Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Сулейманов, «Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 52–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:59:15

«Квантования» высших гамильтоновых аналогов уравнений Пенлеве I и II с двумя степенями свободы*

© 2014. Б. И. СУЛЕЙМАНОВ

Построено решение аналога уравнения Шрёдингера, определяемого гамильтонианом $H_1(z, t, q_1, q_2, p_1, p_2)$ второго члена P_1^2 иерархии первого уравнения Пенлеве. После явной замены оно задается решением систем линейных уравнений, условием совместности которых является нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение P_1^2 по независимой переменной z . Результат этой замены удовлетворяет также аналогу уравнения Шрёдингера, определяемого гамильтонианом $H_2(z, t, q_1, q_2, p_1, p_2)$ гамильтоновой системы с независимой переменной t , которая совместна с уравнением P_1^2 . Показано, что схожая ситуация имеет место для представителя P_2^2 иерархии второго уравнения Пенлеве.

Для всех шести обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Пенлеве $q_{zz} = f(z, q, q_z)$ решения соответствующих им пар линейных систем метода изомонодромных деформаций (ИДМ) из статьи Гарнье [1] с помощью явной замены задают ([3], [2]) решения уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi = H \left(z, x, -\frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \quad (1)$$

(см. также начало заключения данной статьи). Эти уравнения определяются квадратичными по импульсам p гамильтонианами $H = H(z, q, p)$ гамильтоновых систем $q'_z = H'_p(z, q, p)$, $p'_z = -H'_q(z, q, p)$, исключение из которых p дает шесть ОДУ Пенлеве. Из уравнений Шрёдингера

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \Psi = H \left(z, x, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi, \quad (2)$$

зависящих от постоянной Планка $\hbar = 2\pi\hbar = -2\pi i\varepsilon$, эти шесть эволюционных уравнений (1) получаются в результате формальной замены $\varepsilon = 1$. (Для случаев уравнений Пенлеве III и V в формулах работ [3], [2] содержатся неточности. Но они легко поправимы.)

Отметим, что для ОДУ, получающихся из первого и второго уравнений Пенлеве, соответствующие уравнения ИДМ после растяжений переходят в совместные системы линейных ОДУ, которые при произвольном фиксированном комплексном числе ε задают точные решения уравнений (2), определяемых гамильтонианами H , зависящими от ε . Поясним сказанное.

Пара уравнений ИДМ Гарнье [1] для ОДУ (a_j — произвольные постоянные)

$$\lambda_{\tau\tau} = a_4(2\lambda^3 + \tau\lambda) + a_3(6\lambda^2 + \tau) + a_2\lambda + a_1, \quad (3)$$

*Работа выполнена при поддержке РНФ, грант 14-11-00078.

частными случаями которого являются первое и второе уравнения Пенлеве, имеет вид

$$W_{yy} = P(\tau, y)W, \quad W_\tau = B(\tau, y)W_y - \frac{1}{2}B_y(\tau, y)W, \quad (4)$$

где

$$B(\tau, y) = \frac{1}{2(y-\lambda)}, \quad P(\tau, y) = a_4[y^4 - \lambda^4 + \tau(y^2 - \lambda^2)] + 2a_3[2(y^3 - \lambda^3) + \tau(y - \lambda)] + a_2(y^2 - \lambda^2) + 2a_1(y - \lambda) + (\lambda')^2 - \frac{\lambda'}{y - \lambda} + \frac{3}{4(y - \lambda)^2}.$$

Уравнения (4) с такими коэффициентами $B(\tau, y)$ и $P(\tau, y)$ совместны на решениях $\lambda(\tau)$ ОДУ (3). Замена $V = \sqrt{(y - \lambda)}W$ систему (4) переводит в уравнения

$$V_{yy} = \frac{V_y}{y - \lambda} - \left[P - \frac{3}{4(y - \lambda)^2} \right] V, \quad V_\tau = \frac{V_y - \lambda' V}{2(y - \lambda)}. \quad (5)$$

Из них следует, что для их совместного решения $V(\tau, y)$ справедливо тождество

$$V_\tau = \frac{V_{yy}}{2} - \left[\frac{a_4}{2}(y^4 + \tau y^2) + a_3(2y^3 + \tau y) + \frac{a_2}{2}y^2 + a_1z + H(\tau, \lambda(\tau), \lambda'(\tau)) \right] V. \quad (6)$$

Здесь функция $H(\tau, \lambda(\tau), \lambda'(\tau))$ при $\lambda = \lambda(\tau)$ и $\mu = \lambda'(\tau)$ совпадает с гамильтонианом

$$H = \frac{\mu^2}{2} - \frac{a_4}{2}(\lambda^4 + \tau\lambda^2) - a_3(2\lambda^3 + \tau\lambda) - \frac{a_2}{2}\lambda^2 - a_1\lambda \quad (7)$$

гамильтоновой системы $\lambda'_\tau = H'_\mu(\tau, \lambda, \mu)$, $\mu'_\tau = -H'_\lambda(\tau, \lambda, \mu)$, эквивалентной ОДУ (3). Преобразованием $\Psi = \exp\left(\int_{\tau_*}^\tau H(\nu, \lambda(\nu), \mu(\nu)) d\nu\right)V$ тождество (6) сводится к эволюционному уравнению вида (1)

$$\Psi_\tau = \frac{\Psi_{yy}}{2} - \left[\frac{a_4}{2}(y^4 + \tau y^2) + a_3(2y^3 + \tau y) + \frac{a_2}{2}y^2 + a_1y \right] \Psi,$$

