Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Нулевые моды для квантовой модели Лиувилля, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 14–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 05:05:40

Нулевые моды для квантовой модели Лиувилля*

© 2014. Л. Д. ФАДДЕЕВ

К столетию со дня рождения И. М. Гельфанда

Обсуждается проблема определения нулевых мод для квантовой модели Лиувилля и описывается их представление в гильбертовом пространстве.

§1. Введение и постановка задачи

Квантовая модель Лиувилля является базисным примером конформной теории поля. Она представляет собой квантование динамической системы для вещественного поля $\phi(x, t)$, заданной на цилиндре $(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\gamma} \int_0^{2\pi} (\pi^2 + \phi_x^2 + e^{2\phi}) dx$$

и канонической скобкой Пуассона

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = 0, \quad \{\pi(x), \pi(y)\} = 0, \quad \{\pi(x), \phi(y)\} = \gamma \delta(x - y)$$

в терминах начальных данных $\phi(x) = \phi(x, 0)$, $\pi(x) = \phi_t(x, 0)$. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + e^{2\phi} = 0. \quad (1)$$

В основе квантового подхода, развитого рядом авторов (см. обзор [1] и цитируемую там литературу), лежит классическая формула Лиувилля

$$e^{2\phi} = -4 \frac{f'(x-t)g'(x+t)}{(f(x-t) - g(x+t))^2} \quad (2)$$

и параметризация функций $f(x)$ и $g(x)$ через свободные поля и нулевые моды типа

$$\ln f(x) = Q - \frac{Px}{\pi} + \chi(x), \quad (3)$$

где Q и P — канонические переменные, а периодическое поле $\chi(x)$ задается осцилляторными степенями свободы. Поле $g(x)$ параметризуется аналогично с теми же P и Q . Возникает картина для соответствующего гильбертова пространства

$$\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R,$$

где $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_R$ представляют осцилляторы, а $L_2(\mathbb{R})$ является пространством нулевых мод (P, Q) . Однако на некотором этапе возникает инвариантность по отношению к отражению $P \rightarrow -P$, происхождение которой не всегда ясно.

*Работа над этой статьей частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00570-а, 11-01-12037-офи_м и программой РАН «Математические проблемы нелинейной динамики»

В данной работе, которая следует предыдущей публикации [4], я приведу аргументы для этой инвариантности и метод ее реализации в гильбертовом пространстве.

§2. Классическая теория

Уравнение (1) реализуется как соотношение нулевой кривизны

$$[\widehat{L}_1, \widehat{L}_0] = 0$$

для связности

$$\widehat{L}_1 = \frac{d}{dx} - L_1, \quad \widehat{L}_0 = \frac{d}{dt} - L_0,$$

где 2×2 -матрицы L_1 , L_0 параметризуются полем $\phi(x, t)$:

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_t & e^\phi \\ e^\phi & -\phi_t \end{pmatrix}, \quad L_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_x & -e^\phi \\ e^\phi & -\phi_x \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$T(x, t) = \begin{pmatrix} A(x, t) & B(x, t) \\ C(x, t) & D(x, t) \end{pmatrix}$$

— голономия, т. е. решение совместных уравнений

$$T_x = L_1 T, \quad T_t = L_0 T$$

с начальным условием

$$T(0, 0) = I. \tag{4}$$

Легко проверить, что проективные компоненты

$$f(x, t) = \frac{A(x, t)}{B(x, t)}, \quad g(x, t) = \frac{C(x, t)}{D(x, t)}$$

удовлетворяют уравнениям

$$f_x = f_t, \quad g_x = -g_t$$

и, таким образом,

$$f(x, t) = f(x - t), \quad g(x, t) = g(x + t).$$

Из (4) следуют начальные условия

$$f(0) = \infty, \quad g(0) = 0$$

и ограничения

$$f'(0) < 0, \quad g'(0) > 0,$$

из которых вытекает, что $f(x)$ и $g(x)$ положительны. Формула Лиувилля (2) реализуется этими функциями.

