,m} = \text{Hom}(\square[n, m], \mathfrak{S}_{\mathcal{U}})$ пулбэк $a^*(p_{\mathcal{U}})$ равен $p_a: E_a \rightarrow \square[n, m]$. В частности, каждый пулбэк

$a^*(p_{\mathcal{U}})$ есть левое расслоение. Таким образом, $p_{\mathcal{U}}$ — левое расслоение в силу замечания 2.1.4(а).

Далее, заметим, что для любого $\phi: K \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ публэк $\phi^*(p_{\mathcal{U}}): \phi^*(\mathcal{E}_{\mathcal{U}}) \rightarrow K$ является левым расслоением, удовлетворяющим условию $a^*(\phi^*(p_{\mathcal{U}})) = (\phi \circ a)^*(p_{\mathcal{U}}) \in (LFib/\square[n, m])_{\mathcal{U}}$ для любого $a: \square[n, m] \rightarrow K$. Таким образом, $\phi^*(p_{\mathcal{U}}) \in (LFib/K)_{\mathcal{U}}$.

Обратно, каждое $E \in (LFib/K)_{\mathcal{U}}$ определяет отображение $\phi_E: K \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$, которое переводит $a \in K_{n, m} = \text{Hom}(\square[n, m], K)$ в левое расслоение $a^*(E) \rightarrow \square[n, m]$ в $(LFib/\square[n, m])_{\mathcal{U}}$. Тогда отображение $E \mapsto \phi_E$ обратно к $\phi \mapsto \phi^*(p_{\mathcal{U}})$. $\square$

2.2.5. Замечания. (а) Основной результат этого раздела (теорема 2.2.11) утверждает, что $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ — полное пространство Сигала. Это наша модель ∞ -категории пространств или, более формально, $(\infty, 1)$ -категории $(\infty, 0)$ -категорий.

(б) Можно показать, что каждое включение $i: \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{V}$ бесконечных множеств индуцирует вполне строгое отображение $i: \mathfrak{S}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{V}}$ полных пространств Сигала.

(с) Можно показать (см. [3]), что $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ эквивалентно фибрантной замене $N^f(Sp_{\mathcal{U}}, W)$ симплициального пространства $N(Sp_{\mathcal{U}}, W)$, которое Резк [6, 3.3] сопоставил паре $(Sp_{\mathcal{U}}, W)$, где W обозначает слабые эквивалентности.

(д) Можно также рассмотреть «большую» $(\infty, 1)$ -категорию $(\infty, 0)$ -категорий $\widehat{\mathfrak{S}}$, таких, что $\widehat{\mathfrak{S}}_{n, m}$ — класс всех левых расслоений $E \rightarrow \square[n, m]$.

(е) В [3] мы обобщаем нашу конструкцию 2.2.3 и строим $(\infty, n+1)$ -категорию (∞, n) -категорий.

2.2.6. Обозначения. (а) Для любого $n \geq 1$ обозначим через $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \in sSp$ симплициальное пространство, такое, что $(\mathfrak{S}^{(n)})_{m, k}$ есть множество диаграмм $\phi: E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E^{(n)}$ над $\square[m, k]$, где каждое $E^{(i)} \rightarrow \square[m, k]$ принадлежит $(LFib/\square[m, k])_{\mathcal{U}}$.

(б) Каждому отображению $\mu: [m] \rightarrow [n]$ сопоставим морфизм $\mu^*: \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(m)}$, который переводит диаграмму $\phi: E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E^{(n)}$ в диаграмму $\mu^*(\phi): E^{(\mu(0))} \rightarrow \dots \rightarrow E^{(\mu(n))}$, отображения в которой являются композициями отображений ϕ_i .

(с) Пусть $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)} \subset \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(1)}$ — симплициальное подпространство, такое, что множество $(\mathfrak{S}^{(we)})_{m, k} \subset (\mathfrak{S}^{(1)})_{m, k}$ состоит из слабых эквивалентностей $E^{(0)} \xrightarrow{\phi} E^{(1)}$ (мы воспользовались леммой 1.3.11(б)).

(д) Имеется естественная проекция $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{n+1}$, которая сопоставляет диаграмме ϕ , как в (а), упорядоченный набор $(E^{(0)}, \dots, E^{(n)})$ из $n+1$ элементов. Кроме того, для любого отображения $\mu: [m] \rightarrow [n]$ имеется естественное отображение $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \xrightarrow{\mu^*} \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(m)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{m+1}$.

2.2.7. Замечания. (а) Заметим, что для любых $X, Y \in sSp/K$ задать отображение $\phi \in \text{Hom}_K(X, Y)$ — это то же самое, что задать отображения $\tau^*(\phi) \in \text{Hom}_{\square[n, m]}(\tau^*(X), \tau^*(Y))$ для всех $\phi: \square[n, m] \rightarrow K$, совместимые с композициями. Используя это наблюдение и лемму 2.2.4, заключаем, что для любого $K \in sSp$ имеется естественная биекция между $\text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)})$ и множеством диаграмм $\phi: E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E^{(n)}$ левых расслоений из $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$.

(b) По определению $\phi \in \text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(1)})$ принадлежит $\text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)})$ тогда и только тогда, когда $\phi(a) \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)})_{n,m}$ для любого $a \in K_{n,m}$. Кроме того, по лемме 2.1.5 это происходит тогда и только тогда, когда $\phi(a) \in (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)})_{0,0}$ для любого $a \in K_{0,0}$. Опять используя лемму 2.1.5, видим, что при биекции из п. (a) элементы множества $\text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)}) \subset \text{Hom}_{sSp}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(1)})$ соответствуют слабым эквивалентностям $\phi: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$.

Следующие два предложения и следствие будут доказаны в §4.

Имеются естественные проекции $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{F[n]} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{n+1}$ и $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{\Delta[1]} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^2$, i -я компонента которых есть $(\delta^i)^*$.

2.2.8. Предложение. (a) Симплициальное пространство $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}} \in sSp$ Риди-фибрантно.

(b) Естественные проекции $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{n+1}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^2$ являются расслоениями.

(c) Обе композиции $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^2 \xrightarrow{p_i} \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ являются тривиальными расслоениями.

(d) $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)})_0 \subset (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(1)})_0$ является объединением компонент связности.

2.2.9. Предложение. (a) Существует гомотопическая эквивалентность $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{\Delta[1]} \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(we)}$ над $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^2$.

(b) Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует «естественная» гомотопическая эквивалентность $\psi_{\mathcal{U}}^{(n)}: \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{F[n]}$ над $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{n+1}$, определенная единственным образом с точностью до гомотопии.

(c) Кроме того, для любого отображения $\mu: [m] \rightarrow [n]$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} & \xrightarrow{\psi^{(n)}} & (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{F[n]} \\ \mu^* \downarrow & & \mu^* \downarrow \\ \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(m)} & \xrightarrow{\psi^{(m)}} & (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{F[m]} \end{array} \quad (2.2)$$

гомотопически коммутативна над $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{m+1}$, т. е. $\mu^* \circ \psi^{(n)} \sim_{(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{m+1}} \psi^{(m)} \circ \mu^*$, где отображение $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}^{(n)} \rightarrow (\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^{m+1}$ определено в 2.2.6(d).

2.2.10. Следствие. Пусть $K \in sSp$, $\alpha, \beta \in \text{Hom}(K, \mathfrak{S}_{\mathcal{U}})$, и пусть $E_{\alpha} \rightarrow K$ и $E_{\beta} \rightarrow K$ — соответствующие левые расслоения. Тогда $\alpha \sim \beta$ в $(\mathfrak{S}_{\mathcal{U}})^K$ в том и только в том случае, когда левые расслоения E_{α} и E_{β} гомотопически эквивалентны над K .

Теперь мы можем доказать один из основных результатов статьи.

2.2.11. Теорема. $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ — полное пространство Сигала.

Доказательство. Будем обозначать $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ просто через $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{S}$ фибрантно в силу предложения 2.2.8(a).

Чтобы показать, что $\mathfrak{S}$ — пространство Сигала, нам нужно доказать, что для любого $n \geq 2$ морфизм $\varphi_n: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_1 \times_{\mathfrak{S}_0} \cdots \times_{\mathfrak{S}_0} \mathfrak{S}_1$ есть слабая эквивалентность. Применяя предложение 2.2.9(c) к отображениям $\delta^{01}, \dots, \delta^{n-1,n}: [1] \rightarrow [n]$,

получаем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{S}^{(n)} & \xrightarrow{\psi^{(n)}} & \mathfrak{S}^{F[n]} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{S}^{(1)} \times_{\mathfrak{S}} \dots \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}^{(1)} & \xrightarrow{\psi^{(1)} \times \dots \times \psi^{(1)}} & \mathfrak{S}^{F[1]} \times_{\mathfrak{S}} \dots \times_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}^{F[1]}
 \end{array} \quad (2.3)$$

Мы хотим показать, что правая вертикальная стрелка — слабая эквивалентность, откуда условия Сигала получаются переходом к нулевым пространствам. Верхняя горизонтальная стрелка — слабая эквивалентность в силу предложения 2.2.9(b). Нижняя горизонтальная стрелка — эквивалентность в силу предложения 2.2.9(b) вместе с наблюдением, что $\mathfrak{S}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{F[1]} \rightarrow \mathfrak{S}$ являются расслоениями (мы воспользовались предложением 2.2.8 и следствием 3.1.5). Далее, поскольку левая вертикальная стрелка является биекцией, в то время как диаграмма (2.3) гомотопически коммутативна, правая вертикальная стрелка — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3».

Чтобы показать, что $\mathfrak{S}$ полно, нужно доказать, что $\delta_0: \mathfrak{S}_{heq} \rightarrow \mathfrak{S}_0$ — тривиальное расслоение (в силу леммы 1.4.5(b)). Поскольку $p_0: \mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S}$ — тривиальное расслоение в силу предложения 2.2.8(c), достаточно показать, что отображение $\psi := (\psi^{(1)})_0: (\mathfrak{S}^{(1)})_0 \rightarrow (\mathfrak{S}^{F[1]})_0 = \mathfrak{S}_1$ из предложения 2.2.9(b) индуцирует эквивалентность $(\mathfrak{S}^{(we)})_0 \rightarrow \mathfrak{S}_{heq}$.

Как $(\mathfrak{S}^{(we)})_0 \subset (\mathfrak{S}^{(1)})_0$, так и $\mathfrak{S}_{heq} \subset \mathfrak{S}_1$ являются объединениями компонент связности (в силу предложения 2.2.8(d) и п. 1.4.4(b)). Поскольку ψ — слабая эквивалентность, остается показать, что $\pi_0(\psi)$ индуцирует биекцию $\pi_0((\mathfrak{S}^{(we)})_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{S}_{heq})$.

Согласно предложению 2.2.9(c), имеется следующая гомотопически коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathfrak{S}^{(1)})_0 & \xleftarrow{\delta_{12}} & (\mathfrak{S}^{(3)})_0 & \xrightarrow{\delta_{02}, \delta_{13}} & (\mathfrak{S}^{(1)} \times \mathfrak{S}^{(1)})_0 & \xleftarrow{s_0 \times s_0} & \mathfrak{S}_0 \times \mathfrak{S}_0 \\
 \psi^{(1)} \downarrow & & \psi^{(3)} \downarrow & & \psi^{(1)} \times \psi^{(1)} \downarrow & & \parallel \\
 \mathfrak{S}_1 & \xleftarrow{\delta_{12}} & \mathfrak{S}_3 & \xrightarrow{\delta_{02}, \delta_{13}} & \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_1 & \xleftarrow{s_0 \times s_0} & \mathfrak{S}_0 \times \mathfrak{S}_0
 \end{array} \quad (2.4)$$

Напомним, что в лемме 1.4.5(a) мы ввели объединения компонент связности $\mathfrak{S}'_1 \subset \mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}'_3 \subset \mathfrak{S}_3$ и показали, что $\delta_{12}(\mathfrak{S}'_3) = \mathfrak{S}_{heq}$.

