Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, О формуле Вейля для оператора Лапласа на гиперболических римановых поверхностях, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:27:35

УДК 517.984.5

О формуле Вейля для оператора Лапласа на гиперболических римановых поверхностях

© 2014. Д. А. Попов

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

1. Введение. Пусть Γ — строго гиперболическая фуксова группа, H — верхняя полуплоскость и $F = \Gamma \setminus H$ — замкнутая риманова поверхность с римановой метрикой постоянной отрицательной кривизны (метрикой Пуанкаре). Пусть $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$) — спектр оператора Лапласа Δ ($\Delta\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0$) и

$$N(x) = \#\{n \geq 0, \lambda_n \leq x\} = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$$

— функция распределения собственных значений. В соответствии с формулой Вейля

$$N(x) = Ax + \Delta N(x), \quad |\Delta N(x)| = O(x^{1/2}) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (1)$$

где $A = (4\pi)^{-1}|F| = g - 1$ и $|F|$ — площадь, а g — род поверхности F . Нас будет интересовать поведение величины $\Delta N(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Известно [1], что $\Delta N(x) = O(x^{1/2}(\ln x)^{-1})$, и имеется гипотеза, что для группы Γ , отвечающей точке общего положения в пространстве Тейхмюллера, $|\Delta N(x)| = O(x^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ (см. [2], [3]). С другой стороны, Сельберг доказал, что для некоторой бесконечной серии арифметических групп $|\Delta N(x)| = \Omega(x^{1/4}(\ln x)^{-1})$ (см. [4]), т. е. существует последовательность $x_i \rightarrow \infty$, такая, что $|\Delta N(x_i)| > Cx_i^{1/4}(\ln x_i)^{-1}$. Для любой группы рассматриваемого типа известно, что $|\Delta N(x)| = \Omega((\ln x / \ln \ln x)^{1/2})$. Заметим, что, как показано в [5],

$$X^{-1} \int_0^X |\Delta N(x)| dx = O(X^{1/4+\varepsilon}).$$

Вместо λ_n удобно рассматривать величины r_n , определенные равенствами

$$\lambda_n = r_n^2 + 1/4.$$

Цель настоящей работы — сформулировать условия на распределение величин r_n , достаточные для существования степенного понижения в формуле Вейля, т. е. для справедливости оценки

$$|\Delta N(x)| = O(x^\theta), \quad \theta < 1/2. \quad (2)$$

Насколько мне известно, такая оценка до сих пор не доказана.

2. Основные результаты. Пусть P — класс сопряженных в Γ элементов, $N(P)$ — его норма [4],

$$B_0 = \min_{\{P\}} \{N(P)\}, \quad b_0 = \ln B_0 \quad (b_0 > 0), \quad B = \begin{cases} 2, & 1 < B_0 < 2, \\ B_0, & B_0 \geq 2, \end{cases} \quad b = \ln B.$$

Через C ниже обозначаются константы, зависящие только от группы Γ , и их явный вид может быть указан.

Используя теорему 1 и следствие 1 из работы [7] и следуя рассуждениям работы [6], получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть Γ — произвольная строго гиперболическая группа. Тогда для любого $t \geq 3$, $t \notin \{r_n\}$,

$$N(t^2 + 1/4) = \frac{|F|}{4\pi} t^2 - \frac{1}{\pi} S(t) + F(t). \quad (3)$$

В этой формуле

$$S(t) = \sum_{r_n \geq 0} [\operatorname{sgn}(r_n - t) \operatorname{si}(|t - r_n|b) - \operatorname{si}((t + r_n)b) - \beta_n(t)], \quad (4)$$

$$\beta_n(t) = -\frac{r_n \cos(r_n - t)b}{b(r_n^2 + 1/4)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(r_n - t)b}{b(r_n^2 + 1/4)} + \frac{r_n \cos(r_n + t)b}{b(r_n^2 + 1/4)} - \frac{1}{2} \frac{\sin(r_n + t)b}{b(r_n^2 + 1/4)},$$

и F — ограниченная непрерывная функция, имеющая при $t \rightarrow \infty$ асимптотику вида

$$F(t) = C_0 + \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{t^2} + \dots$$