Введем для окружности $t = 0$ монодромию

$$M = T(2\pi, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Это гиперболическая унимодулярная матрица с положительными матричными элементами. Ясно, что f и g удовлетворяют условиям квазипериодичности:

$$f(x + 2\pi) = \frac{af(x) + c}{bf(x) + d}, \quad g(x + 2\pi) = \frac{ag(x) + c}{bg(x) + d}.$$

Эти условия можно упростить, если привести монодромию к диагональному виду, взяв

$$MN = ND,$$

где

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/\xi \\ \eta & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметр λ дает собственное значение монодромии, а ξ и η — ее неподвижные точки, т. е. решения квадратного уравнения

$$b\xi^2 - (a - d)\xi - c = 0, \quad a + d = \lambda + \frac{1}{\lambda}. \quad (5)$$

Леон Тахтаджян и я в 1984 г. сосчитали скобки Пуассона элементов a, b, c, d (опубликовано в 1986 г. в [5]):

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \frac{1}{2}\gamma ab, & \{a, c\} &= \frac{1}{2}\gamma ac, \\ \{d, b\} &= -\frac{1}{2}\gamma bd, & \{d, c\} &= -\frac{1}{2}\gamma cd, \\ \{b, c\} &= 0, & \{a, d\} &= \gamma bc \end{aligned}$$

(заметим, что эти соотношения легли в основу теории квантовых групп (см. [6], [7])). Из этих соотношений следует, что λ, ξ и η можно параметризовать в виде

$$\lambda = e^{-P}, \quad \xi = \alpha e^Q, \quad \eta = -\alpha e^{-Q}$$

со скобками

$$\{P, Q\} = \frac{\gamma}{2}, \quad \{P, \alpha\} = 0, \quad \{Q, \alpha\} = 0.$$

В терминах этих переменных монодромия T приобретает вид

$$M = \frac{1}{\operatorname{ch} Q} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(Q - P) & \alpha^{-1} \operatorname{sh} P \\ \alpha \operatorname{sh} P & \operatorname{ch}(Q + P) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Теперь очевидно, что для образа

$$\hat{f} = N(f) = \frac{f + \eta}{f/\xi + 1}$$

функции f относительно преобразования Мёбиуса имеем

$$\hat{f}(0) = \xi = \alpha e^Q, \quad \hat{f}(2\pi) = e^{-2P} \hat{f}(0),$$

так что

$$\ln \frac{\hat{f}(x)}{\alpha} = Q - \frac{Px}{\pi} + \chi(x),$$

где $\chi(x)$ периодична. Мы получили формулу (3). Однако элементы матрицы M положительны только при условии, что

$$P > 0.$$

Таким образом, фазовое пространство для нулевых мод P и Q представляет собой полуплоскость и его квантование следует провести корректно. Мы сделаем это после введения новых канонических переменных вместо P и Q и квантовой реализации соответствующего канонического преобразования.

Введем преобразование переменных

$$u = \frac{\operatorname{ch} Q}{\operatorname{ch}(Q - P)} = \frac{1}{a}, \quad v = \frac{\operatorname{sh}^2 P}{\operatorname{ch} Q \operatorname{ch}(Q - P)} = \frac{bc}{a},$$

которое отображает верхнюю полуплоскость (P, Q) в положительный квадрант

$$u > 0, \quad v > 0.$$

Скобки Пуассона для u и v имеют вид

$$\{u, v\} = -\gamma uv,$$

так что их логарифмы дают канонические переменные на $\mathbb{R}^2$ и их квантование тривиально.

Монодромия M приобретает вид

$$M = \begin{pmatrix} u^{-1} & \alpha \sqrt{v/u} \\ \alpha^{-1} \sqrt{v/u} & u + v \end{pmatrix},$$

и мы можем построить для нее квантовую реализацию.

§3. Квантование

Квантовым аналогом переменных u и v является вейлева пара u и v с соотношением

$$uv = q^2 vu, \quad q = e^{i\gamma/2}.$$

Переменная α остается центральным элементом. Чтобы быть ближе к обозначениям из теории автоморфных функций, положим

$$\gamma = 2\pi\tau$$

и для τ выберем параметризацию через мнимые полупериоды ω, ω' ,

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega\omega' = -\frac{1}{4},$$

лежащие на верхней мнимой полуоси.

