Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Вербицкая, Кривые на
многообразиях Олеклауса–Тома, *Функц. анализ и
его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:32:00

Кривые на многообразиях Олеклауса–Тома

© 2014. С. М. ВЕРБИЦКАЯ

1. Введение. Многообразия Олеклауса–Тома, впервые определенные в работе [6], — это компактные комплексные многообразия, обобщающие поверхности Инуе (см. определение в работе [3]). Опишем эти многообразия подробнее.

Многообразия Олеклауса–Тома. Пусть K — числовое поле (т. е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}$), $s > 0$ — число его вещественных вложений, $2t$ — число комплексных вложений. Легко показать, что для любых s и t существует поле K с соответствующим количеством вещественных и комплексных вложений (см., например, [6]).

Определение 1. *Кольцо целых алгебраических чисел* O_K — это подкольцо в K , состоящее из всех корней многочленов с целыми коэффициентами, лежащих в K . *Группа единиц* O_K^* — это мультипликативная подгруппа обратимых элементов в O_K .

Положим $m = s + t$. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — вещественные вложения поля K , $\sigma_{s+1}, \dots, \sigma_{s+2t}$ — его комплексные вложения, такие, что σ_{s+i} и σ_{s+t+i} являются комплексно-сопряженными для каждого $i = 1, \dots, t$. Теперь мы можем определить отображение $l: O_K^* \rightarrow \mathbb{R}^m$, где

$$l(u) = (\ln |\sigma_1(u)|, \dots, \ln |\sigma_s(u)|, 2 \ln |\sigma_{s+1}(u)|, \dots, 2 \ln |\sigma_m(u)|).$$

Пусть $O_K^{*,+} = \{a \in O_K^* : \sigma_i(a) > 0, i = 1, \dots, s\}$. Введем следующие определения.

Определение 2. *Решеткой* в $\mathbb{R}^n$ называется дискретная аддитивная подгруппа. Решетка Λ называется *полной*, если $\Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.

Определение 3 [6]. Группа $U \subset O_K^{*,+}$ ранга s называется *допустимой для числового поля* K , если проекция подгруппы $l(U)$ на первые s координат является полной решеткой в $\mathbb{R}^s$.

Рассмотрим линейное пространство $L = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 0\}$. Его проекция на первые s координат сюръективна, поскольку $s < m$. Используя теорему Дирихле о единицах (см., например, [5]), можно показать, что $l(O_K^{*,+})$ является полной решеткой в L . Значит, существует допустимая группа U .

Пусть $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Пусть $U \subset O_K^{*,+}$ — допустимая группа для поля K . Заметим, что U действует на O_K умножениями, что дает нам структуру полупрямого произведения $U \ltimes O_K$. Определим действие группы $U \ltimes O_K$ на $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ следующим образом. Элемент $u \in U$ действует на $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$, переводя $(z_1, \dots, z_m)$ в $(\sigma_1(u)z_1, \dots, \sigma_m(u)z_m)$. Поскольку U лежит в $O_K^{*,+}$, ее действие на первых s координатах сохраняет $\mathbb{H}$. Аддитивная группа кольца O_K действует на $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ параллельными переносами: $a \in O_K$ переводит $(z_1, \dots, z_m)$ в $(\sigma_1(a) + z_1, \dots, \sigma_m(a) + z_m)$. Поскольку первые s вложений вещественны, это действие не выводит из $\mathbb{H}$ на первых s координатах.

Можно показать, что $(u, a) \in U \ltimes O_K$ переводит $(z_1, \dots, z_m)$ в $(\sigma_1(u)z_1 + \sigma_1(a), \dots, \sigma_m(u)z_m + \sigma_m(a))$, причем это действие согласовано с групповой операцией в полупрямом произведении.

Определение 4. Многообразие Олеклауса–Тома — это фактор многообразия $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ по действию группы $U \ltimes O_K$, определенному выше.

Этот фактор существует, поскольку $U \ltimes O_K$ действует вполне разрывно на $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$. Кроме того, фактор компактен. В самом деле, пусть группа U допустима для поля K . Фактор $(\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/O_K$, очевидно, диффеоморфен тривиальному торическому расслоению $(\mathbb{R}_{>0})^s \times (S^1)^t$. Группа U действует вполне разрывно на базе $(\mathbb{R}_{>0})^s$. Значит, она действует вполне разрывно на $(\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/O_K$. Кроме того, группы U и O_K действуют голоморфно на $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$. Значит, на факторе есть структура комплексного многообразия.