Аналогично определим $(\mathfrak{S}^{(1)})'_0 \subset (\mathfrak{S}^{(1)})_0$ как объединение компонент связности, пересекающихся с $s_0(\mathfrak{S}_0)$, и положим $(\mathfrak{S}^{(3)})'_0 := \delta_{02}^{-1}((\mathfrak{S}^{(1)})'_0) \cap \delta_{13}^{-1}((\mathfrak{S}^{(1)})'_0) \subset (\mathfrak{S}^{(3)})_0$.

Мы утверждаем, что $\delta_{12}((\mathfrak{S}^{(3)})'_0) = (\mathfrak{S}^{(we)})_0$. Действительно, поскольку $s_0(\mathfrak{S}_0) \subset \mathfrak{S}^{(we)}$, из предложения 2.2.8(d) следует, что $\delta_{02}(\tilde{\phi}), \delta_{13}(\tilde{\phi}) \in \mathfrak{S}^{(we)}$ для любого $\tilde{\phi} \in (\mathfrak{S}^{(3)})'_0$. Иными словами, если $\tilde{\phi}$ соответствует диаграмме $E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} E^{(1)} \xrightarrow{\phi_2} E^{(2)} \xrightarrow{\phi_3} E^{(3)}$, то $\phi_2 \circ \phi_1$ и $\phi_3 \circ \phi_2$ — слабые эквивалентности. Поэтому ϕ_2 имеет левое и правое гомотопически обратные. Следовательно, ϕ_2 — слабая эквивалентность, так что $\phi_2 = \delta_{12}(\tilde{\phi}) \in \mathfrak{S}^{(we)}$.

Обратно, каждому $\phi \in \mathfrak{S}^{(we)}$ соответствует гомотопическая эквивалентность $\phi: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$ (по лемме 1.3.11(b)), так что существует диаграмма $\tilde{\phi}: E^{(1)} \xrightarrow{\phi'} E^{(2)}$

$E^{(0)} \xrightarrow{\phi} E^{(1)} \xrightarrow{\phi'} E^{(0)}$, такая, что $\phi' \circ \phi \sim \text{Id}_{E^{(0)}}$ и $\phi \circ \phi' \sim \text{Id}_{E^{(1)}}$. По определению $\tilde{\phi}$ соответствует элементу из $(\mathfrak{S}^{(3)})'_0$ и $\delta_{12}(\phi) = \phi$.

Теперь мы можем доказать утверждение теоремы. Поскольку $\psi^{(3)}$ — слабая эквивалентность, индуцированное отображение $\pi_0((\mathfrak{S}^{(3)})_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{S}_3)$ является биекцией. Далее, пользуясь определениями $(\mathfrak{S}^{(3)})'_0$ и $\mathfrak{S}'_3$ и гомотопической коммутативностью среднего и правого внутренних квадратов диаграммы (2.4), видим, что $\psi^{(3)}$ индуцирует биекцию $\pi_0((\mathfrak{S}^{(3)})'_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{S}'_3)$. Наконец, поскольку $\mathfrak{S}_{\text{heq}} = \delta_{12}(\mathfrak{S}'_3)$, $(\mathfrak{S}^{(we)})_0 = \delta_{12}((\mathfrak{S}^{(3)})'_0)$ и левый внутренний квадрат диаграммы (2.4) гомотопически коммутативен, $\psi^{(1)}$ индуцирует биекцию $\pi_0((\mathfrak{S}^{(we)})_0) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{S}_{\text{heq}})$. $\square$

2.3. Вложение Йонеды.

2.3.1. Противоположное симплициальное пространство. (а) Для любого отображения $\tau: [n] \rightarrow [m]$ в Δ обозначим через $\iota(\tau): [n] \rightarrow [m]$ отображение $\iota(\tau)(n-i) := m - \tau(i)$. Тогда ι определяет функтор $\Delta \rightarrow \Delta$, а значит, и функтор $\iota^*: sSp = \text{Hom}(\Delta^{op}, Sp) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^{op}, Sp) = sSp$.

(б) Для любого $X \in sSp$ положим $X^{op} := \iota^*(X) \in sSp$. Явным образом, $(X^{op})_n = X_n$ для всех n , и для любого $\tau: [n] \rightarrow [m]$ отображение $\tau^*: (X^{op})_m \rightarrow (X^{op})_n$ — это отображение $\iota(\tau)^*: X_m \rightarrow X_n$.

(с) Заметим, что если X — (полное) пространство Сигала, то таково же и X^{op} и имеется равенство гомотопических категории $\text{Ho}(X^{op}) = (\text{Ho } X)^{op}$. Поэтому назовем X^{op} *противоположным симплициальным пространством*.

2.3.2. Скрученная категория стрелок. (а) Рассмотрим функтор $\mu: \Delta \rightarrow \Delta$, такой, что $\mu([n]) = [2n+1]$ и для любого $\tau: [n] \rightarrow [m]$ из Δ отображение $\mu(\tau): [2n+1] \rightarrow [2m+1]$ определено формулами $\mu(\tau)(n-i) := m - \tau(i)$ и $\mu(\tau)(n+1+j) = (m+1+\tau(j))$ при $i, j = 0, \dots, n$.

(б) Для любого $X \in sSp$ определим симплициальное пространство $\mathcal{M}(X) := \mu^*(X) \in sSp$. Явным образом, $\mathcal{M}(X)_n = X_{2n+1}$ для всех n и для любого $\tau: [n] \rightarrow [m]$ отображение $\tau^*: \mathcal{M}(X)_m \rightarrow \mathcal{M}(X)_n$ — это отображение $\mu(\tau)^*: X_{2m+1} \rightarrow X_{2n+1}$.

(с) Имеются естественные морфизмы $\iota \rightarrow \mu$ и $\text{Id} \rightarrow \mu$ функторов $\text{Hom}(\Delta, \Delta)$, которые соответствуют отображениям $e^0: [n] \rightarrow [2n+1]$ и $e^{n+1}: [n] \rightarrow [2n+1]$ соответственно. Эти отображения соответствуют морфизму $\pi_X: \mathcal{M}(X) \rightarrow X^{op} \times X$ в sSp .

2.3.3. Замечания. (а) Заметим, что категория Δ эквивалентна категории Δ' конечных линейно упорядоченных множеств, а функторы $\iota, \mu: \Delta \rightarrow \Delta$ соответствуют функторам $\iota, \mu: \Delta' \rightarrow \Delta'$, определенным формулами $\iota(P) = P^{op}$ и $\mu(P) = P^{op} * P$, «соединение» P^{op} и P .

(б) Можно показать (пользуясь леммой 2.3.4 и 2.1.4(b)), что если X — (полное) пространство Сигала, то $\mathcal{M}(X)$ — также (полное) пространство Сигала. В этом случае пространство объектов $\mathcal{M}(X)_0$ совпадает с пространством морфизмов X_1 и для любых $\alpha: x \rightarrow y$ и $\alpha': x' \rightarrow y'$ из $\mathcal{M}(X)_0 = X_1$ пространство отображений $\text{par } \mathcal{M}(X)(\alpha, \alpha')$ можно интуитивно понимать как пространство троек (β, β', γ) , где $\beta: x' \rightarrow x$ и $\beta': y \rightarrow y'$ принадлежат X_1 , а γ — путь, соединяющий $\beta' \circ \alpha \circ \beta$ и α' .

Начиная с этого места, в данном параграфе всегда предполагается, что X — пространство Сигала.

2.3.4. Лемма. *Отображение $\pi_X: \mathcal{M}(X) \rightarrow X^{op} \times X$ — левое расслоение.*

Доказательство. Чтобы показать, что π_X — расслоение, нужно проверить, что индуцированное отображение

$$\mathcal{M}(X)_n \rightarrow \mathcal{M}(X)_{\partial n} \times_{(X^{op} \times X)_{\partial n}} (X^{op} \times X)_n \quad (2.5)$$

является расслоением для любого $n \geq 0$. Напомним, что $\mathcal{M}(X)_n = X_{2n+1} = \text{Мар}(F[2n+1], X)$. Поскольку $\partial F[n] = \bigcup_{i=0}^n d^i F[n-1]$, получаем, что $\mathcal{M}(X)_{\partial n} = \text{Мар}(F[2n+1]', X)$, где $F[2n+1]' \subset F[2n+1]$ — объединение $\bigcup_{i=0}^n d^{i, 2n+1-i}(F[2n-1]) \subset F[2n+1]$. Таким образом, морфизм (2.5) можно отождествить с морфизмом

$$\text{Мар}(F[2n+1], X) \rightarrow \text{Мар}(F[2n+1]' \sqcup_{(e^0 \partial F[n] \cup e^{n+1} \partial F[n])} (e^0 F[n] \cup e^{n+1} F[n]), X).$$

Поскольку $F[2n+1]' \cap (e^0 F[n] \cup e^{n+1} F[n]) = e^0 \partial F[n] \cup e^{n+1} \partial F[n] \subset F[2n+1]$, естественное отображение $F[2n+1]' \sqcup_{(e^0 \partial F[n] \cup e^{n+1} \partial F[n])} (e^0 F[n] \cup e^{n+1} F[n]) \rightarrow F[2n+1]$ является корасслоением. Так как X фибрантно, то отображение (2.5) — расслоение.

Остается показать, что расслоение $\mathcal{M}(X)_n \rightarrow \mathcal{M}(X)_0 \times_{(X^{op} \times X)_0} (X^{op} \times X)_n$, или, что эквивалентно, $X_{2n+1} \rightarrow X_n \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_n$, — слабая эквивалентность. Поскольку X — пространство Сигала, так что и композиция

$$X_{2n+1} \rightarrow X_n \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} X_n \rightarrow (X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1) \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} (X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1),$$

и второй морфизм являются тривиальными расслоениями, это следует из свойства «2 из 3». $\square$

2.3.5. Замечание. Из леммы 2.3.4 и леммы 2.1.2(а) следует, что левое расслоение π_X индуцирует левое расслоение $\{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X) \rightarrow X$ для любого $x \in X$. Заметим, что $(\{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X))_0 = \{x\} \times_{X_0} X_1 = (x \setminus X)_0$.

2.3.6. Лемма. *Пусть X — пространство Сигала и $x \in X$. Существует слабая эквивалентность $\tilde{\phi}: x \setminus X \rightarrow \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X)$ левых расслоений над X , такая, что $\tilde{\phi}(\text{id}_x) \sim \text{id}_x$.*

Доказательство. Достаточно построить гомотопическую эквивалентность $\psi: \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X) \rightarrow x \setminus X$ над X , такую, что $\psi(\text{id}_x) \sim \text{id}_x$, и взять в качестве $\tilde{\phi}$ ее гомотопически обратную.