определяемому гамильтонианом (7). Последнее же в результате растяжений

$$z = \varepsilon\tau, \quad x = \varepsilon y, \quad q = \varepsilon\lambda$$

переходит в уравнение вида (2)

$$\varepsilon\Psi_z = \frac{\varepsilon^2\Psi_{xx}}{2} - \left[\frac{a_4}{2}\left(\frac{x^4}{\varepsilon^4} + \frac{zx^2}{\varepsilon^3}\right) + a_3\left(\frac{2x^3}{\varepsilon^3} + \frac{zx}{\varepsilon^2}\right) + \frac{a_2}{2}\frac{x^2}{\varepsilon^2} + a_1\frac{x}{\varepsilon} \right] \Psi,$$

определяемое гамильтонианом

$$H(z, q, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{a_4}{2}\left(\frac{q^4}{\varepsilon^4} - \frac{zq^2}{\varepsilon^3}\right) - a_3\left(\frac{2q^3}{\varepsilon^3} - \frac{zq}{\varepsilon^2}\right) - \frac{a_2}{2}\frac{q^2}{\varepsilon^2} - a_1\frac{q}{\varepsilon}.$$

Следуя терминологии [4], уравнения типа уравнений Шрёдингера (2) с постоянными ε , не связанными с $\hbar$, мы называем в этой статье «квантованиями». (При $\varepsilon = 1$ они используются, например, при описании фильтрации процессов диффузии ([5], [6]).)

Дальнейшее развитие результаты работ [3], [2] получили в работах [4], [7]–[11]. Но вопрос о подобных «квантованиях» для высших аналогов уравнений

Пенлеве до сих пор не изучался. Ниже такие «квантования» приводятся для совместных решений уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t = -uu_z - u_{zzz} \quad (8)$$

и нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ)

$$-iu_t = u_{zz} + 2\delta|u|^2u \quad (\delta = \text{const} \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

с ОДУ, определяемыми суммами стационарных частей первых высших автономных симметрий уравнений (8), (9) и их симметрий Галилея. Эти высшие аналоги ОДУ Пенлеве I и II эквивалентны двум парам совместных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы по независимым переменным z и t .

§1. Член P_1^2 иерархии уравнения Пенлеве I

1.1. Первым высшим представителем P_1^2 иерархии изомонодромных нелинейных ОДУ P_1^n уравнения Пенлеве I, называемых также массивными $(2n+1, 2)$ -струнными уравнениями ([12], [13]), является уравнение

$$u_{zzzz} + \frac{5}{3}uu_{zz} + \frac{5}{6}u_z^2 + \frac{5}{18}(z - tu + u^3) = 0, \quad t = \text{const}. \quad (10)$$

Интерес к ОДУ (10) в первую очередь связан с тем, что оно обладает специальным решением $u(z, t)$, возникающим при исследовании самых разных задач математической физики. В частности [14], это решение совпадает с решением Гуревича–Питаевского (ГП) уравнения КдФ (8), введенным в рассмотрение в [15] в качестве функции, универсальным образом описывающей влияние малых дисперсионных добавок на опрокидывание простых волн в нелинейной гидродинамике. (В главном порядке асимптотика специального решения ГП при $t \rightarrow \infty$ описана в известной работе [16]. Результаты из [16] уточнены в [14], [17]–[22], в [23] доказана его гладкость, в [20] поведение решения ГП промоделировано численно.) Подобную же роль эта специальная функция играет не только в случае простых волн, но и для решений общего положения двухкомпонентных гидродинамических систем с малой дисперсией ([17], [18], [24]–[26]). Ряд конкретных двухкомпонентных систем, большей частью неинтегрируемых, решения которых подтверждают справедливость последнего утверждения, описан в [18]; см. также [20], [25], [26]. А согласно гипотезе, сформулированной Дубровиным в [25], [26], решение ГП для задач с малой дисперсией должно играть еще более универсальную роль. Кроме того ([14], [20]), эта же нелинейная специальная функция изучалась в [27], [28] в связи с задачами квантовой теории гравитации.

1.2. Совместные решения уравнений (8) и (10) относятся к классу изомонодромных решений уравнений нулевой кривизны [29]. Эти уравнения есть условие совместности линейных систем (всюду далее нижний индекс при u означает порядок производной u по переменной z)

$$\Phi_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta - u/6 & 0 \end{pmatrix} \Phi, \quad \Phi_t = \begin{pmatrix} u_1/6 & -u/3 - 4\zeta \\ u_2/6 + u^2/18 + \zeta u/3 - 4\zeta^2 & -u_1/6 \end{pmatrix} \Phi, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{1728} \Phi_\zeta = & \left(\frac{4\zeta u_1 + u_3 + uu_1}{96} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\zeta^2 + \frac{\zeta u}{12} + \frac{u_2}{48} + \frac{u^2}{96} - \frac{5t}{288} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \left(\zeta^3 - \frac{\zeta^2}{12} - \zeta \frac{6u_2 + u^2 + 5t}{288} + \frac{u_2 u}{288} - \frac{u_1^2}{576} + \frac{u^3}{864} + \frac{5z}{1728} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \Phi. \quad (12) \end{aligned}$$

Замечание 1. Системы (11), (12), взятые из статьи [23], простыми заменами сводятся к трем линейным системам, выписанным ранее в [14].