2. Кривые на многообразиях Олеклауса–Тома. В этом разделе будет доказано, что на многообразиях Олеклауса–Тома нет компактных комплексных кривых, точно так же, как и на поверхностях Инуе типа S_M (см. [3]).

2.1. Точная неотрицательная $(1, 1)$ -форма на многообразии Олеклауса–Тома. Мы будем использовать $(1, 1)$ -форму, введенную в работе [7]. При помощи этой формы авторы доказали, что многообразия Олеклауса–Тома с условием $t = 1$ (т.е. такие, что соответствующее числовое поле имеет только два комплексных вложения) не содержат подмногообразий. Наш результат применим ко всем многообразиям Олеклауса–Тома, но мы рассматриваем кривые вместо подмногообразий произвольной размерности. Далее мы объясним, чем наш метод отличается от введенного в [7] и как из этого следует разница в полученных результатах.

Определим понятие $(1, 1)$ -формы. Пусть M — гладкое комплексное многообразие, а $z_1, \dots, z_n$ — локальные координаты в открытой окрестности точки $y \in M$.

Определение 5. $(1, 1)$ -форма на комплексном многообразии M — это 2-форма ω , такая, что $\omega(Iu, v) = -\omega(u, Iv) = \sqrt{-1}\omega(u, v)$ для всяких $u, v \in T_y M$, где I — почти комплексная структура на M .

Определение 6. $(1, 1)$ -форма ω на комплексном многообразии M называется неотрицательной, если $\omega(u, Iu) \geq 0$ для всякого касательного вектора $u \in T_y M$.

Следуя работе [7], мы построим неотрицательную $(1, 1)$ -форму на многообразии Олеклауса–Тома $M = (\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/(U \ltimes O_K)$. Сначала введем $(1, 1)$ -форму $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M} = \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$, которая сохраняется под действием группы $\Gamma = U \ltimes O_K$ и потому является поднятием некоторой $(1, 1)$ -формы на M .

Пусть $(z_1, \dots, z_m)$ — комплексные координаты на $\tilde{M}$. Определим функцию $\varphi(z) = \prod_{i=1}^s \text{Im}(z_i)^{-1}$. Поскольку первые s компонент многообразия $\tilde{M}$ соответствуют верхним полуплоскостям $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$, эта функция положительна на $\tilde{M}$.

Теперь рассмотрим форму $\tilde{\omega} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\varphi$. В координатной записи эту форму можно представить следующим образом:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{-1} \sum_{i=1}^s \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{4(\text{Im } z_i)^2}.$$

Значит, $\tilde{\omega}$ является неотрицательной $(1, 1)$ -формой на $\tilde{M}$.

Покажем, что эта форма Γ -инвариантна.

Группа Γ — полупрямое произведение аддитивной группы O_K и мультипликативной группы U , допустимой для поля K . Аддитивная группа O_K действует на первых s компонентах многообразия $\widetilde{M}$ (соответствующих верхним полуплоскостям $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) параллельными переносами вдоль вещественной оси. Значит, она не меняет $\operatorname{Im} z_i$ для $i = 1, \dots, s$. Поэтому аддитивная компонента полупрямого произведения сохраняет $\log \varphi$.

Мультипликативная компонента U полупрямого произведения действует на первых s координатах на многообразии $\widetilde{M}$ умножением на вещественное число (поскольку первые s вложений числового поля K вещественны). Поэтому каждое $\operatorname{Im} z_i$ умножается на вещественное число и, значит, к $\log(\operatorname{Im} z_i)$ прибавляется вещественное число. Поскольку $\log \varphi(z) = -\sum_{i=1}^s \log(\operatorname{Im} z_i)$, то и к $\log \varphi$ тоже прибавляется вещественное число. Оператор $\bar{\partial}$ переводит в нуль константы, и поэтому $\tilde{\omega} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \varphi$ сохраняется действием группы Γ .

Поскольку $(1, 1)$ -форма $\tilde{\omega}$ инвариантна относительно действия группы Γ , она является поднятием $(1, 1)$ -формы ω на многообразии Олеклауса–Тома $M = \widetilde{M}/\Gamma$.

Теперь покажем, что форма $\tilde{\omega}$ точна на $\widetilde{M}$. Для этого определим оператор d^c .