Чтобы построить ψ , мы построим симплициальное пространство $\widetilde{x \setminus X}$ над X и отображения $\psi': \widetilde{x \setminus X} \rightarrow x \setminus X$ и $\psi'': \widetilde{x \setminus X} \rightarrow \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X)$ над X , такие, что $(\widetilde{x \setminus X})_0 = (x \setminus X)_0$, $\psi'_0 = \psi''_0 = \text{Id}$, а ψ' — тривиальное корасслоение. Поскольку $x \setminus X \rightarrow X$ — расслоение, отображение ψ'' расширяется до отображения $\psi: \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X) \rightarrow x \setminus X$ над X .

В этом случае $\psi_0 = \text{Id}$ должно быть слабой эквивалентностью, так что ψ будет слабой эквивалентностью по лемме 2.1.5, а значит, и гомотопической эквивалентностью по лемме 1.3.11(b).

Для любого отображения $\tau: [n] \rightarrow [m]$ обозначим через τ' отображение $[n+1] \rightarrow [m+1]$ определенное формулами $\tau'(0) = 0$ и $\tau'(i+1) = \tau(i) + 1$ для всех $i = 0, \dots, n$. Рассмотрим $\widetilde{x \setminus X} \in sSp$, такое, что $(\widetilde{x \setminus X})_n := \{x\} \times_{X_0, \delta_0} X_{n+1}$ и для любого τ отображение $\tau^*: (\widetilde{x \setminus X})_m \rightarrow (\widetilde{x \setminus X})_n$ индуцировано отображением $\tau'^*: X_{m+1} \rightarrow X_{n+1}$.

Заметим, что проекции $e_1: X_{n+1} \rightarrow X_n$ индуцируют проекцию $\widetilde{x \backslash X} \rightarrow X$. Далее, отображения $[n] \times [1] \rightarrow [n+1]: (i, j) \mapsto (i+j)j$ индуцируют отображения $F[n] \times F[1] \rightarrow F[n+1]$ и

$$p_n: X_{n+1} = \text{Map}(F[n+1], X) \rightarrow \text{Map}(F[n] \times F[1], X) = (X^{F[1]})_n.$$

Кроме того, отображения p_n индуцируют отображение $\psi': \widetilde{x \backslash X} \rightarrow x \backslash X$ над X .

Наконец, отображения $r: [2n+1] \rightarrow [n+1]$, определенные формулами $r(i) = 0$ и $r(i+n+1) = i+1$ для всех $i = 0, \dots, n$, индуцируют отображения $X_{n+1} \rightarrow X_{2n+1}$ и задают отображение $\psi'': x \backslash X \rightarrow \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X)$ над X , которое, как мы утверждаем, является тривиальным корасслоением.

Нам нужно доказать, что $\psi''_n: \{x\} \times_{X_0} X_{n+1} \rightarrow \{x\} \times_{X_n} X_{2n+1}$ — тривиальное корасслоение для всех n . Поскольку X — пространство Сигала, естественное отображение $X_{2n+1} \rightarrow X_n \times_{X_0} X_{n+1}$ есть тривиальное расслоение, публэк $\pi_n: \{x\} \times_{X_n} X_{2n+1} \rightarrow \{x\} \times_{X_0} X_{n+1}$ которого — тривиальное расслоение, удовлетворяющее соотношению $\pi_n \circ \psi''_n = \text{Id}$. Поэтому $\psi''_n: \{x\} \times_{X_0} X_{n+1} \rightarrow \{x\} \times_{X_n} X_{2n+1}$ — тривиальное корасслоение в силу свойства «2 из 3», что и завершает доказательство. $\square$

2.3.7. Вложение Йонеды. Зафиксируем бесконечное множество $\mathcal{U}$ и положим $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$.

(а) Для любого $X \in sSp_{\mathcal{U}}$ положим $\mathfrak{P}(X) := \mathfrak{S}^{X^{op}}$. Поскольку $\mathfrak{S}$ — полное пространство Сигала, $\mathfrak{P}(X)$ также есть полное пространство Сигала (в силу 1.4.6), и мы назовем его ∞ -категорией симплициальных предпучков на X .

(б) По определению пространства $\mathfrak{S}$ для любого пространства Сигала X левому расслоению $\pi_X: \mathcal{M}(X) \rightarrow X^{op} \times X$ соответствует морфизм $X^{op} \times X \rightarrow \mathfrak{S}$, а значит, и морфизм $j_X: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$. Назовем j_X *вложением Йонеды* пространства X .

(с) Для любых $x \in X$ и $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ рассмотрим $\alpha(x) \in \mathfrak{S}$ и обозначим через $E_{\alpha(x)} \rightarrow \text{pt}$ соответствующее левое расслоение.

2.3.8. Пример. По определению для любого $x \in X$ элемент $j_X(x) \in \mathfrak{P}(X) = \mathfrak{S}^{X^{op}}$ соответствует левому расслоению $\mathcal{M}(X) \times_X \{x\} = \{x\} \times_X \mathcal{M}(X^{op}) \rightarrow X^{op}$.

2.3.9. Теорема. Пусть X — пространство Сигала, $x \in X$ и $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$.

(а) Имеется «естественная» слабая эквивалентность $\text{map}_{\mathfrak{P}(X)}(j_X(x), \alpha) \rightarrow (E_{\alpha(x)})_0$.

(б) Вложение Йонеды $j_X: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ является вполне строгим (см. 1.4.2(d)).

Сначала введем некоторые обозначения.

2.3.10. Универсальное левое расслоение над X^{op} . (а) Пусть $\tilde{E} \rightarrow X^{op} \times \mathfrak{P}(X)$ — левое расслоение, соответствующее естественному отображению $\text{ev}_{X^{op}}: X^{op} \times \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{S}$. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ публэк $\tilde{E}_{\alpha} := \tilde{E} \times_{\mathfrak{P}(X)} \{\alpha\}$ есть левое расслоение над X^{op} , соответствующее α . В частности, для любого $x \in X$ его слой $(\tilde{E}_{\alpha})_x$ есть левое расслоение $E_{\alpha(x)} \rightarrow \text{pt}$, соответствующее $\alpha(x) \in \mathfrak{S}$ (см. 2.3.7(c)).

(б) Для любого $x \in X^{op}$ положим $\tilde{E}_x := \{x\} \times_{X^{op}} \tilde{E}$. Тогда $\tilde{E}_x \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ — левое расслоение, такое, что $(\tilde{E}_x)_{\alpha} = E_{\alpha(x)}$ для любого $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ (в силу (а)). Для любого $y \in X$ имеет место равенство $(\tilde{E}_x)_{j_X(y)} = E_{j_X(y)(x)}$, так что

$((\tilde{E}_x)_{j_X(y)})_0 = \text{map}_X(x, y)$. В частности, имеется элемент $\text{id}_x \in \text{map}_X(x, x)$ из $(\tilde{E}_x)_{j_X(x)}$.

(с) По определению отображение $X^{op} \times X \rightarrow \mathfrak{S}$, соответствующее левому расслоению $\pi_X: \mathcal{M}(X) \rightarrow X^{op} \times X$, представляется в виде композиции отображений $\text{Id} \times j_X: X^{op} \times X \rightarrow X^{op} \times \mathfrak{P}(X)$ и $\text{ev}_{X^{op}}$. Поэтому $\mathcal{M}(X) = \tilde{E} \times_{\mathfrak{P}(X)} X$, так что $\tilde{E}_x \times_{\mathfrak{P}(X)} X = \{x\} \times_{X^{op}} \mathcal{M}(X)$.

2.3.11. Замечания. Гомотопическая эквивалентность $\psi^{(1)}: \mathfrak{S}^{F[1]} \rightarrow \mathfrak{S}^{(1)}$ над $\mathfrak{S}^2$ из предложения 2.2.9(b) индуцирует гомотопическую эквивалентность из $\mathfrak{P}(X)^{F[1]} = (\mathfrak{S}^{F[1]})^{X^{op}}$ в $\mathfrak{P}(X)^{(1)} := (\mathfrak{S}^{(1)})^{X^{op}}$ над $\mathfrak{P}(X)^2$. Поэтому для любого $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ она индуцирует гомотопическую эквивалентность $\psi_\alpha: \alpha \backslash \mathfrak{P}(X) \rightarrow (\alpha \backslash \mathfrak{P}(X))' := \{\alpha\} \times_{\mathfrak{P}(X)} \mathfrak{P}(X)^{(1)}$ над $\mathfrak{P}(X)$. Тогда в силу предложения 2.2.9(c) имеем $\psi_\alpha(\text{id}_\alpha) \sim \text{id}_\alpha$.

2.3.12. Лемма. Для любого $x \in X$ существует слабая эквивалентность $\phi: j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X) \rightarrow \tilde{E}_x$ левых расслоений над $\mathfrak{P}(X)$, такая, что $\phi(\text{id}_{j_X(x)}) \sim \text{id}_x \in (\tilde{E}_x)_{j_X(x)}$.

Доказательство. Построим ϕ как композицию трех слабых эквивалентностей над $\mathfrak{P}(X)$:

$$j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X) \xrightarrow{\phi'''} (j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X))' \xrightarrow{\phi''} ((x \backslash X^{op}) \backslash \mathfrak{P}(X))' \xrightarrow{\phi'} \tilde{E}_x.$$

По определению, если $\alpha: K \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ соответствует левому расслоению $G \rightarrow X^{op} \times K$, то отображения $K \rightarrow ((x \backslash X^{op}) \backslash \mathfrak{P}(X))'$ над α находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями $\nu: (x \backslash X^{op}) \times K \rightarrow G$ над $X^{op} \times K$, в то время как отображения $K \rightarrow (j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X))'$ над α находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями $\nu': (\{x\} \times_X \mathcal{M}(X^{op})) \times K \rightarrow G$ над $X^{op} \times K$ (мы воспользовались 2.3.8).

Пусть $\tilde{\phi}: x \backslash X^{op} \rightarrow \{x\} \times_X \mathcal{M}(X^{op})$ — гомотопическая эквивалентность из леммы 2.3.6; определим ϕ'' как отображение, которое переводит ν' в $\nu' \circ \tilde{\phi}$. Тогда ϕ'' — гомотопическая эквивалентность, потому что таково $\tilde{\phi}$.

Далее заметим, что отображения $K \rightarrow \tilde{E}_x$ над $\alpha: K \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с сечениями s левого расслоения $G_x := \{x\} \times_{X^{op}} G \rightarrow K$. Определим ϕ' как отображение, переводящее $\nu: (x \backslash X^{op}) \times K \rightarrow G$ в $s := \nu|_{\text{id}_x}: K \rightarrow G_x$.

Поскольку ϕ' — отображение левых расслоений, чтобы доказать, что ϕ' — слабая эквивалентность, остается показать, что для любого $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ индуцированное отображение $(\phi'_\alpha)_0$ есть слабая эквивалентность симплициальных множеств (по лемме 2.1.5). Пусть $G \rightarrow X^{op}$ — левое расслоение, соответствующее α . Тогда $(\phi'_\alpha)_0$ — это тривиальное расслоение $\text{ev}_{\text{id}_x}: \text{Map}_{X^{op}}(x \backslash X^{op}, G) \rightarrow (G_x)_0$ из предложения 2.1.7.

Наконец, определим $\phi''': j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X) \rightarrow (j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X))'$ как слабую эквивалентность из 2.3.11 и положим $\phi := \phi' \circ \phi'' \circ \phi'''$. По построению $\phi'''(\text{id}_{j_X(x)}) \sim \text{id}_{j_X(x)}$, $\phi''(\text{id}_{j_X(x)}) = \tilde{\phi}$ и $\phi'(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(\text{id}_x) \sim \text{id}_x$. Следовательно, $\phi(\text{id}_{j_X(x)}) \sim \text{id}_x$. $\square$

Теперь мы готовы доказать лемму Йонеды.