При этом имеет место система ОДУ, состоящая из (8) и уравнений

$$\begin{aligned} (u_1)_t &= \frac{2}{3}uu_2 - \frac{1}{6}u_1^2 + \frac{5}{18}(z - tu + u^3), \\ (u_2)_t &= \frac{2}{3}uu_3 + \frac{1}{3}u_1u_2 + \frac{5}{18}(1 - tu_1 + 3u_1u^2), \\ (u_3)_t &= u_3u_1 + \frac{1}{3}(u_2)^2 - \frac{5}{18}u^2u_2 + \frac{10}{9}u(u_1)^2 - \frac{5}{27}(u^4 - tu^2 + zu) - \frac{5}{18}tu_2. \end{aligned} \quad (13)$$

ОДУ (10) и данная система ОДУ эквивалентны гамильтоновым системам с двумя степенями свободы — соответственно системам

$$(q_j)'_z = (H_1)'_{p_j}, \quad (p_j)'_z = -(H_1)'_{q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (14)$$

$$(q_j)'_t = (H_2)'_{p_j}, \quad (p_j)'_t = -(H_2)'_{q_j} \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

с квадратичными по импульсам p_j гамильтонианами

$$H_1(z, t, q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1p_2 - \frac{5q_1^4}{8} + \frac{5q_2q_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{2} - \frac{5tq_1^2}{36} + \frac{5zq_1}{108}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} H_2(z, t, q_1, q_2, p_1, p_2) = & -\frac{p_1^2}{2} - q_1p_1p_2 + (q_2 - \frac{5t}{36})p_2^2 + \frac{5p_2}{108} \\ & + \frac{q_1^5}{2} - 2q_1q_2^2 - \frac{5tq_1^3}{36} + \frac{5tq_1q_2}{18} - \frac{5zq_1^2}{216} - \frac{5zq_2}{108}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $q_1 = u/6$, $q_2 = u_2/6 + 5u^2/72$, $p_1 = u_3/6 + 5uu_1/36$, $p_2 = u_1/6$ (эти формулы получены, исходя из аналогии с формулами (5.1.7)–(5.1.10) статьи [30] для двухзонных решений уравнения КдФ). Ниже показано, что каждое решение системы (11), (12) задает решение уравнений ($\varepsilon = 5/54$)

$$\varepsilon \Psi_z = \varepsilon^2 \Psi_{xy} + \left[-\frac{5x^4}{8} + \frac{5x^2y}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{5tx^2}{36} + \frac{5zx}{108} \right] \Psi, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Psi_t = & \varepsilon^2 \left[-\frac{\Psi_{xx}}{2} - x\Psi_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(y - \frac{5t}{36} \right) \Psi_y \right) + \left(y - \frac{5t}{36} \right) \frac{\Psi_{yy}}{2} \right] - \varepsilon \frac{5\Psi_y}{108} \\ & + \left[\frac{x^5}{2} - 2xy^2 - \frac{15tx^3}{36} + \frac{5txy}{18} - \frac{5zx^2}{216} - \frac{5zy}{108} \right] \Psi, \end{aligned} \quad (19)$$

являющихся «квантованиями», определяемыми гамильтонианами (16) и (17); после формальных замен $q_1 \rightarrow x$, $q_2 \rightarrow y$ и $p_1 \rightarrow -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$, $p_2 \rightarrow -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y}$ их можно символически записать в виде

$$\varepsilon \Psi_z = H_1 \left(z, t, x, y, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi, \quad \varepsilon \Psi_t = H_2 \left(z, t, x, y, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi. \quad (20)$$

1.3. Фундаментальные решения ОДУ (11), (12) задают 2×2 -матрицы

$$M(z, t, \eta, \zeta) = \Phi^{-1}(z, t, \eta) \Phi(z, t, \zeta), \quad (21)$$

которые удовлетворяют двум скалярным линейным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1728}{5}(\zeta - \eta)M_z = M_{\zeta\zeta} - M_{\eta\eta} - 2\frac{M_\zeta + M_\eta}{\zeta - \eta} \\ - \left(\frac{1728}{5}\right)^2 \left[(\zeta^5 - \eta^5) - \frac{5t(\zeta^3 - \eta^3)}{144} + \frac{5z(\zeta^2 - \eta^2)}{1728} + r_1(t, z)(\zeta - \eta) \right] M, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1728}{20}(\zeta - \eta)M_t = \eta M_{\zeta\zeta} - \zeta M_{\eta\eta} - (\zeta + \eta)\frac{M_\zeta + M_\eta}{\zeta - \eta} \\ + \left(\frac{1728}{5}\right)^2 \left[\zeta(\eta^5 - \frac{5t\eta^3}{144} + \frac{5z\eta^2}{1728} + r_0(t, z)) - \eta(\zeta^5 - \frac{5t\zeta^3}{144} + \frac{5z\zeta^2}{1728} + r_0(t, z)) \right] M, \end{aligned} \quad (23)$$