Здесь использовано стандартное обозначение $\operatorname{si}(\cdot)$ — интегральный синус,

$$\operatorname{si} x = \int_{-\infty}^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Эта теорема является обобщением результата работы [6] на любые строго гиперболические группы. Сходимость ряда $S(t)$ при $t \neq r_n$ следует из формулы Сельберга и доказывается так же, как в работе [6]. При этом остаются верными все утверждения работ [6], [7] о характере сходимости этого ряда. Кроме того, можно показать, что

$$\sum_{r_n \geq R} \frac{\cos r_n b}{r_n^2} = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Везде ниже предполагается, что $t \geq t_0$, где t_0 — некоторая достаточно большая величина, которая может быть явно указана. Это условие будет записываться в виде $t \gg 1$. Это относится и к другим величинам, т. е. к условиям вида $\xi \gg 1$. Запись $f(t) = O(\varphi(t))$ означает, что $|f(t)| \leq C\varphi(t)$ при $t \gg 1$.

Рассмотрим сумму

$$\Phi(\xi) = \sum_{0 \leq r_n \leq \xi} e^{ir_n b} \quad (\xi \gg 1) \quad (6)$$

и будем писать $\{r_n\} \in \Pi_\alpha$, если существует $\alpha = \alpha_\Gamma$, $0 < \alpha \leq 1$, такое, что

$$|\Phi(\xi)| \leq C\xi^{2\alpha} \quad (\xi \gg 1). \quad (7)$$

При $\alpha = 1$ это условие заведомо выполняется, так как

$$|\Phi(\xi)| \leq \sum_{0 \leq r_n \leq \xi} 1 \leq C\xi^2, \quad (8)$$

причем последнее неравенство следует из формулы Вейля (1).

Заметим, что в настоящее время не известны примеры групп, для которых доказано, что $\{r_n\} \in \Pi_\alpha$ при $\alpha < 1$.

Лемма 1. Если $t \gg 1$, $\delta = t^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, и $\{r_n\} \in \Pi_\alpha$, то для любых таких α и γ

$$S(t) = Q_\delta(t) + P_\delta(t) + S_\delta^0(t) + O(\delta + t^{2\alpha}/\delta^3). \quad (9)$$

В этой формуле величина $Q_\delta(t)$ определяется равенством

$$Q_\delta(t) = \frac{t \cos tb}{b} \sum'_{|r_n - t| \geq \delta} \frac{\cos r_n b}{r_n} \left(\frac{1}{r_n - t} + \frac{1}{r_n + t} \right) + \frac{t \sin tb}{b} \sum'_{|r_n - t| \geq \delta} \frac{\sin r_n b}{r_n} \left(\frac{1}{r_n - t} - \frac{1}{r_n + t} \right), \quad (10)$$

величина $P_\delta(t)$ — равенством

$$P_\delta(t) = \frac{\cos tb}{b^2} \sum'_{|r_n - t| \geq \delta} \sin r_n b \left(\frac{1}{(r_n - t)^2} - \frac{1}{(r_n + t)^2} \right) - \frac{\sin tb}{b^2} \sum'_{|r_n - t| \geq \delta} \cos r_n b \left(\frac{1}{(r_n - t)^2} + \frac{1}{(r_n + t)^2} + \frac{b}{r_n^2} \right) \quad (11)$$

и $S_\delta^0(t)$ — равенством

$$S_\delta^0(t) = \sum_{t - \delta < r_n < t} \text{si}(t - r_n)b - \sum_{t < r_n < t + \delta} \text{si}(r_n - t)b. \quad (12)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по области $r_n \geq 1$. Используя (5), можно показать, что если $R > 2t$, то в (10) и (11) можно перейти к конечным суммам по области $1 \leq r_n \leq R$ и при этом надо только заменить $O(\delta + t^{2\alpha}/\delta^3)$ в правой части формулы (9) на $O(\delta + t^{2\alpha}/\delta^3 + t^2/R)$.