Доказательство теоремы 2.3.9. (a) Согласно лемме 2.3.12, существует гомотопическая эквивалентность $\phi: j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X) \rightarrow \tilde{E}_x$ левых расслоений над $\mathfrak{P}(X)$, такая, что $\phi(\text{id}_{j_X(x)}) \sim \text{id}_x$. Поскольку для любого $\alpha \in \mathfrak{P}(X)$ слой расслоения $\tilde{E}_x$ в точке α есть $E_{\alpha(x)}$ (см. 2.3.10(b)), ϕ индуцирует гомотопическую эквивалентность $\phi_\alpha: \text{мар}_{\mathfrak{P}(X)}(j_X(x), \alpha) \rightarrow (E_{\alpha(x)})_0$.

(b) Морфизм $j_X: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ индуцирует морфизм $x \backslash X \rightarrow j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X)$. Поэтому j_X индуцирует морфизм $\psi: x \backslash X \rightarrow j_X(x) \backslash \mathfrak{P}(X) \times_{\mathfrak{P}(X)} X$ левых расслоений над X . Утверждается, что ψ — слабая эквивалентность, так что она индуцирует слабую эквивалентность слоев $\psi_b: \text{мар}_X(a, b) \rightarrow \text{мар}_{\mathfrak{P}(X)}(j_X(a), j_X(b))$ для всех $b \in X$.

Рассмотрим композицию $\phi \circ \psi: x \backslash X \rightarrow \tilde{E}_x \times_{\mathfrak{P}(X)} X$, где ϕ такой же, как и в доказательстве п. (a). Поскольку $\tilde{E}_x \times_{\mathfrak{P}(X)} X = \{x\} \times_{X \text{ op } \mathcal{M}(X)} X$ (см. 2.3.10(c)), $\phi \circ \psi$ — это отображение $x \backslash X \rightarrow \{x\} \times_{X \text{ op } \mathcal{M}(X)} X$ над X , которое по построению удовлетворяет соотношению $\phi \circ \psi(\text{id}_x) \sim \text{id}_x$. Поэтому $\phi \circ \psi$ — слабая эквивалентность в силу следствия 2.1.8 и леммы 2.3.6, так что ψ — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3». $\square$

§3. Квазирасслоения симплициальных пространств

3.1. Определения и основные свойства.

3.1.1. Определение. Пусть $\mathcal{C}$ — правильная справа модельная категория. Будем говорить, что морфизм $p: X \rightarrow B$ в $\mathcal{C}$ является *квазирасслоением*, если для любой слабой эквивалентности $g: Y \rightarrow Z$ над B ее пулбэк $p^*(g): p^*(Y) \rightarrow p^*(Z)$ (см. 1.1.1(d)) — слабая эквивалентность над X .

3.1.2. Замечания. (a) По определению произвольный пулбэк квазирасслоения есть квазирасслоение и композиция квазирасслоений — также квазирасслоение.

(b) В случае когда $\mathcal{C}$ — модельная категория топологических пространств, наше понятие квазирасслоения сильнее, чем классическое. Однако мы будем использовать это понятие только для модельных категорий пространств и симплициальных пространств, где классического понятия не существует.

(c) После того, как эта статья была по существу уже написана, мы обнаружили, что квазирасслоения изучал также Резк в неопубликованном препринте [8], где они называются *острыми* (sharp) морфизмами. Наша терминология кажется нам более содержательной.

3.1.3. Лемма. (a) Каждое расслоение из $\mathcal{C}$ является квазирасслоением.

(b) Пусть $f: X \rightarrow X'$ — слабая эквивалентность квазирасслоений $p: X \rightarrow B$ и $p': X' \rightarrow B$ над B . Тогда для любого морфизма $\tau: A \rightarrow B$ пулбэк $\tau^*(f): X \times_B A \rightarrow X' \times_B A$ является слабой эквивалентностью.

(c) Обратно, предположим, что $f: X \rightarrow X'$ — слабая эквивалентность над B , такая, что каждый пулбэк $\tau^*(f)$ является слабой эквивалентностью. Тогда $p: X \rightarrow B$ является квазирасслоением в том и только в том случае, когда $p': X' \rightarrow B$ — квазирасслоение.

Доказательство. Утверждение (a) следует из того факта, что $\mathcal{C}$ правильна справа.

(b) Если $\tau: A \rightarrow B$ — расслоение, то $\tau^*(g)$ — слабая эквивалентность в силу п. (a). Если τ — слабая эквивалентность, то $\tau^*(X) \rightarrow X$ и $\tau^*(X') \rightarrow X'$ — слабые эквивалентности, потому что $X \rightarrow B$ и $X' \rightarrow B$ являются квазирасслоениями. Поэтому $\tau^*(f): \tau^*(X) \rightarrow \tau^*(X')$ — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3». Поскольку каждый морфизм разлагается в композицию тривиального корасслоения и расслоения, отсюда следует и общий случай.

(c) Пусть $g: Y \rightarrow Z$ — слабая эквивалентность над B . Тогда $X \times_B Y \rightarrow X' \times_B Y$ и $X \times_B Z \rightarrow X' \times_B Z$ — слабые эквивалентности в силу предположения относительно f . Поэтому в силу свойства «2 из 3» $p^*(g): X' \times_B Y \rightarrow X' \times_B Z$ является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда $p^*(g)$ — слабая эквивалентность. Таким образом, по определению $p: X \rightarrow B$ является квазирасслоением тогда и только тогда, когда $p': X' \rightarrow B$ — квазирасслоение. $\square$

3.1.4. Следствие. *Предположим, что модельная категория $\mathcal{C}$ обладает тем свойством, что пулбэк корасслоения является корасслоением, и пусть $p': X' \rightarrow B$ — фибрантная замена отображения $p: X \rightarrow B$. Тогда p является квазирасслоением в том и только в том случае, когда $\tau^*(p')$ — фибрантная замена отображения $\tau^*(p)$ для любого $\tau: A \rightarrow B$.*

Доказательство. Согласно аксиоме CM5, p разлагается в композицию $X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p'} B$, где i — тривиальное корасслоение, а p — расслоение. Тогда для любого отображения $\tau: A \rightarrow B$ отображение $\tau^*(p')$ есть расслоение, в то время как $\tau^*(i)$ — корасслоение. Таким образом, нужно доказать, что $X \rightarrow B$ является квазирасслоением тогда и только тогда, когда каждое $\tau^*(i)$ — слабая эквивалентность. Поскольку $p': X' \rightarrow B$ — квазирасслоение по лемме 3.1.3(a), нужное утверждение следует из леммы 3.1.3(b),(c). $\square$

3.1.5. Следствие. *Пусть дана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Z' & \xleftarrow{g'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z & \xleftarrow{g} & Y \end{array}$$

где g и g' — квазирасслоения и все вертикальные морфизмы — слабые эквивалентности. Тогда индуцированное отображение $X' \times_{Z'} Y' \rightarrow X \times_Y Z$ — слабая эквивалентность.

Доказательство. Слабая эквивалентность $Y' \rightarrow Y$ разлагается в композицию отображений $Y' \rightarrow Z' \times_Z Y \rightarrow Y$, второе из которых — слабая эквивалентность, потому что оно является пулбэком слабой эквивалентности $Z' \rightarrow Z$ вдоль квазирасслоения $Y \rightarrow Z$. Поэтому в силу свойства «2 из 3» $Y' \rightarrow Z' \times_Z Y$ — слабая эквивалентность квазирасслоений над Z' .

Теперь отображение $X' \times_{Z'} Y' \rightarrow X \times_Y Z$ разлагается в композицию отображений

$$X' \times_{Z'} Y' \rightarrow X' \times_{Z'} (Z' \times_Z Y) = X' \times_Z Y \rightarrow X \times_Z Y,$$

первое из которых является слабой эквивалентностью как пулбэк слабой эквивалентности квазирасслоений (мы воспользовались леммой 3.1.3(b)), в то время как второе есть слабая эквивалентность, потому что $Y \rightarrow Z$ — квазирасслоение, а $X' \rightarrow X$ — слабая эквивалентность. $\square$

Начиная с этого места, предположим, что $\mathcal{C}$ — либо категория Spr с модельной структурой Кана (теорема 1.2.6), либо категория $sSpr$ с модельной структурой Риди (теорема 1.3.6).

3.1.6. Лемма. Пусть $X_B \rightarrow B$ — квазиасслоение в $sSpr$, $A \rightarrow B$ — корасслоение, а $i: X_A := X_B \times_B A \rightarrow Y_A$ — слабая эквивалентность квазиасслоений над A . Тогда пушаут $Y_B := X_B \sqcup_{X_A} Y_A$ — квазиасслоение над $B \sqcup_A A = B$, а естественное отображение $j: X_B \rightarrow Y_B$ — слабая эквивалентность.

Доказательство. Поскольку $X_B \rightarrow B$ — квазиасслоение, достаточно показать, что для любого отображения $\tau: B' \rightarrow B$ пулбэк $\tau^*(j)$ является слабой эквивалентностью (по лемме 3.1.3(c)).

Заметим, что $\tau^*(j)$ — пушаут отображения $\tau^*(i): \tau^*(X_A) \rightarrow \tau^*(Y_A)$ вдоль $\tau^*(X_A) \rightarrow \tau^*(X_B)$. Поскольку $A \rightarrow B$ — корасслоение, индуцированные отображения $X_A \rightarrow X_B$ и $\tau^*(X_A) \rightarrow \tau^*(X_B)$ являются корасслоениями. Так как i — слабая эквивалентность квазиасслоений, то $\tau^*(i)$ — слабая эквивалентность по лемме 3.1.3(b). Поэтому пушаут $\tau^*(j)$ — слабая эквивалентность, ибо категория $sSpr$ правильна слева. $\square$

3.1.7. Лемма. Морфизм $p: X \rightarrow B$ является квазиасслоением в $sSpr$ тогда и только тогда, когда $p_n: X_n \rightarrow B_n$ — квазиасслоение в Spr для любого n .

Доказательство. Заметим, что если p_n — квазиасслоение для всех n , то для любой слабой эквивалентности $g: Y \rightarrow Z$ над B соответствующие отображения $g_n: Y_n \rightarrow Z_n$ являются слабыми эквивалентностями над B_n для всех n . Поэтому каждое $p^*(g)_n = p_n^*(g_n)$ — слабая эквивалентность, ибо p_n — квазиасслоение. Следовательно, $p^*(g)$ есть слабая эквивалентность, так что p — квазиасслоение.

Обратно, предположим, что p — квазиасслоение. Каждая слабая эквивалентность $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$ над B_n определяет слабую эквивалентность $g := \tilde{g} \times \text{Id}_{F[n]}: \tilde{Y} \times F[n] \rightarrow \tilde{Z} \times F[n]$ над $B \times F[n]$, такую, что $\tilde{g}$ — сужение отображения g_n на $\text{Id}_{F[n]} \in F[n]_n$. Так как p — квазиасслоение, то пулбэк $p^*(g)$ — слабая эквивалентность над $X \times F[n]$. Таким образом, $p_n^*(\tilde{g}) = (p^*(g)_n)_{\text{Id}_{F[n]}}$ — слабая эквивалентность, откуда следует, что p_n — квазиасслоение. $\square$

3.1.8. Определение. Отображение $f: X \rightarrow B$ в $sSpr$ называется *левым квазиасслоением*, если f — квазиасслоение и морфизм $X_n \rightarrow X_0 \times_{B_0} B_n$, индуцированный включением $\delta^0: [0] \hookrightarrow [n]$, — слабая эквивалентность для всех n .