у которых от $u(z, t)$ зависят лишь коэффициенты

$$\begin{aligned} r_1(z, t) = \frac{1}{48^2}(2u_3u_1 - u_2^2 + \frac{5u_1^2u}{3} + \frac{5zu}{9} + \frac{5u^4}{36} - \frac{5tu^2}{18} + \frac{25t^2}{36}), \\ r_0(z, t) = \frac{1}{96^2} \left(u_3^2 + 2u_3u_1u + \frac{2u_2^2u}{3} - \frac{u_2u_1^2}{3} + \frac{5u_2u^3}{3} + \frac{5u_2(z - tu)}{9} + \frac{5u_1^2u^2}{6} \right. \\ \left. + \frac{5tu_1^2}{36} + \frac{u^5}{9} - \frac{5tu^3}{27} + \frac{5zu^2}{18} - \frac{25zt}{54} \right). \end{aligned}$$

Заменой

$$M = (\zeta - \eta) \exp S(t, z) W, \quad (24)$$

где функция S удовлетворяет непротиворечивым равенствам

$$S_z = -\frac{1728}{5} \left[r_1(t, z) - \frac{25t^2}{(288)^2} \right], \quad S_t = \frac{1728}{5} \left[4r_0(t, z) + \frac{50zt}{(288)^2} \right],$$

уравнения (22), (23) переводятся в не зависящие от $u(z, t)$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1728}{5}W_z = \frac{W_{\zeta\zeta} - W_{\eta\eta}}{\zeta - \eta} \\ - \left(\frac{1728}{5}\right)^2 \left[\frac{\zeta^5 - \eta^5}{\zeta - \eta} - \frac{5t(\zeta^3 - \eta^3)}{144(\zeta - \eta)} + \frac{5z(\zeta^2 - \eta^2)}{1728(\zeta - \eta)} + \frac{25t^2}{(288)^2} \right] W, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1728}{20}W_t = \frac{\eta W_{\zeta\zeta} - \zeta W_{\eta\eta}}{\zeta - \eta} - \frac{W_\zeta - W_\eta}{\zeta - \eta} + \left(\frac{1728}{5}\right)^2 \left[\zeta \left(\eta^5 - \frac{5t\eta^3}{144} + \frac{5z\eta^2}{1728} - \frac{25zt}{(288)^2} \right) \right. \\ \left. - \eta \left(\zeta^5 - \frac{5t\zeta^3}{144} + \frac{5z\zeta^2}{1728} + \frac{25zt}{(288)^2} \right) \right] \frac{W}{\zeta - \eta}. \end{aligned} \quad (26)$$

После перехода от ζ и η к независимым переменным

$$x = -\frac{\zeta + \eta}{2}, \quad y = -\frac{(\zeta - \eta)^2}{2} + \frac{5t}{144} \quad (27)$$

уравнения (25), (26) принимают вид «квантований» (18) и (19).

§2. Член P_2^2 иерархии уравнения Пенлеве II

2.1. Для вещественных значений z и t ниже описываются «квантования» совместных решений НУШ (9) и ОДУ

$$\beta u_z - 4tu_1 + 6\beta\delta|u|^2u_1 + 2izu = 0. \quad (28)$$

Наряду с решением ГП уравнения КдФ такие решения также играют важную роль для задач математической физики с малым параметром:

- они задают ([31], [32]) специальные решения Хабермана–Сана НУШ (9) из работы [33], которые в пределе при $\delta \rightarrow 0$ переходят в интеграл Пирси $Q = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2i(\beta\lambda^4 + 2t\lambda^2 + x\lambda)] d\lambda$ и которые для довольно широкого ряда ситуаций описывают влияние малых нелинейностей на высокочастотные асимптотики около острия (клюва) каустики;

- при $\delta > 0$ с помощью других решений уравнений (9) и (28) описывается [34] влияние малой дисперсии на процессы провального самообострения импульса, которые характерны для приближений нелинейной геометрической оптики с нелинейностью общего положения;

- вообще, ОДУ (28) есть первый высший представитель P_2^2 иерархии P_2^n уравнения Пенлеве II, важность роли которой (наряду с важностью роли иерархии P_1^n) для широкого класса задач с малым параметром была предсказана Китаевым в [13], исходя из аналогии с иерархиями интегралов Фурье канонического вида, называемых [35, гл. VI, §4] специальными функциями волновых катастроф. По поводу аналогии с уравнением Пенлеве II после просмотра разд. 2.4 данной статьи см. еще разд. 6.1 работы Окамото [36].