Доказательство леммы 1 проводится прямым вычислением, исходя из формулы (4). При этом достаточно использовать оценки (7), (8), формулу частичного суммирования Абеля и тот факт, что для любого $N \geq 1$ при $x \geq 1$

$$\begin{aligned} -\text{si } x &= f_N(x) \cos x + g_N(x) \sin x + \varphi_N(x), \\ f_N(x) &= \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} + \cdots + (-1)^N \frac{(2N-2)!}{x^{2N-1}}, \\ g_N(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} + \cdots + (-1)^N \frac{(2N-1)!}{x^{2N}}, \\ |\varphi_N(x)| &\leq C_N x^{-2N-1}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть строго гиперболическая группа Γ такова, что $\{r_n\} \in \Pi_\alpha$, $\alpha \equiv \alpha_\Gamma < 1$, и при $\delta = t^\alpha$

$$|S_\delta^0(t)| \leq C\delta. \quad (13)$$

Тогда в формуле Вейля (1)

$$|\Delta N(x)| \leq Cx^{\alpha/2} \quad (x \gg 1). \quad (14)$$

Используя формулу частичного суммирования и оценку (7), получаем, что

$$|P_\delta(t)| \leq c \frac{t^{2\alpha}}{\delta}, \quad |Q_\delta(t)| \leq C \frac{t^{2\alpha}}{\delta},$$

и, с учетом того, что $x = t^2 + 1/4$, оценка (14) прямо следует из (3), (9). Заметим, что если в формуле (2) $\theta < 1/2$, то $\alpha < 1$. Точнее, имеет место

Лемма 2. Если справедлива оценка (2), то $\{r_n\} \in \Pi_\alpha$ и при этом

$$\alpha = 1/2 + \theta.$$

Доказательство леммы 2 основано на том, что из (2) следуют соотношения

$$r_n = r_n^0 + \Delta r_n, \quad |\Delta r_n| = O((r_n^0)^{2\theta-1}), \quad r_n^0 = \sqrt{n/A} \quad (n \gg 1)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \Phi_0(\xi) + O(\xi^{1+2\theta}) \quad (\xi \gg 1), \\ \Phi_0(\xi) &= \sum_{r_0 \leq r_n \leq \xi} e^{ir_n^0 b} = \sum_{r_0 \leq r_n \leq \xi} e^{i2\pi f(n)}, \quad r_0 \leq C\xi^{1/2+\theta}. \end{aligned}$$

Так как при $\xi \gg 1$ в интервале $[r_0, \xi]$ справедливо равенство $|f^{(1)}(x)| < 1$ и величина $|f^{(2)}(x)|$ не меняет знак, то (см. [7]) с ошибкой $O(1)$ сумму $\Phi_0(x)$ можно заменить интегралом. Это сразу приводит к оценке $|\Phi_0(\xi)| \leq C\xi$. Предположим, что функция $G(R) = \sum_{r_n \geq R} e^{ir_n b} r_n^{-2}$ дифференцируема и допускает асимптотическое разложение вида $G(R) = C_1 R^{-1} + C_2 R^{-2} + \dots$, которое можно почленно дифференцировать. Используя формулу Абеля, получаем, что $G^{(1)}(R) = 2\Phi(R)R^{-3}$ и, следовательно, если функция G удовлетворяет указанным выше условиям, то $\alpha \leq 1/2$. В заключение отметим, что так как в сумме $\Phi(\xi)$ порядка ξ^2 слагаемых, то при $\alpha = 1/2 + \varepsilon$ эта сумма оценивается п. в. как сумма независимых случайных величин с нулевыми средними.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. Н. Berard, Math. Z., **155**:3 (1977), 249–276. [2] Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, УМН, **48**:4 (1993), 3–130. [3] D. Jakobson, I. Polterovich, J. A. Toth, *A lower bound for the remainder in Weyl's law on negatively curved surfaces*, <http://arxiv.org/abs/math/0612250>. [4] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for PSL(2, R)*, V. 1, Lecture Notes in Math., vol. 548, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976. [5] B. Randol, Bull. London Math. Soc., **13** (1981), 309–315. [6] Д. А. Попов, Функц. анализ и его прил., **46**:2 (2012), 66–82. [7] Д. А. Попов, Функц. анализ и его прил., **47**:4 (2013), 53–66. [8] А. А. Карацуба, УМН, **45**:5 (1990), 82–140.

Научно-исследовательский институт
физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
9 июля 2012 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 29.04.2014. Дата выхода в свет 20.05.2014. Формат 70 × 100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,4 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 174 экз. Заказ 109.

Учредители: Российская академия наук, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56

Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6