3.1.9. Замечание. Из леммы 2.1.3(c) следует, что расслоение $f: X \rightarrow B$ в $sSpr$ есть левое расслоение тогда и только тогда, когда оно является левым квазиасслоением.

3.1.10. Лемма. Пусть задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{h} & B \end{array} \quad (3.1)$$

в $sSpr$, где g и h — слабые эквивалентности, а f и f' — квазиасслоения. Квазиасслоение f является левым тогда и только тогда, когда левым является f' .

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму, индуцированную диаграммой (3.1):

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \xrightarrow{g_n} & X_n \\ p'_n \downarrow & & \downarrow p_n \\ X'_0 \times_{B'_0} B'_n & \xrightarrow{g_0 \times_{h_0} h_n} & X_0 \times_{B_0} B_n. \end{array}$$

Нам нужно доказать, что p_n является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда слабой эквивалентностью является p'_n . Поскольку g — слабая эквивалентность, достаточно показать, что $g_0 \times_{h_0} h_n$ — слабая эквивалентность.

Согласно лемме 3.1.7, отображения $X_0 \rightarrow B_0$ и $X'_0 \rightarrow B'_0$ являются квазирасслоениями. Поэтому $g_0 \times_{h_0} h_n$ — слабая эквивалентность по предположению и в силу следствия 3.1.5. $\square$

3.1.11. Следствие. *Фибрантная замена левого квазирасслоения есть левое расслоение.*

Доказательство. Применим лемму 3.1.10 и замечание 3.1.9 в случае, когда $B' = B$, а f — фибрантная замена квазирасслоения f' . $\square$

3.2. Продолжение расслоений и фибрантные замены.

3.2.1. Лемма. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} Y_A & \longrightarrow & X_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

в sSp , такая, что вертикальные стрелки — расслоения, горизонтальные стрелки — корасслоения, а индуцированное отображение $Y_A \rightarrow X_A := X_B \times_B A$ — тривиальное корасслоение, и пусть Y_B — наибольшее симплициальное подпространство в X_B , такое, что $Y_B \times_B A = Y_A$.

Тогда $Y_B \subset X_B$ — сильный деформационный ретракт над B . В частности, $Y_B \rightarrow B$ — расслоение, а включение $i: Y_B \hookrightarrow X_B$ — тривиальное корасслоение.

Доказательство. Рассмотрим симплициальное подпространство $Y_B \subset X_B$, у которого $(Y_B)_{n,m}$ — множество всех $\tau \in (X_B)_{n,m} = \text{Hom}(\square[n, m], X_B)$, таких, что $\tau(\tau^{-1}(X_A)) \subset Y_A$. Тогда $Y_B \subset X_B$ — наибольшее подпространство, такое, что $Y_B \times_B A = Y_A$. По построению для любого морфизма $C \rightarrow B$ множество $\text{Hom}_B(C, Y_B)$ можно отождествить с множеством отображений $f \in \text{Hom}_B(C, X_B)$, таких, что $f(C \times_B A) \subset Y_A$.

Так как $Y_A \hookrightarrow X_A$ — тривиальное корасслоение расслоений над A , то $Y_A \subset X_A$ — сильный деформационный ретракт над A (см. 1.3.10(c)). Таким образом, существует отображение $g: X_A \times \Delta[1] \rightarrow X_A$ над A , такое, что (i) $g|_{X_A \times \{0\}} = \text{Id}_{X_A}$, (ii) $g(X_A \times \{1\}) \subset Y_A$ и (iii) $g|_{Y_A \times \Delta[1]} = \text{pr}_1: Y_A \times \Delta[1] \rightarrow Y_A \subset X_A$.

Поскольку $Y_B \cap X_A = Y_A$, из свойства (iii) отображения g следует, что оно расширяется до отображения $g': (X_A \sqcup_{Y_A} Y_B) \times \Delta[1] \rightarrow X_B$ над B , такого, что $g'|_{Y_B \times \Delta[1]} = \text{pr}_1$. Далее, из свойства (i) отображения g следует, что g' расширяется до морфизма

$$g'': ((X_A \sqcup_{Y_A} Y_B) \times \Delta[1]) \sqcup_{(X_A \sqcup_{Y_A} Y_B) \times \{0\}} (X_B \times \{0\}) \rightarrow X_B$$

над B , такого, что $g''|_{X_B \times \{0\}} = \text{Id}_{X_B}$.

Поскольку $\{0\} \hookrightarrow \Delta[1]$ — тривиальное корасслоение, а модельная категория sSp декартова, заключаем, что

$$((X_A \sqcup_{Y_A} Y_B) \times \Delta[1]) \sqcup_{(X_A \sqcup_{Y_A} Y_B) \times \{0\}} (X_B \times \{0\}) \hookrightarrow X_B \times \Delta[1]$$

— тривиальное корасслоение, так что g'' расширяется до отображения $h: X_B \times \Delta[1] \rightarrow X_B$ над B .

Тогда h удовлетворяет соотношениям $h|_{X_B \times \{0\}} = g''|_{X_B \times \{0\}} = \text{Id}_{X_B}$, $h|_{Y_B \times \Delta[1]} = g'|_{Y_B \times \Delta[1]} = \text{pr}_1$ и $h(X_A \times \{1\}) = g(X_A \times \{1\}) \subset Y_A$. Таким образом, в силу конструкции пространства Y_B получаем, что $h(X_B \times \{1\}) \subset Y_B$. Иными словами, h реализует $Y_B \subset X_B$ как сильный деформационный ретракт над B . Последнее утверждение следует из замечания 1.3.10(b). $\square$

3.2.2. Следствие. Пусть $f: X \rightarrow B$ — квазиразслоение, и пусть $A \hookrightarrow B$ — корасслоение, такое, что $X \times_B A \rightarrow A$ является расслоением. Тогда существует фибрантная замена $f': X' \rightarrow B$ квазиразслоения f , такая, что $X \times_B A = X' \times_B A$.

Доказательство. Пусть $X \xrightarrow{i} Y' \xrightarrow{p} B$ — произвольное разложение квазиразслоения f , где i — тривиальное корасслоение, а p — расслоение. Поскольку f — квазиразслоение, i индуцирует тривиальное корасслоение $X \times_B A \hookrightarrow Y' \times_B A$ (по лемме 3.1.3(b)).

Пусть $X' \subset Y'$ — наибольшее симплициальное подпространство, такое, что $X' \times_B A = X \times_B A$. Тогда $f': X' \rightarrow B$ — расслоение, а $X' \hookrightarrow Y'$ — тривиальное корасслоение (по лемме 3.2.1). Так как тривиальное корасслоение i разлагается в композицию $X \xrightarrow{j} X' \hookrightarrow Y'$, то отображение j есть тривиальное корасслоение в силу свойства «2 из 3», так что f' — фибрантная замена квазиразслоения f . $\square$

3.2.3. Доказательство леммы 1.3.11(d). Композиция $Y_A \xrightarrow{f} A \rightarrow B$ разлагается в композицию тривиального корасслоения $i: Y_A \rightarrow X_B$ и расслоения $p: X_B \rightarrow B$. Положим $X_A := X_B \times_B A$. Тогда i разлагается в композицию $Y_A \xrightarrow{i'} X_A \xrightarrow{i''} X_B$. Кроме того, i'' — слабая эквивалентность, потому что $A \rightarrow B$ — слабая эквивалентность, p — расслоение, а модельная структура Риди правильна справа, так что i' — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3». Пусть теперь $Y_B \subset X_B$ — наибольшее симплициальное подпространство, такое, что $Y_B \times_B A = Y_A$. Тогда $g: Y_B \rightarrow B$ — расслоение по лемме 3.2.1, и его сужение на A есть f . $\square$

3.2.4. Обозначения. (а) Для $X \in sSp$ и $i \geq 0$ определим i -остов $sk_i X$ как наименьшее симплициальное подпространство $Y \subset X$, такое, что $Y_{n,m} = X_{n,m}$ для всех $n + m \leq i$. Тогда $\emptyset = sk_{-1} X \subset sk_0 X \subset \dots \subset sk_i X \subset \dots \subset X$ и $X = \text{colim}_i sk_i X$.

(б) Для любых $n, m \geq 0$ обозначим через $X_{n,m}^{nd} := X_{n,m} \setminus (sk_{n+m-1} X)_{n,m}$ множество «невырожденных бисимплексов». Тогда $X_{0,0}^{nd} = X_{0,0}$ и для любого $i > 0$ i -остов $sk_i X$ естественно изоморфен пушауту $(i-1)$ -остова $sk_{i-1} X$ и $\bigsqcup_{n+m=i, a \in X_{n,m}^{nd}} \square[n, m]$ над $\bigsqcup_{n+m=i, a \in X_{n,m}^{nd}} \partial \square[n, m]$.

3.2.5. Лемма. Пусть $f: X \rightarrow B$ — морфизм в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, где $B \in sSp|_{\mathcal{U}}$. Тогда у f есть фибрантная замена $f': X' \rightarrow B$ в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

Доказательство. Поскольку $(sSp/B)_{\mathcal{U}} \rightarrow (sSp/B)_{|\mathcal{U}|}$ — эквивалентность категорий (см. 2.2.2(d)), достаточно доказать существование фибрантной замены f' в $(sSp/B)_{|\mathcal{U}|}$. Так как $B \in sSp_{|\mathcal{U}|}$ и $|\mathcal{U} \times \mathcal{U}| = |\mathcal{U}|$, то $X \in sSp_{|\mathcal{U}|}$. Кроме того, опять пользуясь равенством $|\mathcal{U} \times \mathcal{U}| = |\mathcal{U}|$, получаем, что фибрантная замена $f': X' \rightarrow B$, построенная с помощью «аргумента малых объектов» (см., например, [9, II.3, лемма 3 и следующее за ней замечание]), удовлетворяет соотношению $X' \in sSp_{|\mathcal{U}|}$, так что $f' \in (sSp/B)_{|\mathcal{U}|}$. $\square$

3.2.6. Следствие. В ситуации следствия 3.2.2 предположим, что $f: X \rightarrow B$ — квазиразслоение в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$. Тогда $f': X' \rightarrow B$ также можно выбрать в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

Доказательство. (I) Предположим сначала, что $B \in sSp_{|\mathcal{U}|}$. Тогда по лемме 3.2.5 расслоение $Y' \rightarrow B$ в доказательстве следствия 3.2.2 можно выбрать из $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, а в этом случае $f': X' \rightarrow B$ также лежит в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

(II) Для каждого i положим $B^{[i]} := sk_i B \cup A \subset B$. Мы утверждаем, что для любого квазиразслоения $g: Y \rightarrow B^{[i]}$ из $(sSp/B^{[i]})_{\mathcal{U}}$, сужение которого на $B^{[i-1]}$ есть расслоение, существует фибрантная замена g' из $(sSp/B^{[i]})_{\mathcal{U}}$, такая, что $g'|_{B^{[i-1]}} = g|_{B^{[i-1]}}$.