Определение 7. *Скрученным дифференциалом d^c будем называть оператор $I^{-1}dI$, где d — дифференциал де Рама, а I — почти комплексная структура.*

Поскольку $dd^c = 2\sqrt{-1} \partial \bar{\partial}$ (см. [2]), можно показать, что $\tilde{\omega} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \varphi = \frac{1}{2} dd^c \log \varphi$, и поэтому $\tilde{\omega}$ — точная форма на $\widetilde{M}$. Кроме того, поскольку оператор d^c переводит в нуль константы, форма $d^c \log \varphi$ инвариантна относительно действия группы Γ ; поэтому ω точна на M .

2.2. $(1, 1)$ -форма ω и кривые на многообразии Олеклауса–Тома. Поскольку форма ω на многообразии M неотрицательна, интеграл от нее по любой комплексной кривой $C \subset M$ неотрицателен. Форма ω точна. Значит, из теоремы Стокса следует, что интеграл от нее по любой комплексной кривой равен нулю. Следовательно, если $C \subset M$ — замкнутая комплексная кривая, ω на ней обращается в нуль.

Чтобы понять, на каких кривых ω обращается в нуль, определим нулевое слоение формы ω .

Определение 8. *Инволютивное распределение (или слоение) на M — это подрасслоение $B \subset TM$ в касательном расслоении, замкнутое относительно скобки Ли, $[B, B] \subset B$.*

Определение 9. *Лист слоения B — связное, но не обязательно замкнутое подмногообразие в M , такое, что его размерность равна $\dim B$ и оно касательно к B в каждой точке.*

Теорема 10 (Фробениус). *Пусть $B \subset TM$ — инволютивное распределение. Тогда для каждой точки многообразия M существует ровно один лист этого слоения, содержащий эту точку.*

(См., например, [1, разд. IV.8, теорема Фробениуса].)

Теорема 11. *Пусть $N \subset M$ — связное подмногообразие, такое, что его касательное пространство во всякой точке лежит в слоении $F \subset TM$. Тогда N лежит в листе слоения F .*

(См., например, [1, разд. IV.8, теорема 8.5].)

Определение 12. Нуль-слоение неотрицательной $(1, 1)$ -формы ω на M — подрасслоение в касательном расслоении TM , состоящее из касательных векторов $u \in T_y M$, таких, что $\omega(u, Iu) = 0$, где I — почти комплексна структура на M .

Рассмотрим нуль-слоение формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}$.

Форма $\tilde{\omega}$ строго положительна на любом векторе $v = (z_1, \dots, z_n)$, таком, что хотя бы одна из координат z_i для $i = 1, \dots, s$ не равна нулю. Значит, такой вектор не может лежать в листе нуль-слоения. Поэтому на каждом листе нуль-слоения формы $\tilde{\omega}$ первые s координат постоянны.

Следовательно, лист нуль-слоения формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}$ изоморфен $\mathbb{C}^t$.

Теперь рассмотрим нуль-слоение формы ω на M .

Покажем, что образ действия элемента $\gamma \in \Gamma$, не равного единице, на каждом листе L нуль-слоения формы $\tilde{\omega}$ не пересекается с L .

Легко видеть, что L есть $(z_1, \dots, z_s) \times \mathbb{C}^t$ для некоторых фиксированных $(z_1, \dots, z_m)$. Значит, для каждого $\gamma \in \Gamma$, такого, что $L \cap \gamma(L) \neq \emptyset$, первые s координат точек в L совпадают с первыми s координатами точек в $\gamma(L)$. Для такого γ имеем следующую систему равенств:

$$\sigma_i(u)z_i + \sigma_i(a) = z_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

где $\gamma = (u, a)$ — неединичный элемент в Γ .

Из этих равенств следует, что $z_i = \sigma_i(a)/(1 - \sigma_i(u))$. Отсюда получаем, что z_i вещественны, но $\mathbb{H}$ не содержит вещественных элементов.

Значит, $L \cap \gamma(L) = \emptyset$ для всякого $\gamma \neq 1 \in \Gamma$.

Поскольку ω обращается в нуль на каждой компактной кривой $C \subset M$, каждая такая кривая содержится в каком-то листе нуль-слоения формы ω . Поскольку $\tilde{\omega}$ инвариантна относительно действия группы Γ , каждый лист нуль-слоения формы ω на M изоморфен компоненте листа нуль-слоения формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}$. Значит, он изоморфен $\mathbb{C}^t$. А $\mathbb{C}^t$ не содержит компактных комплексных кривых.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 13. На многообразиях Олеклауса–Тома нет замкнутых комплексных кривых.