Операторы u, v реализуются в $L_2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$uf(x) = e^{-i\pi x/\omega} f(x), \quad vf(x) = f(x + 2\omega').$$

Это существенно самосопряженные операторы с областью определения $\mathscr{D}$, состоящей из аналитических функций вида

$$e^{-\alpha x^2} e^{\beta x} P(x),$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, а $P(x)$ — полином с комплексными коэффициентами.

Квантовый аналог монодромии M после естественного упорядочивания множителей задается в виде

$$M = \begin{pmatrix} u^{-1} & \alpha q^{-1/4} u^{-1/2} v^{1/2} \\ \alpha^{-1} q^{-1/4} u^{-1/2} v^{1/2} & u + v \end{pmatrix}.$$

Наша первая задача — диагонализировать $\operatorname{tr} M$, т. е. оператор

$$L = u + u^{-1} + v.$$

Этот оператор сейчас хорошо известен, он имеет много интерпретаций. Например, в квантовой теории Тейхмюллера ([8], [9]) он называется длиной геодезической, в теории разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений модулярного дубля квантовой теории групп $SL_q(2, \mathbb{R})$ он появляется как главная часть соответствующего оператора Казимира [10]. Спектральная теория для оператора L исследовалась Кашаевым [11].

Оператор L имеет однократный непрерывный спектр, сосредоточенный на полуоси $2 < \lambda < \infty$. Соответствующие обобщенные собственные функции явно выражаются через функцию

$$\gamma(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{\sin \omega t \sin \omega' t} \frac{dt}{t} \right\},$$

где сингулярность при $t = 0$ обходится сверху. Эта функция получила большое распространение в последние 10 лет. Я предложил назвать ее квантовым дилогарифмом [12]. Подробное описание ее свойств можно найти в [13]. В приложении приводятся некоторые ее свойства, используемые в этой работе.

Основное свойство — функциональное уравнение

$$\frac{\gamma(x + \omega')}{\gamma(x - \omega')} = 1 + e^{-i\pi x/\omega} \quad (7)$$

позволяет утверждать, что обобщенная функция

$$\psi(x, s) = \gamma(x - s - \omega'' + i0) \gamma(x + s - \omega'' + i0) e^{-i\pi(x - \omega'')^2}$$

при $s \in \mathbb{R}$ является собственной функцией оператора L с собственным значением

$$e^{i\pi s/\omega} + e^{-i\pi s/\omega} = 2 \cos \pi s/\omega.$$

Здесь

$$\omega'' = \omega + \omega'.$$

Функция $\gamma(z - \omega'')$ имеет полюс при $z = 0$, и слагаемое $+i0$ характеризует его обход.

Кашаев [11] доказал свойства ортонормированности и полноты

$$\begin{aligned} \int \overline{\psi(x, s)} \psi(x, s') dx &= \frac{1}{\rho(s)} (\delta(s - s') + \delta(s + s')), \\ \int_0^\infty \psi(x, s) \overline{\psi(y, s)} \rho(s) ds &= \delta(x - y), \end{aligned}$$

где мера $\rho(s)$ имеет вид

$$\rho(s) = -4 \sin \frac{\pi s}{\omega} \sin \frac{\pi s}{\omega'}. \quad (8)$$

Мы делаем естественный вывод: гильбертово пространство для диагонального представления оператора P — это $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$.