Согласно 3.2.4(b), имеем равенство $B^{[i]} = B^{[i-1]} \sqcup_{(\sqcup_a \partial \square[n, m])} (\sqcup_a \square[n, m])$, где a пробегает множество всех отображений $\square[n, m] \rightarrow B^{[i]}$, $n + m = i$, образ которых не лежит в $B^{[i-1]}$. Для каждого такого a положим $g_a := a^*(g)$. Тогда $g_a: Y_a \rightarrow \square[n, m]$ — квазиразслоение из $(sSp/\square[n, m])_{\mathcal{U}}$, сужение которого на $\partial \square[n, m]$ есть расслоение. Таким образом, в силу (I) существует фибрантная замена $g'_a: Y'_a \rightarrow \square[n, m]$ квазиразслоения g_a , принадлежащая $(sSp/\square[n, m])_{\mathcal{U}}$, такая, что $g'_a|_{\partial \square[n, m]} = g_a|_{\partial \square[n, m]}$.

Положим $Y' := Y \sqcup_{(\sqcup_a Y_a)} (\sqcup_a Y'_a)$ и $g' := g \sqcup_{(\sqcup_a g_a)} (\sqcup_a g'_a): Y' \rightarrow B^{[i]}$. Тогда g' — расслоение, потому что его сужение на каждое $\square[n, m]$ есть расслоение (мы воспользовались 1.3.7(a)). Кроме того, каноническое отображение $Y \rightarrow Y'$ есть пушаут несвязного объединения тривиальных корасслоений $Y_a \hookrightarrow Y'_a$. Таким образом, оно является тривиальным корасслоением, ибо категория sSp правильна слева.

(III) Сначала построим последовательность тривиальных корасслоений $X = X'^{[-1]} \hookrightarrow X'^{[0]} \hookrightarrow X'^{[1]} \hookrightarrow \dots$ над B , таких, что $f'^{[i]}: X'^{[i]} \rightarrow B$ — квазиразслоение из $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, $f'^{[i]}|_{B^{[i]}}: X'^{[i]}|_{B^{[i]}} \rightarrow B^{[i]}$ — расслоение и $X'^{[i+1]}|_{B^{[i]}} = X'^{[i]}|_{B^{[i]}}$ для всех i .

Рассуждая по индукции, предположим, что $X'^{[i-1]}$ уже построено. Тогда отображение $g := f'^{[i-1]}|_{B^{[i]}}$ есть квазиразслоение из $(sSp/B^{[i]})_{\mathcal{U}}$, сужение которого на $B^{[i-1]}$ является расслоением. Таким образом, в силу (II) существует его фибрантная замена $g': Y' \rightarrow B^{[i]}$ из $(sSp/B^{[i]})_{\mathcal{U}}$, такая, что $g'|_{B^{[i-1]}} = g|_{B^{[i-1]}}$. Положим $X'^{[i]} := X'^{[i-1]} \sqcup_{X'^{[i-1]}|_{B^{[i]}}} Y'$.

Из леммы 3.1.6 следует, что $f'^{[i]}: X'^{[i]} \rightarrow B$ — квазиразслоение и что $X'^{[i-1]} \rightarrow X'^{[i]}$ — слабая эквивалентность, в то время как по построению $f'^{[i]}$ принадлежит $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, $f'^{[i]}|_{B^{[i]}} = g'$ — расслоение и $X'^{[i]}|_{B^{[i-1]}} = X'^{[i-1]}|_{B^{[i-1]}}$.

Наконец, положим $f' := \text{colim}_i f'^{[i]}: X' \rightarrow B$. Тогда f' удовлетворяет соотношению $f'|_{B^{[i]}} = f'^{[i]}|_{B^{[i]}}$, так что f' — расслоение и $f' \in (sSp/B)_{\mathcal{U}}$. Кроме того, так как $X'^{[i]} \hookrightarrow X'^{[i+1]}$ — тривиальное корасслоение для каждого i , то

$X \hookrightarrow X'$ — также тривиальное корасслоение, так что f' есть фибрантная замена на квазиасслоения f . $\square$

§4. Дополнения

4.1. Дискретный итерированный цилиндр.

4.1.1. Наблюдения. (а) Каждое отображение $p: X \rightarrow B \times F[m]$ в sSp индуцирует отображение $p_n: X_n \rightarrow B_n \times F[m]_n$ для всех n . Так как $F[m]_n$ имеет разложение $\bigsqcup_{\tau: [n] \rightarrow [m]} \text{pt}$, то каждое X_n разлагается в несвязное объединение $X_n = \bigsqcup_{\tau: [n] \rightarrow [m]} X_\tau$, а p_n разлагается в несвязное объединение отображений $p_\tau: X_\tau \rightarrow B_n$.

(b) По определению все слои отображения p принадлежат $\text{Set}_{\mathcal{U}}$ тогда и только тогда, когда все слои каждого p_τ принадлежат $\text{Set}_{\mathcal{U}}$.

(c) Заметим, что p_n является квазиасслоением тогда и только тогда, когда каждое $p_\tau: X_\tau \rightarrow B_n$ — квазиасслоение. Используя лемму 3.1.7, заключаем, что p является квазиасслоением тогда и только тогда, когда каждое p_τ — квазиасслоение.

(d) Напомним, что квазиасслоение $p: X \rightarrow B \times F[m]$ является левым тогда и только тогда, когда каждый морфизм $g_n: X_n \rightarrow X_0 \times_{(B \times F[m])_0} (B \times F[m])_n$ есть слабая эквивалентность. Заметим, что g_n разлагается в несвязное объединение морфизмов $g_\tau: X_\tau \rightarrow X_{\tau|_0} \times_{B_0} B_n$. Таким образом, p является левым тогда и только тогда, когда каждое g_τ — слабая эквивалентность.

(e) Морфизм $f: X \rightarrow Y$ левых квазиасслоений над $B \times F[m]$ является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда $f|_i: X|_i \rightarrow Y|_i$ — слабая эквивалентность для любого $i = 0, \dots, m$. Действительно, согласно рассуждению из леммы 2.1.5, f является слабой эквивалентностью тогда и только тогда, когда f_0 — слабая эквивалентность. Поскольку $F[n]_0 = \bigsqcup_{i=0}^n \delta^i(\text{pt})$, отсюда следует нужное утверждение.

4.1.2. Дискретный итерированный цилиндр. Для $B \in sSp$ и последовательности морфизмов $f: K^{(0)} \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_m} K^{(m)}$ из sSp/B рекуррентно определим *дискретный итерированный цилиндр* $\text{Cyl}^d(f) \rightarrow B \times F[m]$ и морфизм $\iota_j: K^{(j)} \times e^j F[m-j] \rightarrow \text{Cyl}^d(f)$ над $B \times F[m]$ для всех $j = 0, \dots, m$ следующим образом.

Для $m = 0$ положим $\text{Cyl}^d(f) := K^{(0)}$ и $\iota_0 = \text{Id}$. Для $m \geq 1$ обозначим через $f(1)$ последовательность $f(1): K^{(1)} \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_m} K^{(m)}$ и предположим по индукции, что мы уже определили итерированный цилиндр $\text{Cyl}^d(f(1)) \rightarrow B \times F[m-1]$ и морфизм $\iota_j: K^{(j)} \times e^j F[m-j] \rightarrow e^1 \text{Cyl}^d(f(1))$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Определим $\text{Cyl}^d(f) \rightarrow B \times F[m]$ как пушавто

$$\text{Cyl}^d(f) := (K^{(0)} \times F[m]) \sqcup_{(K^{(0)} \times e^1 F[m-1])} e^1 \text{Cyl}^d(f(1)), \quad (4.1)$$

где отображение $K^{(0)} \times e^1 F[m-1] \rightarrow e^1 \text{Cyl}^d(f(1))$ определено как композиция

$$K^{(0)} \times e^1 F[m-1] \xrightarrow{f_1} K^{(1)} \times e^1 F[m-1] \xrightarrow{\iota_1} e^1 \text{Cyl}^d(f(1)).$$

Наконец, определим $\iota_0: K^{(0)} \times F[m] \rightarrow \text{Cyl}^d(f)$ как естественное отображение.

4.1.3. Лемма. Если каждое отображение $K^{(i)} \rightarrow B$ — (левое) квазирасслоение из $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, то $\text{Cyl}^d(f) \rightarrow B \times F[m]$ — (левое) квазирасслоение из $(sSp/B \times F[m])_{\mathcal{U}}$.

Доказательство. Мы собираемся применить наблюдения 4.1.1 к проекции $p: \text{Cyl}^d(f) \rightarrow B \times F[m]$.

Мы утверждаем, что $\text{Cyl}^d(f)_\tau = K_n^{(\tau(0))}$ для любого $\tau: [n] \rightarrow [m]$. Доказательство проводится по индукции. Утверждение очевидно при $m = 0$. Далее, если $m \geq 1$, то из (4.1) следует, что $\text{Cyl}^d(f)_\tau$ равно $K_n^{(0)}$, если $\tau(0) = 0$, и равно $\text{Cyl}^d(f(1))_{\tau'}$, где $\tau': [n] \rightarrow [m-1]$ дается формулой $\tau'(i) = \tau(i) - 1$, если $\tau(0) \geq 1$. По предположению индукции во втором случае $\text{Cyl}^d(f)_\tau$ равно $K_n^{(\tau'(0)+1)} = K_n^{(\tau(0))}$.

Согласно доказанному выше и 4.1.1(a), каждый слой отображения p является слоем некоторого $K_n^{(\tau(0))} \rightarrow B_n$. Таким образом, он принадлежит $\text{Set}_{\mathcal{U}}$, потому что $K^{(\tau(0))} \rightarrow B$ лежит в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

Кроме того, так как каждое $K^{(\tau(0))} \rightarrow B$ — квазирасслоение, то и каждое $K_n^{(\tau(0))} \rightarrow B_n$ — квазирасслоение (по лемме 3.1.7). Поэтому p — квазирасслоение в силу 4.1.1(c). Аналогично каждая проекция $\text{Cyl}^d(f)_\tau \rightarrow \text{Cyl}^d(f)_{\tau|_0} \times_{B_0} B_n$ — это просто $K_n^{(\tau(0))} \rightarrow K_0^{(\tau(0))} \times_{B_0} B_n$. Поэтому она является слабой эквивалентностью, ибо расслоение $K^{(\tau(0))} \rightarrow B$ левое. Теперь нужное утверждение следует из 4.1.1(d). $\square$

4.1.4. Лемма. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение, а $E \rightarrow Y \times F[n]$ — левое расслоение.

(а) Отображение $p: \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times F[n], E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X, E)$, индуцированное включением $e^0: F[0] \hookrightarrow F[n]$, — тривиальное расслоение.

(b) Отображение

$q: \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times F[n], E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times (e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1]), E)$, индуцированное включением $e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1] \hookrightarrow F[n]$, — тривиальное расслоение.

Доказательство. (а) Так как $E \rightarrow Y \times F[n]$ — левое расслоение, то отображение $E^X \rightarrow (Y \times F[n])^X$ — левое расслоение по лемме 2.1.2(b). Тогда по лемме 2.1.3(b) отображение

$$E^{X \times F[n]} \rightarrow E^X \times_{(Y \times F[n])^X} (Y \times F[n])^{X \times F[n]}$$

— тривиальное расслоение. Взяв слой над $f \times \text{Id}_{F[n]} \in (Y \times F[n])^{X \times F[n]}$, получаем нужное утверждение.