3. Заключительные замечания. Дадим краткое объяснение связи между нашей работой и работой [7]. Как и в [7], мы используем нуль-слоение некоторой $(1, 1)$ -формы. Листы нуль-слоения — это t -мерные комплексные многообразия. В работе [7] авторы рассматривают $t = 1$ и подмногообразия произвольной размерности. Мы рассматриваем произвольное $t \geq 1$ и подмногообразия размерности 1. В обеих работах используется неотрицательность $(1, 1)$ -формы для того, чтобы показать, что подмногообразие и лист нуль-слоения, содержащий точку подмногообразия, не могут пересекаться трансверсально. В обоих случаях одно из многообразий имеет размерность 1. Из нетрансверсальности пересечения следует, что оно содержится во втором. Авторы [7] используют тот факт, что лист нуль-слоения плотен по Зарискому и поэтому не может содержаться ни в каком подмногообразии. В нашей работе мы показываем, что всякий лист изоморфен $\mathbb{C}^t$ и поэтому не может содержать никаких компактных подмногообразий.

Аргументы, используемые в нашей работе и в [7], не могут быть обобщены на случаи больших размерностей.

Кажется очевидным, что должны существовать многообразия Олеклауса–Тома, содержащие подмногообразия — другие многообразия Олеклауса–Тома,

соответствующие меньшим числовым полям, но у нас нет сторогого доказательства этого факта.

В работе [6] было доказано, что на многообразиях Олеклауса–Тома нет нетривиальных мероморфных функций. Значит, все дивизоры на этих многообразиях фиксированы в своих линейных системах (нульмерных). Имеется гипотеза, что многообразия Олеклауса–Тома не содержат дивизоров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd ed., Academic Press, Amsterdam–New York, 2003. [2] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982. [3] M. Inoue, *Invent. Math.*, **24** (1974), 269–310. [4] J. S. Milne, *Fields and Galois Theory*, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html>, version 4.21. [5] J. S. Milne, *Algebraic Number Theory*, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ant.html>, version 3.02. [6] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **55**:1 (2005), 1291–1300. [7] L. Ornea, M. Verbitsky, *Math. Res. Lett.*, **18**:4 (2011), 747–754. [8] M. Parton, V. Vuletescu, *Math. Z.*, **270**:1 (2012), 179–187; <http://arxiv.org/abs/1001.4891>. [9] M. S. Raghunathan, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972. [10] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, V. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sverb57@gmail.com

Поступило в редакцию
16 мая 2012 г.

УДК 517.9

Спектральный анализ индефинитных операторов Штурма–Лиувилля*

© 2014. А. С. Костенко

1. Пусть $\mathcal{J} := (-b, b)$, $0 < b \leq \infty$, а q и w — вещественные функции, такие, что $q, w \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J})$ и $w(x) > 0$ для п. в. $x \in \mathcal{J}$. Рассмотрим оператор

$$A := \frac{\operatorname{sgn} x}{w(x)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right), \quad \operatorname{dom}(A) := \mathfrak{D}_{\max}, \quad (1)$$

задаваемый в гильбертовом пространстве $L^2_w(\mathcal{J})$ на максимальной области определения $\mathfrak{D}_{\max} = \{f \in L^2_w(\mathcal{J}) : f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{J}), Af \in L^2_w(\mathcal{J})\}$. Будем считать, что дифференциальное выражение сингулярно в концах интервала $\mathcal{J}$, причем имеет место случай предельной точки в b и $-b$, т. е. оператор $L := JA$ самосопряжен. Здесь $J: f(x) \rightarrow (\operatorname{sgn} x)f(x)$, $J = J^* = J^{-1}$. Отметим, что в случае $q \equiv 0$ ($q \geq 0$) условия $x \notin L^2_w(0, b)$ и $x \notin L^2_w(-b, 0)$ необходимы и достаточны (достаточны) для самосопряженности оператора L [13].

Легко видеть, что $A \neq A^*$, однако $(JA)^* = L^* = L = JA$, т. е. A является J -самосопряженным. Наша основная цель — это вопрос о подобии оператора A самосопряженному.

*Работа поддержана Австрийским научным фондом (FWF), грант M1309–N13.