Посмотрим теперь, как выглядит недиагональный элемент матрицы M в этом представлении. Обозначим через U интегральный оператор с ядром $\psi(x, s)$, связывающий пространства $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ и $L_2(\mathbb{R})$. Пусть r и Z задают вейлеву пару в пространстве функций $F(s)$ на всей оси $-\infty < s < \infty$ (в дальнейшем нам надо следить, какие комбинации r и Z имеют смысл в $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$):

$$rF(s) = F(s + \omega'), \quad Zf = e^{i\pi s/\omega} F(s).$$

Из функционального уравнения (7) получаем, что интегральные операторы $v^{1/2}Ur$ и $v^{1/2}Ur^{-1}$ имеют ядра

$$\psi(x + \omega', s - \omega') = \left(1 - \frac{u}{Z}\right) \frac{1}{i} q^{-1/2} u^{-1/2} \psi(x, s),$$

$$\psi(x + \omega', s + \omega') = (1 - uZ) \frac{1}{i} q^{-1/2} u^{-1/2} \psi(x, s),$$

откуда

$$q^{1/4} u^{-1/2} v^{1/2} U = U \frac{1}{i} (Z - Z^{-1})(r - r^{-1})^{-1}.$$

Оператор в правой части имеет смысл в пространстве четных функций и самосопряжен в $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$.

Итак, мы получили новое представление для элементов матрицы монодромии:

$$U^{-1}(a + d)U = Z + Z^{-1}, \quad U^{-1}bU = \frac{\alpha}{i} (Z - Z^{-1}) \frac{1}{r - r^{-1}}.$$

Поучительно сравнить эти квантовые формулы с классическими из (6):

$$a + d = 2 \operatorname{ch} P, \quad b = \alpha \frac{\operatorname{sh} P}{\operatorname{ch} Q}.$$

Естественно отождествить Z с e^P , а r^{-1} с e^Q , однако $\operatorname{ch} Q$ в классическом случае заменяется на $i \operatorname{sh} Q$, что соответствует сдвигу Q на $i\pi/2$. Решить аналог квадратного уравнения (5) для нахождения представления операторов u и v мне не удалось. Впрочем, для этой работы это не нужно.

§4. Коэффициент отражения

Естественно желание избавиться от меры $\rho(s)$ и найти реализацию операторов P и b в обычном пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Ясно, что эта реализация должна получиться только в подпространстве. Мы покажем, что можно построить соответствующий проектор в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}(I + KS),$$

где K — оператор отражения,

$$KF(s) = F(-s),$$

а оператор S является умножением на множитель $S(s)$, такой, что

$$\overline{S(s)} = S(-s) = S^{-1}(s).$$

Этот множитель естественно назвать коэффициентом отражения.

Для вывода заметим, что меру $\rho(s)$ можно факторизовать в виде

$$1/\rho(s) = M(s)M(-s),$$

где

$$M(s) = \operatorname{const} e^{-2i\pi s(s-\omega'')} \gamma(2s - \omega'');$$

здесь const можно выбрать так, что выполняется соотношение

$$\overline{M(s)} = M(-s),$$

если использовать соотношения (11), (13) из приложения. Явный вид этого множителя не будет существенным для нас в дальнейшем.

Из функционального уравнения (7) следует, что

$$M(s + \omega') = M(s) \frac{1}{i} (Z - Z^{-1}), \quad (9)$$

$$M(s - \omega') = M(s) i (q^{-1} Z - q Z^{-1})^{-1}. \quad (10)$$

Введем оператор

$$V = U \frac{1}{M(s)}.$$

Его образ состоит из функций $F(s)$, удовлетворяющих уравнению

$$F(-s) = S(s)F(s),$$

где

$$S(s) = \frac{M(s)}{M(-s)},$$

и, таким образом, лежащих в подпространстве

$$\text{PL}_2(\mathbb{R}),$$

которое и является естественным гильбертовым пространством для нулевой моды P .

Оператор $b^{-1} = q^{1/4} u^{1/2} v^{-1/2}$ проносится через V при использовании соотношений (9), (10):

$$b^{-1}V = U(r - r^{-1})(Z - Z^{-1})^{-1} \frac{1}{M(s)} = V \left(r^{-1} + \frac{1}{Z - Z^{-1}} r \frac{1}{Z - Z^{-1}} \right).$$

Именно эта формула была предложена в [4] из квазиклассических соображений. Здесь мы дали ее полный квантовый вывод.