2.2. Совместные решения уравнений (9) и (28) также изомонодромны. Они являются [31] условием совместности трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_z &= i \begin{pmatrix} -\zeta & u \\ \delta u^* & \zeta \end{pmatrix} \Phi, & \Phi_t &= \begin{pmatrix} -i(2\zeta^2 - \delta|u|^2) & 2i\zeta u - u_1 \\ \delta(2i\zeta u^* + u_1^*) & i(2\zeta^2 - \delta|u|^2) \end{pmatrix} \Phi, \\ \Phi_\zeta &= \begin{pmatrix} -[i(4\beta\zeta^3 + 4\zeta t - 2\delta\beta|u|^2\zeta + z) + \delta\beta(u_1 u^* - u_1^* u)] & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 0 & 4i\beta\zeta^2 u - 2\beta\zeta u_1 + 4itu - \beta u_t \\ \delta(4i\beta\zeta^2 u^* + 2\beta\zeta u_1^* + 4itu^* + \beta u_t^*) & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (29)$$

где u^* — комплексно-сопряженное к u . При этом u определяет НУШ (9) и задает [31] решения системы ОДУ по переменной t

$$\begin{aligned} \beta u_{tt} &= 4itu_t + 2i\beta\delta|u|^2u_t + (2i + 8t\delta|u|^2)u + 2izu_1 + 2\beta\delta u_1(u_1 u^* - u_1^* u), \\ \beta(u_1)_t &= 2zu + 4itu_1 - 2i\beta\delta u(u_1 u^* - u_1^* u). \end{aligned} \quad (31)$$

Из уравнений (9), (28) и (31) следует постоянство по z и t выражения

$$\frac{c}{4\delta\beta^2} = -u_2^* u - u_2 u^* + |u_1|^2 - 3\delta|u|^4 + \frac{4t}{\beta}|u|^2 = i(u_t u^* - u_t^* u) + |u_1|^2 + \delta|u|^4 + \frac{4t}{\beta}|u|^2. \quad (32)$$

2.3. Формулой (21) фундаментальные решения ОДУ (29), (30) определяют 2×2 -матрицы $M(t, z, \zeta, \eta)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$4\beta(\zeta - \eta)M_z - M_{\zeta\zeta} + M_{\eta\eta} + 2\frac{M_\zeta + M_\eta}{\zeta - \eta} = [16\beta^2(\zeta^6 - \eta^6) + 32\beta t(\zeta^4 - \eta^4) + 8\beta z(\zeta^3 - \eta^3) + (16t^2 + c)(\zeta - \eta)^2 + r_1(z, t)(\zeta - \eta)]M, \quad (33)$$

$$2\beta(\zeta - \eta)M_t - \eta M_{\zeta\zeta} + \zeta M_{\eta\eta} + \frac{(\zeta + \eta)(M_\zeta + M_\eta)}{\zeta - \eta} = [\zeta(16\beta^2\eta^6 + 32\beta t\eta^4 + 8\beta z\eta^3 + (16t^2 + c)\eta^2 + r_0(z, t)) - \eta(16\beta^2\zeta^6 + 32\beta t\zeta^4 + 8\beta z\zeta^3 + (16t^2 + c)\zeta^2 + r_0(z, t))]M, \quad (34)$$

где c — та же постоянная, что в формуле (32),

$$r_1(z, t) = 2i\delta\beta^2(u_2u_1^* - u_2^*u_1) - 4\delta z|u|^2 + 8zt, \\ r_0(z, t) = 16t^2\delta|u|^2 - 16\delta^2\beta t|u|^4 - 4\delta\beta t(u_2^*u + u_2u^*) + \delta\beta^2|u_2|^2 + 4\delta^3\beta^2|u|^6 + 2\delta^2\beta^2|u|^2(u_2^*u + u_2u^*) - \delta^2\beta^2(u_1u^* - u_1^*u)^2 - 2i\delta\beta z(u_1u^* - u_1^*u) + z^2.$$

Функции r_1 и r_2 связаны соотношением $(r_1(z, t))'_t = 2(r_0(z, t))'_z + 4z$.

Заменой (24), где функция S такова, что

$$4\beta S_z = r_1(z, t), \quad 2\beta S_t = r_0(t, z) + z^2,$$

уравнения (33), (34) переводятся в пару уравнений

$$4\beta W_z - \frac{W_{\zeta\zeta} - W_{\eta\eta}}{\zeta - \eta} = [16\beta^2(\zeta^6 - \eta^6) + 32\beta t(\zeta^4 - \eta^4) + 8\beta z(\zeta^3 - \eta^3) + (16t^2 + c)(\zeta^2 - \eta^2)]\frac{W}{\zeta - \eta}, \quad (35)$$

$$2\beta W_t - \frac{\zeta W_{\eta\eta} - \eta W_{\zeta\zeta}}{\zeta - \eta} - \frac{W_\zeta - W_\eta}{\zeta - \eta} = [\zeta(16\beta^2\eta^6 + 32\beta t\eta^4 + 8\beta z\eta^3 + (16t^2 + c)\eta^2 - z^2) - \eta(16\beta^2\zeta^6 + 32\beta t\zeta^4 + 8\beta z\zeta^3 + (16t^2 + c)\zeta^2 - z^2)]\frac{W}{\zeta - \eta}, \quad (36)$$

не зависящих от u .