(b) Так как $e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1] \hookrightarrow F[n]$ — корасслоение, то отображение q — расслоение. Таким образом, остается показать, что q — слабая эквивалентность. Рассмотрим отображение

$$r: \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times (e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1]), E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X, E),$$

индуцированное включением $F[0] \xrightarrow{e^0} e^0 F[1] \hookrightarrow e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1]$. Поскольку $r \circ q = p$, оно является слабой эквивалентностью в силу (а). Таким

образом, остается показать, что r — слабая эквивалентность. Но r можно записать как композицию отображений

$$\mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times (e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1]), E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times e^0 F[1], E)$$

и $(e^0)^*: \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times e^0 F[1], E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X, E)$, так что остается показать, что оба отображения — тривиальные расслоения. Поскольку первое отображение — пулбэк морфизма $\mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times e^1 F[n-1], E) \rightarrow \mathcal{M}ar_{Y \times F[n]}(X \times e^1 F[0], E)$, оба отображения являются тривиальными расслоениями в силу (а). $\square$

4.2. Доказательства. В этом разделе мы докажем предложения 2.2.8, 2.2.9 и следствие 2.2.10. Самой трудной частью является предложение 2.2.9(b), доказательство которого проводится в 4.2.7–4.2.9 и 4.2.11–4.2.13. Обозначим $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ просто через $\mathfrak{S}$.

4.2.1. Доказательство предложения 2.2.8(a). Согласно 1.3.7(a), нужно доказать, что для любого тривиального корасслоения $i: A \rightarrow B$ из sSp , где $B = \square[n, m]$, морфизм $i^*: \text{Hom}(B, \mathfrak{S}) \rightarrow \text{Hom}(A, \mathfrak{S})$ сюръективен. Согласно лемме 2.2.4, это означает, что каждое левое расслоение $Y_A \rightarrow A$ в $(sSp/A)_{\mathcal{U}}$ расширяется до левого расслоения $Y_B \rightarrow B$ в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

Из леммы 1.3.11(d) (см. 3.2.3) следует, что существует расслоение $Y_B \rightarrow B$, продолжающее $Y_A \rightarrow A$. Кроме того, поскольку композиция $Y_A \rightarrow A \rightarrow B$ принадлежит $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$ и $B \in sSp|_{\mathcal{U}}$, расслоение $X_B \rightarrow B$ в 3.2.3 можно выбрать из $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$ (по лемме 3.2.5), а в этом случае $Y_B \rightarrow B$ также принадлежит $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$.

Так как $A \rightarrow B$ — слабая эквивалентность и модельная структура Риди правильна, то включение $Y_A \rightarrow Y_B$ — слабая эквивалентность. Поскольку $Y_A \rightarrow A$ — левое расслоение, $Y_B \rightarrow B$ — левое расслоение по лемме 3.1.10.

4.2.2. Доказательство предложения 2.2.8(b). Чтобы показать, что $\mathfrak{S}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}^{n+1}$ — расслоение, нужно доказать, что для любого тривиального корасслоения $A \hookrightarrow B$ отображение $(\mathfrak{S}^{(n)})^B \rightarrow (\mathfrak{S}^{n+1})^B \times_{(\mathfrak{S}^{n+1})^A} (\mathfrak{S}^{(n)})^A$ сюръективно. Используя сделанное в 2.2.7 наблюдение, нужно доказать, что для любого упорядоченного набора из $n+1$ левых расслоений $E^{(0)}, \dots, E^{(n)}$ над B каждая диаграмма $E^{(0)}|_A \rightarrow \dots \rightarrow E^{(n)}|_A$ над A расширяется до диаграммы $E^{(0)} \rightarrow \dots \rightarrow E^{(n)}$ над B .

Для этого достаточно показать, что каждое отображение сужения

$$\text{Hom}_B(E^{(i)}, E^{(i+1)}) \rightarrow \text{Hom}_B(E^{(i)}|_A, E^{(i+1)}) = \text{Hom}_A(E^{(i)}|_A, E^{(i+1)}|_A)$$

сюръективно. Так как $E^{(i)} \rightarrow B$ — расслоение, $A \rightarrow B$ — тривиальное корасслоение и модельная структура Риди правильна, то $E^{(i)}|_A \rightarrow E^{(i)}$ — тривиальное корасслоение. Таким образом, утверждение следует из того факта, что $E^{(i+1)} \rightarrow B$ — расслоение.

Чтобы показать, что $\mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S}^2$ — расслоение, мы рассуждаем дословно, как и выше, и замечаем, что поскольку корасслоения $E^{(i)}|_A \rightarrow E^{(i)}$ тривиальны, из свойства «2 из 3» следует, что морфизм $E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$ есть слабая эквивалентность тогда и только тогда, когда его сужение $E^{(0)}|_A \rightarrow E^{(1)}|_A$ — слабая эквивалентность.

4.2.3. Доказательство предложения 2.2.8(с). Нам нужно доказать, что для любого корасслоения $A \hookrightarrow B$ отображение $(\mathfrak{S}^{(we)})^B \rightarrow \mathfrak{S}^B \times_{\mathfrak{S}^A} (\mathfrak{S}^{(we)})^A$ сюръективно. Пусть $E^{(0)} \rightarrow B$ принадлежит $(LFib/B)_{\mathcal{U}}$, $E_A^{(1)} \rightarrow A$ принадлежит $(LFib/A)_{\mathcal{U}}$, а $\phi': E^{(0)}|_A \rightarrow E_A^{(1)}$ — слабая эквивалентность над A . Нам нужно доказать, что ϕ' расширяется до слабой эквивалентности $\phi: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$ над B , такой, что $E^{(1)} \rightarrow B$ принадлежит $(LFib/B)_{\mathcal{U}}$.

Согласно лемме 3.1.6, пушаут $E^{(0)} \sqcup_{E^{(0)}|_A} E_A^{(1)}$ — квазиасслоение над B , сужение которого на A — это расслоение $E_A^{(1)} \rightarrow A$. Поэтому в силу следствия 3.2.6 существует его фибрантная замена $E^{(1)} \rightarrow B$ в $(sSp/B)_{\mathcal{U}}$, такая, что $E^{(1)}|_A = E_A^{(1)}$.

По построению ϕ' расширяется до морфизма $\phi: E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} E^{(0)} \sqcup_{E^{(0)}|_A} E_A^{(1)} \xrightarrow{\phi_2} E^{(1)}$ расслоений над B . Кроме того, так как ϕ' — слабая эквивалентность, то ее пушаут ϕ_1 — также слабая эквивалентность, так что и ϕ — тоже слабая эквивалентность. Поскольку $E^{(0)} \rightarrow B$ — левое расслоение, $E^{(1)} \rightarrow B$ — левое расслоение по лемме 3.1.10.

4.2.4. Доказательство предложения 2.2.8(d). Используя наблюдения, сделанные в 2.2.7(b), остается показать, что если $a \in \mathfrak{S}^{(we)}$, $b \in \mathfrak{S}^{(1)}$, причем $a \sim b$ в $\mathfrak{S}^{(1)}$, то $b \in \mathfrak{S}^{(we)}$. Поскольку $\mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ — расслоение, в то время как $\mathfrak{S}^{(1)}$ фибрантно (в силу предложения 2.2.8(a),(b)), можно изменить a таким образом, что $a \sim b$ в некотором слое расслоения $\mathfrak{S}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$.

Тогда элементу a соответствует слабая эквивалентность $\phi_a: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$, элементу b соответствует морфизм $\phi_b: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$, а предположение, что $a \sim b$, означает, что отображения ϕ_a и ϕ_b гомотопны. Поэтому ϕ_b — слабая эквивалентность (в силу 1.3.9(c)), так что $b \in \mathfrak{S}^{(we)}$.

4.2.5. Доказательство предложения 2.2.9(a). Согласно лемме 2.2.4, для любого $K \in sSp$ множество $\text{Hom}(K, \mathfrak{S}^{\Delta[1]}) = \text{Hom}(K \times \Delta[1], \mathfrak{S})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством левых расслоений $E \rightarrow K \times \Delta[1]$ в $(sSp/K \times \Delta[1])_{\mathcal{U}}$, в то время как множество $\text{Hom}(K, \mathfrak{S}^2)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар левых расслоений $E^{(0)} \rightarrow K, E^{(1)} \rightarrow K$ из $(sSp/K)_{\mathcal{U}}$. Кроме того, проекция $\mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S}^2$ переводит $E \rightarrow K \times \Delta[1]$ в пару $E|_0 := E|_{K \times \{0\}}, E|_1 := E|_{K \times \{1\}}$, а множество $\text{Hom}(K, \mathfrak{S}^{(we)})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством слабых эквивалентностей $\phi: E^{(0)} \rightarrow E^{(1)}$ левых расслоений над K (в силу 2.2.7).

Согласно лемме 1.3.11(с), для любого левого расслоения $E \rightarrow K \times \Delta[1]$ существует слабая эквивалентность $\phi: E|_0 \rightarrow E|_1$ левых расслоений над K . Если $K := \mathfrak{S}^{\Delta[1]}$ и E — левое расслоение, соответствующее Id_K , то отображение ϕ индуцирует морфизм $\psi: \mathfrak{S}^{\Delta[1]} \rightarrow \mathfrak{S}^{(we)}$ над $\mathfrak{S}^2$.

Кроме того, $p_0: \mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S}$ — тривиальное расслоение в силу предложения 2.2.8(с), в то время как $\delta_0: \mathfrak{S}^{\Delta[1]} \rightarrow \mathfrak{S}$ — тривиальное расслоение, потому что $\mathfrak{S}$ фибрантно (в силу предложения 2.2.8(a)), а $\delta^0: \Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$ — тривиальное корасслоение. Тогда ψ — слабая эквивалентность в силу свойства «2 из 3», а значит, и гомотопическая эквивалентность по лемме 1.3.11(b).

4.2.6. Доказательство следствия 2.2.10. Гомотопическая эквивалентность $\mathfrak{S}^{(we)} \rightarrow \mathfrak{S}^{\Delta[1]}$ над $\mathfrak{S}^2$, установленная в предложении 2.2.9(a), индуцирует гомотопическую эквивалентность

$$\mathrm{Map}(K, \mathfrak{S}^{(we)}) \rightarrow \mathrm{Map}(K, \mathfrak{S}^{\Delta[1]}) = \mathrm{Map}(\Delta[1], \mathfrak{S}^K)$$

над $\mathrm{Map}(K, \mathfrak{S}^2)$, а значит, и гомотопическую эквивалентность слоев над $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Map}(K, \mathfrak{S}^2)$. Поскольку $\mathrm{Map}(K, \mathfrak{S}^{(we)})_{\alpha, \beta} \neq \emptyset$ означает, что E_α и E_β гомотопически эквивалентны над K (по 2.2.7(b)), в то время как $\mathrm{Map}(\Delta[1], \mathfrak{S}^K)_{\alpha, \beta} \neq \emptyset$ означает, что $\alpha \sim \beta$ в $\mathfrak{S}^K$, получаем нужное утверждение.

4.2.7. Конструкция морфизма $\psi^{(n)}$. Согласно 2.2.7, тождественному отображению $\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}^{(n)}}$ соответствует диаграмма $\phi: E^{(0)} \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E^{(n)}$ левых расслоений над $\mathfrak{S}^{(n)}$ в $(sSp/\mathfrak{S}^{(n)})_{\mathcal{U}}$. Чтобы определить морфизм $\psi^{(n)}: \mathfrak{S}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}^{F[n]}$ над $\mathfrak{S}^{n+1}$, нужно построить левое расслоение $E \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)} \times F[n]$ в $(sSp/\mathfrak{S}^{(n)}) \times F[n]_{\mathcal{U}}$, такое, что $E|_i := E|_{\mathfrak{S}^{(n)} \times \{i\}} = E^{(i)}$.