Итак, мы построили естественное квантовое пространство для нулевых мод P и Q . Заметим, что в других работах, [14], [15], предложена другая реализация гильбертова пространства для нулевых мод и коэффициент отражения выражается через классическую Γ -функцию. Факторизация типа (8) меры $\rho(s)$ имеет смысл для этого коэффициента отражения. Однако вид оператора Q остается неопределенным. Было бы интересно установить более тесный контакт между этими подходами.

§5. Эволюция

В работе [4] показано, что при дискретном сдвиге времени

$$t \rightarrow t + \pi$$

нулевые моды P и Q преобразуются простым образом:

$$P \rightarrow P, \quad Q \rightarrow P + Q.$$

Это связано с тем, что дискретная эволюция функций $\hat{f}$ и $\hat{g}$ соответствует левому и правому движениям, при которых осциллирующие компоненты не меняются.

В терминах u и v эта эволюция выглядит следующим образом:

$$u \rightarrow u + v, \quad v \rightarrow u^{-1}v(u + v)^{-1},$$

и мы будем считать, что это верно и в квантовом случае с указанием порядка множителей. Найдем соответствующий оператор эволюции K :

$$K^{-1}uK = u + v, \quad K^{-1}vK = u^{-1}v(u + v)^{-1}.$$

Проще вычислить оператор K^{-1} :

$$(u + v)K^{-1} = K^{-1}u, \quad Ku^{-1}vK^{-1} = K^{-1}vu.$$

Этот порядок множителей имеет смысл и в квантовом случае.

Используя функциональное уравнение (7), нетрудно показать, что унитарный оператор K^{-1} имеет ядро

$$K^{-1}(x, y) = e^{2\pi ixy} \gamma(x - y - \omega'').$$

Покажем, что $\psi(x, s)$ является собственной функцией оператора K . Имеем

$$K^{-1}\psi = \int e^{2\pi ixy} \gamma(x - y - \omega'') \gamma(y + s - \omega'') \gamma(y - s - \omega'') e^{-i\pi(y - \omega'')^2} dy = I(x, s).$$

Интеграл в правой части берется с использованием одного из вариантов так называемого β -интеграла (см., например, [13]).

Начнем с того, что по свойству отражения функцию $\psi(x, s)$ можно переписать в виде

$$\psi(x, s) = c(s) \frac{\gamma(x + s - \omega'')}{\gamma(s - x + \omega'')} e^{2\pi isx},$$

где

$$c(s) = \beta e^{-i\pi s^2}.$$

Теперь используем интегральное представление (15) (см. приложение):

$$\frac{\gamma(x - y - \omega'')}{\gamma(s - y + \omega'')} = \frac{c}{\gamma(s - x + \omega'')} \int \frac{\gamma(s - x + \omega'' + z)}{\gamma(z + \omega'')} e^{2\pi iz(x - y)} dz.$$

Далее по (17) имеем

$$\int \gamma(y + s - \omega'') e^{2\pi i(x - z - s)} dy = c \frac{1}{\gamma(z - x + s + \omega'')},$$

так что множители $\gamma(s - x + \omega'' - z)$ сокращаются. В результате

$$I(x, s) = c^2 c(s) \frac{e^{2\pi is^2}}{\gamma(s - x + \omega'')} \int \frac{e^{2\pi iz(x + s)}}{\gamma(z + \omega'')} dz = c^2 e^{2\pi is^2} \psi(x, s),$$

если использовать (16). Итак, функция Кашаева $\psi(x, s)$ является собственной функцией оператора K^{-1} с собственным значением $c^2 e^{2\pi is^2}$. Постоянный множитель c^2 можно опустить при описании оператора эволюции, которая в нашем представлении — просто умножение на $e^{-2\pi is^2}$, так что

$$K^{-1}ZK = Z, \quad K^{-1}rK = e^{2\pi is^2} e^{-2\pi i(s + \omega')^2} r = q^{1/2} e^{i\pi s/\omega} r = q^{1/2} Zr.$$

Именно эта эволюция была получена в [4].