2.4. Кимура в [37] привел список совместных пар гамильтоновых изомонотронных систем с двумя степенями свободы, получающийся в результате последовательных вырождений системы Гарнье из статьи [1]. Среди них содержится пара, обозначаемая в [37] через $H(5)$,

$$(\lambda_j)'_{t_1} = (K_1)'_{\mu_j}, \quad (\mu_j)'_{t_1} = -(K_1)'_{\lambda_j} \quad (j = 1, 2), \quad (37)$$

$$(\lambda_j)'_{t_2} = (K_2)'_{p_j}, \quad (\mu_j)'_{t_2} = -(K_2)'_{\lambda_j} \quad (j = 1, 2) \quad (38)$$

с квадратичными по импульсам μ_j гамильтонианами

$$K_1(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\Lambda'(\lambda_k)} [\mu_k^2 - P(t_1, t_2, \lambda_k)\mu_k - 2\nu\lambda_k^2], \quad (39)$$

$$K_2(t_1, t_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{Q(\lambda_k)}{\Lambda'(\lambda_k)} \left[\mu_k^2 - \left(P(t_1, t_2, \lambda_k) + \frac{1}{Q(\lambda_k)} \right) \mu_k - 2\nu\lambda_k^2 \right], \quad (40)$$

где ν — постоянная, $P(t_1, t_2, q) = 2q^3 + 2t_2q + t_1$, $\Lambda(q) = (q - \lambda_1)(q - \lambda_2)$, $\Lambda'(q)$ — производная функции $\Lambda(q)$ по q , $Q(q) = q - \lambda_1 - \lambda_2$. (В [37] имеется опечатка, повторенная в [36]: гамильтониан K_2 приведен без множителя $1/2$.)

ОДУ (28) по переменной z и система ОДУ по переменной t , определяемая уравнениями (31), после замен

$$z = i\alpha t_1/2, \quad t = \beta t_2/\alpha, \quad \alpha = (4\beta)^{1/4} \exp(i\pi/8), \quad (41)$$

эквивалентны гамильтоновым системам (37) и (38), определяемым гамильтонианами (39) и (40). При этом u удовлетворяет НУШ (9) и

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \left(\frac{i u_z}{4u} - \sqrt{-\frac{(u_z)^2}{16u^2} - \frac{t}{\beta} + \frac{u_{zz}}{4u} + \frac{\delta|u|^2}{2}} \right), \\ \lambda_2 &= \alpha \left(\frac{i u_z}{4u} + \sqrt{-\frac{(u_z)^2}{16u^2} - \frac{t}{\beta} + \frac{u_{zz}}{4u} - \frac{\delta|u|^2}{2}} \right), \\ \mu_1 &= \frac{\delta\alpha^3}{2} \left(\frac{i}{4}(2u_z u^* - u_z^* u) - |u|^2 \sqrt{-\frac{(u_z)^2}{16u^2} - \frac{t}{\beta} + \frac{u_{zz}}{4u} + \frac{\delta|u|^2}{2}} \right), \\ \mu_2 &= \frac{\delta\alpha^3}{2} \left(\frac{i}{4}(2u_z u^* - u_z^* u) + |u|^2 \sqrt{-\frac{(u_z)^2}{16u^2} - \frac{t}{\beta} + \frac{u_{zz}}{4u} + \frac{\delta|u|^2}{2}} \right), \end{aligned}$$

где постоянная α определена заменами (41), $\nu = ic/(8\beta)$. (Последние формулы были получены автором, исходя из уравнений ИДМ (29), (30) и формул (6.3), (6.4) работы [36]; см. также [37].)

2.5. Совместна следующая пара эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} 2(X - Y)\Gamma_{t_1} &= \Gamma_{XX} - \Gamma_{YY} + 2X^2(X\Gamma)_X + (2t_2X + t_1)\Gamma_X - 2Y^2(Y\Gamma)_Y \\ &\quad - (2t_2Y + t_1)\Gamma_Y - 2\nu(X^2 - Y^2)\Gamma, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} 2(X - Y)\Gamma_{t_2} &= X[\Gamma_{YY} + 2Y^2(Y\Gamma)_Y + (2t_2Y + t_1)\Gamma_Y - 2\nu Y^2\Gamma] \\ &\quad - Y[\Gamma_{XX} + (2X^2)(X\Gamma)_X + (2t_2X + t_1)\Gamma_X - 2\nu X^2\Gamma] + \Gamma_X - \Gamma_Y, \end{aligned} \quad (43)$$

которые являются «квантованиями» вида (20) с $\varepsilon = 1$, определяемыми гамильтонианами (39) и (40); символически (42) и (43) можно записать в виде уравнений

$$\Gamma_{t_1} = K_1 \left(t_1, t_2, X, Y, -\frac{\partial}{\partial X}, -\frac{\partial}{\partial Y} \right) \Gamma, \quad \Gamma_{t_2} = K_2 \left(t_1, t_2, X, Y, -\frac{\partial}{\partial X}, -\frac{\partial}{\partial Y} \right) \Gamma.$$

С помощью формулы

$$\Gamma = \exp \left(-\frac{X^4 + Y^4}{4} - \frac{t_2^2 + t_2(X^2 + Y^2) + t_1(X + Y)}{2} - \frac{t_1^2 t_2}{4} \right) W$$