Рассмотрим дискретный итерированный цилиндр $p: \mathrm{Cyl}^d(\phi) \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)} \times F[n]$ (см. 4.1.2). Тогда p — левое квазирасслоение в $(sSp/\mathfrak{S}^{(n)}) \times F[n]_{\mathcal{U}}$ (по лемме 4.1.3), и сужение $\mathrm{Cyl}^d(\phi)|_i = E^{(i)}$ — расслоение над $\mathfrak{S}^{(n)}$. Таким образом, в силу следствия 3.2.6 существует фибрантная замена $p': E \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)} \times F[n]$ отображения p в $(sSp/\mathfrak{S}^{(n)}) \times F[n]_{\mathcal{U}}$, такая, что $E|_i = \mathrm{Cyl}^d(\phi)|_i$ для всех i . Тогда p' является левым расслоением в силу следствия 3.1.11.

4.2.8. Единственность морфизма $\psi^{(n)}$. Заметим, что если E' — другая фибрантная замена для $\mathrm{Cyl}^d(\phi) \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)} \times F[n]$, такая, что $E'|_i = \mathrm{Cyl}^d(\phi)|_i$ для всех i , то существует слабая эквивалентность $E \rightarrow E'$ над $\mathfrak{S}^{(n)} \times F[n]$, которая тождественна над каждым $\{i\} \in F[n]$. Теперь из следствия 2.2.10 получаем, что морфизм $\psi'^{(n)}: \mathfrak{S}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}^{F[n]}$, соответствующий E' , гомотопен $\psi^{(n)}$ над $\mathfrak{S}^{n+1}$.

4.2.9. Модулярная интерпретация морфизма $\psi^{(n)}$. В обозначениях из 4.2.7 морфизму $\varphi: K \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)}$ соответствует диаграмма $\varphi^*(\phi)$ левых расслоений над K , в то время как композиции $\psi^{(n)} \circ \varphi: K \rightarrow \mathfrak{S}^{F[n]}$ соответствует левое расслоение $\varphi^*(E)$. Напомним, что $\mathrm{Cyl}^d(\phi) \rightarrow K \times F[n]$ — квазирасслоение и что E — фибрантная замена для $\mathrm{Cyl}^d(\phi)$, такая, что $E|_i = E^{(i)}$ для всех i . Поэтому из следствия 3.1.4 вытекает, что $\varphi^*(E)$ — фибрантная замена для $\varphi^*(\mathrm{Cyl}^d(\phi)) = \mathrm{Cyl}^d(\varphi^*(\phi))$, такая, что $\varphi^*(E)|_i = \varphi^*(E^{(i)})$ для всех i .

4.2.10. Доказательство предложения 2.2.9(c). Согласно 2.2.7, композиции $\mu^* \circ \psi^{(n)}: \mathfrak{S}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}^{F[m]}$ соответствует левое расслоение $\mu^*(E) \rightarrow \mathfrak{S}^{(n)} \times F[m]$, которое, как и в 4.2.9, является фибрантной заменой для $\mu^*(\mathrm{Cyl}^d(\phi)) = \mathrm{Cyl}^d(\mu^*(\phi))$, такой, что $\mu^*(E)|_i = E^{(\mu(i))} = \mathrm{Cyl}^d(\mu^*(\phi))|_i$ для всех i . Далее, морфизму $\psi^{(m)} \circ \mu^*: \mathfrak{S}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{S}^{F[m]}$ также соответствует фибрантная замена для $\mathrm{Cyl}^d(\mu^*(\phi))$ с аналогичными свойствами. Теперь нужное утверждение вытекает из следствия 2.2.10, как и в 4.2.8.

Остается показать, что $\psi := \psi^{(n)}$ — гомотопическая эквивалентность над $\mathfrak{S}^{n+1}$.

4.2.11. Редукция. Согласно лемме 1.3.11(a), нужно доказать, что для любого отображения $\eta: M \rightarrow \mathfrak{S}^{n+1}$ отображение $\pi_0(\psi/\eta): \pi_0(\mathrm{Map}_{\mathfrak{S}^{n+1}}(M, \mathfrak{S}^{(n)})) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Map}_{\mathfrak{S}^{n+1}}(M, \mathfrak{S}^{F[n]}))$, индуцированное отображением ψ , является биекцией.

Пусть η соответствует упорядоченному набору из $n + 1$ левых расслоений $H^{(0)}, \dots, H^{(n)}$ над M . Тогда $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n+1}}(M, \mathfrak{S}^{(n)})$ соответствует диаграмме $\varphi: H^{(0)} \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_n} H^{(n)}$ над M и $\tau \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}_{n+1}}(M, \mathfrak{S}^{F[n]})$ соответствует левому расслоению $H \rightarrow M \times F[n]$, такому, что $H|_i = H^{(i)}$ для всех i .

Используя следствие 2.2.10 и п. 4.2.9, видим, что $\psi \circ \varphi \sim \tau$ в $\text{Мар}_{\mathfrak{S}_{n+1}}(M, \mathfrak{S}^{F[n]})$ тогда и только тогда, когда существует морфизм $\nu: \text{Cyl}^d(\varphi) \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, такой, что $\nu|_i: H^{(i)} \rightarrow H|_i = H^{(i)}$ есть $\text{Id}_{H^{(i)}}$ для всех i и ν — слабая эквивалентность. Кроме того, в силу п. 4.1.1(e) предположение о том, что ν — слабая эквивалентность, выполнено автоматически.

4.2.12. Доказательство сюръективности отображения $\pi_0(\psi/\eta)$. Нам нужно доказать, что для любого левого расслоения $H \rightarrow M \times F[n]$, такого, что $H|_i = H^{(i)}$ для всех i , существует диаграмма φ и морфизм $\nu: \text{Cyl}^d(\varphi) \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, такие, что каждое отображение $\nu|_i: H^{(i)} \rightarrow H|_i = H^{(i)}$ является тождественным. Построим φ и ν индукцией по n . Если $n = 0$, то φ пусто и $\text{Cyl}^d(\varphi) = H^{(0)} = H$, так что $\nu = \text{Id}_H$ удовлетворяет нужным условиям.

Предположим, что $n > 0$. По предположению индукции существует диаграмма $\varphi^{(1)}: H^{(1)} \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} H^{(n)}$ над M и морфизм $e^1 \text{Cyl}^d(\varphi^{(1)}) \rightarrow H|_{e^1 F[n-1]} \subset H$ над $M \times F[n]$, такие, что $\nu|_i: H^{(i)} \rightarrow H|_i = H^{(i)}$ — тождественное отображение для всех $i > 0$. В частности, существует морфизм $\nu[1]: H^{(1)} \times e^1 F[n-1] \rightarrow e^1 \text{Cyl}^d(\varphi^{(1)}) \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, такой, что $\nu[1]|_1 = \text{Id}_{H^{(1)}}$.

Поскольку $\text{Cyl}^d(\varphi) = (H^{(0)} \times F[n]) \sqcup_{(H^{(0)} \times e^1 F[n-1])} e^1 \text{Cyl}^d(\varphi^{(1)})$, остается построить морфизм $\varphi_1: H^{(0)} \rightarrow H^{(1)}$ над M и морфизм $\nu[0]: H^{(0)} \times F[n] \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, такие, что $\nu[0]|_0 = \text{Id}_{H^{(0)}}$ и сужение $\nu[0]|_{e^1 F[n-1]}$ разлагается в композицию $H^{(0)} \times e^1 F[n-1] \xrightarrow{\varphi_1} H^{(1)} \times e^1 F[n-1] \xrightarrow{\nu[1]} H$.

Так как $H \rightarrow M \times F[n]$ — левое расслоение, то включение $H^{(0)} = H|_0 \hookrightarrow H$ расширяется до морфизма $\nu'[0]: H^{(0)} \times e^0 F[1] \rightarrow H|_{e^0 F[1]} \subset H$ над $M \times F[n]$ (по лемме 4.1.4(a)). Обозначим $\nu'[0]|_1: H^{(0)} \rightarrow H^{(1)}$ через φ_1 и определим $\nu''[0]: H^{(0)} \times e^1 F[n-1] \rightarrow H|_{e^1 F[n-1]} \subset H$ как композицию $\nu[1] \circ \varphi_1$. Тогда $\nu'[0]$ и $\nu''[0]$ определяют морфизм $H^{(0)} \times (e^0 F[1] \sqcup_{e^1 F[0]} e^1 F[n-1]) \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, который по лемме 4.1.4(b) можно расширить на всё $H^{(0)} \times F[n]$.

4.2.13. Доказательство инъективности отображения $\pi_0(\psi/\eta)$. Зафиксируем левое расслоение $H \rightarrow M \times F[n]$ и рассмотрим все диаграммы $\varphi: H^{(0)} \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_n} H^{(n)}$ над M , для которых существует морфизм $\nu: \text{Cyl}^d(\varphi) \rightarrow H$ над $M \times F[n]$, такой, что каждое отображение $\nu|_j$ тождественное. Нам нужно доказать, что каждое $\pi_0(\varphi_j) \in \pi_0(\text{Мар}_M(H^{(j)}, H^{(j+1)}))$ зависит только от H .

Рассмотрим морфизм $\iota_j: H^{(j)} \times e^j F[n-j] \rightarrow \text{Cyl}^d(\varphi)$, построенный в 4.1.2. Тогда композиция $\nu \circ \iota_j: H^{(j)} \times e^j F[n-j] \rightarrow H$ такова, что $(\nu \circ \iota)|_j: H^{(j)} \rightarrow H^{(j)}$ есть $\text{Id}_{H^{(j)}}$, в то время как $(\nu \circ \iota)|_{j+1}: H^{(j)} \rightarrow H^{(j+1)}$ есть φ_j . Таким образом, остается показать, что каждое $\pi_0(\nu \circ \iota_j) \in \pi_0(\text{Мар}_{M \times F[n]}(H^{(j)} \times e^j F[n-j], H))$ зависит только от H . Поскольку отображение сужения $\text{Мар}_{M \times F[n]}(H^{(j)} \times e^j F[n-j], H) \rightarrow \text{Мар}_{M \times F[n]}(H^{(j)} \times \{j\}, H)$ является тривиальным расслоением (по лемме 4.1.4(b)), в то время как $(\nu \circ \iota_j)|_j = \text{Id}_{H^{(j)}}$, нужное утверждение следует из 1.2.8(b).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Goerss, J. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Math., vol. 174, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [2] D. Kazhdan, Y. Varshavsky, *Yoneda lemma for complete Segal spaces II* (готовится к печати).
- [3] D. Kazhdan, Y. Varshavsky, *Yoneda lemma for (∞, n) -categories* (готовится к печати).
- [4] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Math. Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [5] J. Lurie, *Higher Algebra*, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/>.
- [6] C. Rezk, *A model for the homotopy theory of homotopy theory*, Trans. Amer. Math. Soc., **353**:3 (2001), 973–1007.
- [7] C. Rezk, *A Cartesian presentation of weak n -categories*, Geom. Topol., **14**:1 (2010), 521–571, **14**:4 (2010), 2301–2304.
- [8] C. Rezk, *Fibrations and homotopy colimits of simplicial sheaves*, [arXiv:math/9811038](https://arxiv.org/abs/math/9811038).
- [9] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1967.

Institute of Mathematics,
The Hebrew University of Jerusalem
e-mail: vyakov@math.huji.ac.il

Institute of Mathematics,
The Hebrew University of Jerusalem
e-mail: kazhdan@math.huji.ac.il

Поступило в редакцию
22 января 2014 г.