Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Денисов, К вопросу равносходимости для одномерного оператора Шрёдингера с равномерно локально суммируемым потенциалом, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 71–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:42:35

УДК 517.984.52

К вопросу равносходимости для одномерного оператора Шрёдингера с равномерно локально суммируемым потенциалом*

© 2000. С. А. ДЕНИСОВ

Рассматривается оператор Шрёдингера на всей оси с действительным и равномерно локально суммируемым потенциалом $q(x)$ ($q(x) \in L_{\text{loc}, \text{unif}}(\mathbb{R})$):

$$l(u) = -u'' + q(x)u, \quad \|q\|_K \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_y^{y+1} |q(x)| dx < \infty. \quad (1)$$

В этой заметке мы покажем, что выполнение указанного условия для потенциала $q(x)$ позволяет существенно улучшить известную теорему Б. М. Левитана [1] о равносходимости спектральных разложений с интегралами Фурье. В первом разделе введены некоторые обозначения и получена оценка приращения спектральной функции на диагонали, играющая ключевую роль в обосновании теоремы о равносходимости, которая приведена во второй части работы.

1. Приращение на диагонали спектральной функции. Из результатов М. Истэма [2] следует, что минимальный оператор, отвечающий дифференциальному выражению $l(u)$, является существенно самосопряженным. Кроме того (см. [3]), соответствующий самосопряженный оператор H полуограничен снизу некоторым числом λ_0 . Введем в рассмотрение спектральную функцию $e(x, y, \lambda)$, которая является ядром ортогонального проектора $P_{[\lambda_0, \lambda]}$ для оператора H . Известно следующее представление функции $e(x, y, \lambda)$:

$$e(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \int_{\lambda_0}^{\lambda} u_j(x, t) u_j(y, t) dp(t), \quad (2)$$

где $u_j(x, t)$ — обобщенные собственные функции, а $p(t)$ — спектральная мера.

Исследованию поведения спектральной функции посвящены многие работы (см., например, [4, 5]). Основным результатом первого параграфа нашей заметки является

ТЕОРЕМА 1. *Если $q \in L_{\text{loc}, \text{unif}}(\mathbb{R})$, то справедлива оценка $e(x, x, \lambda + 1) - e(x, x, \lambda) = O(\lambda^{-1/2})$, равномерная по $x \in \mathbb{R}$.*

Отличительной чертой приведенного ниже доказательства является использование методов функционального анализа, тогда как во многих работах других авторов (см., например, [1, 5]) применялись, как правило, теоремы типа Планшереля для разложения по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно неравенство

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\lambda}^{\lambda+1} u_j(x, t)^2 dp(t) \leq (k^2 + 1) \sum_{j=1}^2 \int_{\lambda_0}^{\lambda+1} \frac{u_j(x, t)^2}{(t - \lambda)^2 + k^2} dp(t), \quad (3)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 96-15-96097 и грантом фонда Дж. Сороса 2270.

где k — положительная константа.

Рассмотрим оператор $A = (H - \lambda + ik)^{-1}P_{[\lambda_0, \lambda+1]}(H - \lambda - ik)^{-1}$.

Для $f \in C_0^\infty$

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x, y) dx, \quad \text{где } K(x, y) = \sum_{j=1}^2 \int_{\lambda_0}^{\lambda+1} \frac{u_j(x, t)u_j(y, t)}{(t - \lambda)^2 + k^2} dp(t). \quad (4)$$

Известно, что $K(x, y)$ — функция, ограниченная и непрерывная по $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (см. [5]). Поэтому $\|A\|_{1, \infty} = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |K(x, y)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} K(x, x)$. Таким образом, в силу формул (3) и (4) нам остается оценить $\|A\|_{1, \infty}$.

Для этого мы воспользуемся неравенством

$$\|A\|_{1, \infty} \leq \|(H - \lambda + ik)^{-1}\|_{2, \infty} \|P_{[\lambda_0, \lambda+1]}\|_{2, 2} \|(H - \lambda - ik)^{-1}\|_{1, 2}.$$

В силу принципа двойственности достаточно доказать, что¹

$$\|(H - \lambda + ik)^{-1}\|_{2, \infty} \lesssim \lambda^{-1/4}.$$

Запишем второе резольвентное тождество:

$$(H - \lambda + ik)^{-1} = (H_0 - \lambda + ik)^{-1} - (H_0 - \lambda + ik)^{-1}q(H - \lambda + ik)^{-1}, \quad (5)$$

где H_0 отвечает невозмущенному оператору.