«квантования» (42) и (43) сводятся к совместной паре уравнений

$$\begin{aligned} 2(X - Y)W_{t_1} &= W_{XX} - W_{YY} - [X^6 - Y^6 + 2t_2(X^4 - Y^4) \\ &\quad + t_1(X^3 - Y^3) + (t_2^2 + 2\nu)(X^2 - Y^2)]W, \\ 2(X - Y)W_{t_2} &= XW_{YY} - YW_{XX} + W_X - W_Y - [X(Y^6 + 2t_2Y^4 + t_1Y^3 \\ &\quad + (t_2^2 + 2\nu)Y^2 - t_1^2/4) - Y(X^6 + 2t_2X^4 + t_1X^3 + (t_2^2 + 2\nu)X^2 - t_1^2/4)]W. \end{aligned}$$

После перехода к независимым переменным (41) и замен

$$X = -(4\beta)^{1/4} \exp(i\pi/8)\zeta, \quad Y = -(4\beta)^{1/4} \exp(i\pi/8)\eta$$

и $c = -8i\beta\nu$ последняя пара сводится к паре (35), (36).

Замечание 2. Скорее всего, аналогичным образом может быть описана связь между парой уравнений (25), (26) и «квантованиями», определяемыми совместной парой $H(9/2)$ гамильтоновых систем статьи [37].

§3. Заключительные замечания

3.1. При $\varepsilon = 1$ «квантования» (1) из [3], [2] получаются не только из уравнений (2), но и из уравнений $\varepsilon\Psi_z = H(z, x, \varepsilon\frac{\partial}{\partial x})\Psi$, для которых при произвольных значениях ε и определенных редукциях уравнений Пенлеве в [9] были построены серии явных решений. В связи с этим результатом из [9], а также в связи с разд. 2 статьи [11] и результатами статьи [38] подчеркнем следующее обстоятельство:

при $\varepsilon = 5/54$ уравнение (19) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \varepsilon\Psi_t = \varepsilon^2 \left[-\frac{\Psi_{xx}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi_y) - \frac{1}{2}x\Psi_{xy} + \left(y - \frac{5t}{36}\right)\Psi_{yy} \right] + \varepsilon\frac{5\Psi_y}{108} \\ + \left[\frac{x^5}{2} - 2xy^2 - \frac{15tx^3}{36} + \frac{5txy}{18} - \frac{5zx^2}{216} - \frac{5zy}{108} \right] \Psi. \end{aligned}$$

Это значит, что наряду с представлениями в виде «квантований» (20) пары (18), (19) можно символически записать и как такие уравнения:

$$\varepsilon\Psi_z = H_1\left(z, t, x, y, \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi, \quad \varepsilon\Psi_t = H_2\left(z, t, x, y, \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi.$$

Возможно, подобную символическую запись допускают и какие-нибудь «квантования», определяемые гамильтонианами, эквивалентными гамильтонианам (39) и (40).

3.2. При описании выше «квантований» двух высших аналогов уравнений Пенлеве ключевой явилась замена (21), которая ранее в близких ситуациях для несколько иных целей использовалась Новиковым в [7] (см. также формулу (2.3.36) работы [39]). Не факт, что лишь с помощью подобной замены также легко прояснится вопрос о справедливости «квантований» вида (20) для всех высших гамильтоновых изомонодромных аналогов уравнений Пенлеве с двумя степенями свободы, которым соответствуют уравнения ИДМ в матрицах размера 2×2 (в частности, для всех рассматривавшихся в [37]).

Пока не видно, как результаты данной работы могут быть обобщены на случаи изомонодромных гамильтоновых ОДУ с числом степеней свободы, большим 2, пусть даже для ситуаций, отвечающих уравнениям ИДМ в матрицах размера 2×2 (например, для представителей иерархий P_1^n , P_2^n с $n > 2$). В связи с только что сказанным отметим, что в случае систем Шлезингера [40], соответствующих уравнениям ИДМ в матрицах размера 2×2 , эти линейные уравнения ИДМ задают [7] решения уравнений типа Белавина–Полякова–Замолотчикова [41] минимальной конформной теории поля с центральным зарядом алгебры Вирасоро, равным единице. Но не связаны ли данные уравнения ИДМ также и с

какими-либо «квантованиями», определяемыми гамильтоновыми структурами соответствующих систем Шлезингера?