§6. Заключение

Итак, мы показали, что естественное включение нулевых мод в матрицу монокромии оператора $\hat{L}_1$ дает описание гильбертова пространства и эволюции для квазимомента P .

§7. Приложение

Свойства модулярного квантового дилогарифма подробно описаны в статье [13] (а также во многих других местах). В нашей работе мы используем помимо функционального уравнения (7) следующие свойства.

Соотношения отражения

$$\gamma(z)\gamma(-z) = \beta e^{i\pi z^2}, \quad \beta = e^{(i\pi/12)(\tau+1/\tau)}. \quad (11)$$

Положение первого полюса

$$\gamma(z + \omega'') = \frac{c}{z}, \quad c = -\frac{2}{2\pi i \beta} e^{-i\pi/4}. \quad (12)$$

«Вещественность»

$$\overline{\gamma(z)} = \frac{1}{\gamma(\bar{z})}. \quad (13)$$

Асимптотика

$$\gamma(z) \rightarrow 1 \quad (14)$$

в секторе $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$.

Интегральное тождество

$$\frac{\gamma(t+a)}{\gamma(t+b)} = \frac{c}{\gamma(b-a-\omega'')} \int \frac{\gamma(b-a-\omega''+z)}{\gamma(z+\omega'')} e^{2\pi i z(t+a+\omega'')} dz, \quad (15)$$

предел при $b \rightarrow \infty$

$$\gamma(t+a) = c \int \frac{e^{2\pi i z(t+a+\omega'')}}{\gamma(z+\omega'')} dz \quad (16)$$

и его обращение

$$\int \gamma(t+a) e^{-2\pi i t s} dt = c \frac{e^{2\pi i s(a+\omega'')}}{\gamma(s+\omega'')}. \quad (17)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J.-L. Gervais, J. Schnittger, *The many faces of the quantum Liouville exponentials*, Nuclear Phys. B, **413** (1994), 433–457; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9308134>.
- [2] J. Teschner, *A Lecture on the Liouville vertex operators*, Internat. J. Modern. Phys. A, **19** (2004), May, suppl., 436–458; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0303150>.
- [3] O. Babelon, *Universal exchange algebra for Bloch waves and Liouville theory*, Comm. Math. Phys., **139**:3 (1991), 619–643.
- [4] L. D. Faddeev, A. Y. Volkov, *Discrete evolution for the zero-modes of the quantum Liouville model*, J. Phys. A, **41** (2008), no. 19, 194008; <http://arxiv.org/abs/0803.0230>.
- [5] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Liouville model on the lattice*, in: Lecture Notes in Phys., vol. 246, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 166–179.
- [6] В. Г. Дринфельд, *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера*, Докл. АН СССР, сер. физ., **283**:5 (1985), 1060–1064.
- [7] Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ, **1** (1989), 178–206.
- [8] R. M. Kashaev, *On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory*, <http://arxiv.org/abs/math/0008148>.
- [9] В. В. Фок, Л. О. Чехов, *Квантовые пространства Тейхмюллера*, ТМФ, **120**:3 (1999), 511–528; <http://arxiv.org/abs/math/9908165>.

- [10] S. E. Derkachov, L. D. Faddeev, *3j-symbol for the modular double of $SL_q(2, R)$ revisited*, <http://arxiv.org/abs/1302.5400>.
- [11] R. M. Kashaev, *The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory*, in: Integrable structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory (Kiev, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 35, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 211–221.
- [12] L. D. Faddeev, *Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys., **34**:3 (1995), 249–254; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9504111>.
- [13] A. Y. Volkov, *Noncommutative hypergeometry*, Comm. Math. Phys., **258**:2 (2005), 257–273; <http://arxiv.org/abs/math/0312084>.
- [14] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Conformal bootstrap in Liouville field theory*, Nuclear Phys. B, **477**:2 (1996), 577–605; <http://arxiv.org/abs/hep-th/9506136>.
- [15] G. Jorjadze, G. Weigt, *Zero mode problem of Liouville field theory*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0207041>.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
13 января 2014 г.