Далее, полагая $z = \lambda - ik$ и используя явный вид интегрального ядра оператора $(H_0 - z)^{-1}$, несложно получить следующие оценки:

$$|(H_0 - \lambda + ik)^{-1}f| \lesssim \frac{\|f\|_2}{\lambda^{1/4}},$$

$$|(H_0 - \lambda + ik)^{-1}qf| \leq \frac{\|f\|_\infty \|q\|_K}{(\lambda^2 + k^2)^{1/4}} \left(2 + 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{k}}\right) \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty,$$

которые справедливы при $k > \max(4, 64\|q\|_K^2)$ и $\lambda > \Lambda_0(k)$, где $\Lambda_0(k)$ достаточно велико.

Поэтому оператор $(1 + (H_0 - \lambda + ik)^{-1}q)^{-1}$ существует на (L_∞, L_∞) , и его норма равномерно ограничена по λ . Из (5) следует неравенство

$$\|(H - \lambda + ik)^{-1}\|_{2, \infty} \leq \| [1 + (H_0 - \lambda + ik)^{-1}q]^{-1} \|_{\infty, \infty} \|(H_0 - \lambda + ik)^{-1}\|_{2, \infty} \lesssim \lambda^{-1/4},$$

которое завершает доказательство теоремы.

Недавно Б. Саймоном [6] был построен пример одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом, убывающим сколь угодно медленнее, чем $1/(1 + |x|)$, и при этом на непрерывном спектре существует всюду плотная последовательность собственных значений. Используя теорему 1, несложно получить следующее утверждение:

СЛЕДСТВИЕ. Если f_{λ_n} — собственные функции, отвечающие собственным значениям $\lambda_n \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющие условию $\|f_{\lambda_n}\|_2 = 1$, то справедлива оценка $|f_{\lambda_n}| \lesssim \lambda_n^{-1/4}$.

2. Теорема о равносходимости. Введем в рассмотрение спектральный проектор $P_{[\lambda_0, \lambda]}$, отвечающий оператору H . Действие такого проектора на функцию из $L_2(\mathbb{R})$ иногда называют спектральным разложением этой функции.

¹Будем использовать следующее обозначение: $m_1(v) \lesssim m_2(v)$, если для функционалов m_1 и m_2 существует константа C , такая, что $|m_1(v)| \leq C|m_2(v)|$ для всех элементов v .

В работе [1] Б. М. Левитаном рассматривался случай локально суммируемого потенциала $q(x)$, т. е. потенциала, суммируемого по Лебегу на произвольном отрезке вещественной прямой. При этом фактически была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено равенство $|P_{(-\infty, \lambda]} f - P_{[0, \lambda]}^\circ f| = o(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ ¹, причем стремление к нулю равномерно внутри каждого конечного интервала вещественной прямой.*

Впоследствии В. А. Ильиным [7] рассматривался случай равномерно локально суммируемого потенциала и доказывались утверждения о равносходимости. В настоящей работе получена теорема, которая существенно улучшает один из его результатов.

ТЕОРЕМА 2. *Если $q \in L_{\text{loc}, \text{unif}}(\mathbb{R})$, то справедлива оценка $\|P_{[\lambda_0, \lambda]} - P_{[0, \lambda]}^\circ\|_{2, \infty} \lesssim \lambda^{-1/4}$.*

Обоснование этого утверждения может быть получено с помощью некоторой модификации доказательства аналогичной теоремы из работы [8]. Существенную роль при этом играет теорема 1 из первого раздела настоящей заметки.

В заключение, хочу выразить благодарность В. А. Ильину, Л. В. Крицкову и Е. И. Моисееву за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **19**, № 1, 33–58 (1955).
2. Eastham M. Bull. Lond. Math. Soc., **7**, 340–344 (1972).
3. Цикон Х., Фрезе Р., Курш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Мир, М., 1990.
4. Шенк Д., Шубин М. А. Функциональный анализ и его прил., **20**, вып. 1, 89–90 (1986).
5. Ильин В. А., Крицков Л. В. Дифференц. уравнения, **31**, № 8, 1323–1329 (1995).
6. Simon B. Proc. Amer. Math. Soc., **125**, No. 1, 203–208 (1997).
7. Ильин В. А. Дифференц. уравнения, **31**, № 12, 1957–1967 (1995).
8. Денисов С. А. Дифференц. уравнения, **34**, № 8, 1043–1048 (1998).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: saden@cs.msu.su

Поступило в редакцию
23 сентября 1998 г.

УДК 515.1

Соотношения из теории Морса для диаграмм Кокстера–Дынкина*

© 2000. Г. Г. Ильюта

Аналогии между различными понятиями и конструкциями могут стать источником новых математических утверждений и гипотез. Исходя из прямого соответствия между геометрией торического многообразия и комбинаторикой соответствующего этому многообразию веера, А. Г. Хованский объяснил известные соотношения для простых многогранников в терминах теории Морса [3]. В этой статье подобные соотношения сопоставлены любой диаграмме

¹Здесь $P_{[0, \lambda]}^\circ f$ — спектральное разложение для невозмущенного оператора, т. е. разложение в интеграл Фурье.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-98-01-00612 и INTAS-96-0713.