Совсем не исследованным остается и вопрос о «квантованиях» изомонодромных гамильтоновых ОДУ, отвечающих уравнениям ИДМ в матрицах размера $m \times m$ при $m > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Ann. Sci. École Normale Sup. (3), **29** (1912), 1–126.
- [2] Б. И. Сулейманов, *Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций*, в кн.: Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений, Ин-т матем. Башкирского научного центра УрО АН СССР, Уфа, 1988, 93–102.
- [3] Б. И. Сулейманов, *Гамильтоновость уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций*, Дифференциальные уравнения, **30:5** (1994), 791–796.
- [4] Б. И. Сулейманов, «Квантования» второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его L - A -пар, ТМФ, **156:3** (2008), 364–378.
- [5] А. И. Овсеевич, *Фильтр Калмана и квантование*, Докл. РАН, **414:6** (2007), 732–735.
- [6] А. И. Овсеевич, *Фильтр Калмана и квантование*, Пробл. передачи информ., **44:1** (2008), 59–79.
- [7] Д. П. Новиков, *О системе Шлезингера с матрицами размера 2×2 и уравнении Белафина–Полякова–Замолодчикова*, ТМФ, **161:2** (2009), 191–203.
- [8] D. P. Novikov, *A monodromy problem and some functions connected with Painlevé VI*, в кн.: Painlevé Equations and Related Topic. Proceedings of the International Conference, Международный математический институт им. Л. Эйлера, С.-Петербург, 2011, 118–121.
- [9] H. Nagoya, *Hypergeometric solutions to Schrödinger equation for the quantum Painlevé equations*, J. Math. Phys., **52:8** (2011).
- [10] A. Zabrodin, A. Zotov, *Quantum Painlevé–Calogero correspondence*, J. Math. Phys., **53:7** (2012), 073507; <http://arxiv.org/abs/1107.5672>.
- [11] Б. И. Сулейманов, «Квантовая» линеаризация уравнений Пенлеве как компонента их L, A пар, Уфимск. матем. журн., **4:2** (2012), 127–135.
- [12] G. Moore, *Geometry of the string equations*, Comm. Math. Phys., **133:2** (1990), 261–304.
- [13] А. В. Китаев, *Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **187** (1991), 53–74.
- [14] Б. И. Сулейманов, *Возникновение бездиссипативных ударных волн и «непертурбативная» квантовая теория гравитации*, ЖЭТФ, **105:5** (1994), 1089–1099.
- [15] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Опрокидывание простой волны в кинетике разреженной плазмы*, ЖЭТФ, **60:6** (1971), 2155–2174.
- [16] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны*, ЖЭТФ, **65:2** (1973), 590–604.
- [17] V. Kudashev, B. Suleimanov, *A soft mechanism for generation the dissipationless shock waves*, Phys. Lett. A, **221:3** (1996), 204–208.
- [18] В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, *Мягкий режим формирования бездиссипативных ударных волн*, в кн.: Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. III, Институт математики с ВЦ, Уфа, 1996, 98–108; http://matem.anrb.ru/e_lib/preprints/BS/bs22.html.
- [19] Г. В. Потемин, *Алгебро-геометрическое построение решений уравнений Уизема*, УМН, **43:5(263)** (1988), 211–213.

- [20] R. Garifullin, B. Suleimanov, N. Tarkhanov, *Phase shift in the Whitam zone for the Gurevich–Pitaevsky special solution of the Korteweg–de Vries equation*, Phys. Lett. A, **374**:13–14 (2010), 1420–1424.
- [21] T. Claeys, *Asymptotics for a special solutions to the second member of the Painleve I hierarchy*, J. Phys. A, **43** (2010), 434012.
- [22] Б. И. Сулейманов, *Асимптотика универсального специального решения Гуревича–Питаевского уравнения Кортевега–Де Вриза при $|x| \rightarrow \infty$* , Труды ИММ УрО РАН, **18**:2 (2012), 245–253.
- [23] T. Claeys, M. Vanlessen, *The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation*, Nonlinearity, **20**:5 (2007), 1163–1184.
- [24] В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, *Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн*, Прикл. матем. мех., **65**:3 (2001), 456–466.
- [25] B. Dubrovin, *On universality of critical behaviour in hamiltonian PDEs*, in: Geometry, topology, and mathematical physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 224, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 59–109; <http://arxiv.org/abs/0804.3790>.
- [26] B. Dubrovin, *On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: Universality of critical behaviour*, Comm. Math. Phys., **267**:1 (2006), 117–139.
- [27] É. Brésin, E. Marinari, G. Parisi, *A nonperturbative ambiguity free solution of a string model*, Phys. Lett. B, **242**:1 (1990), 35–38.
- [28] M. Douglas, N. Seiberg, S. Shenker, *Flow and unstability in quantum gravity*, Phys. Lett. A, **244**:3–4 (1990), 381–385.
- [29] А. Р. Итс, *«Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны*, Изв. АН СССР, сер. матем., **49**:3 (1985), 530–565.
- [30] Б. А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения*, УМН, **36**:2(218) (1981), 11–80.
- [31] Б. И. Сулейманов, *Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустики*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **187** (1991), 110–128.
- [32] A. V. Kitaev, *Caustics in 1 + 1 integrable systems*, J. Math. Phys., **35**:6 (1994), 2934–2954.
- [33] R. Haberman, Ren-ji Sun, *Nonlinear cusped caustics for dispersive waves*, Stud. Appl. Math., **72**:1 (1985), 1–37.
- [34] В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, *Некоторые типичные особенности падения интенсивности в неустойчивых средах*, Письма в ЖЭТФ, **62**:4 (1995), 358–362.
- [35] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [36] K. Okamoto, *The Hamiltonians associated to the Painlevé equations*, in: The Painlevé property: one century later, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1999, 735–787.
- [37] H. Kimura, *The degeneration of the two-dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann. Mat. Pura Appl., **155** (1989), 25–74.
- [38] В. П. Маслов, *Критические показатели как следствие винеровского квантования термодинамики*, ТМФ, **170**:3 (2012), 457–467.
- [39] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, *Holonomic quantum fields. II. The Riemann–Hilbert problem*, Res. Inst. Math. Sci., **15**:1 (1979), 201–278.
- [40] L. Schlesinger, *Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten*, J. für Math., **141** (1912), 96–145.
- [41] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B, **241**:2 (1984), 333–380.