Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Халер-Дингельман, В. Хёпнер, Г.-К. Кайзер, И. Реберг, Г. М. Циглер, Оптимальная эллиптическая регулярность в пространствах Соболева вблизи трехмерных многоматериальных вершин Неймана, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 63–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:56:39

УДК 517.9

Оптимальная эллиптическая регулярность в пространствах Соболева вблизи трехмерных многоматериальных вершин Неймана*

© 2014. Р. ХАЛЕР-ДИНТЕЛЬМАН, В. ХЁПНЕР, Х.-К. КАЙЗЕР,
И. РЕБЕРГ, Г. М. ЦИГЛЕР

Изучается оптимальная эллиптическая регулярность (в шкале пространств Соболева) анизотропных операторов дивергенции-градиента в размерности три вблизи многоматериальной вершины на неймановской части границы полиэдральной пространственной области. Градиент решения соответствующего эллиптического уравнения в частных производных в окрестности вершины интегрируем со степенью выше трех.

§1. Введение

В последние годы был установлен ряд результатов об эллиптической регулярности в шкале $W^{1,q}$: в [12] и [30] — для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле или Неймана в областях с липшицевой границей, в [6] — для задачи Неймана и смешанных задач в полиэдрах, а в [3]–[5], [7], [9], [16], [21], [24], [25] — для случая разрывных коэффициентов; по поводу близких задач см. также [19], [20], [22]. В целом рассмотрен весьма любопытный набор геометрий и коэффициентов, включая даже случай смешанных граничных условий. Что не рассматривалось, так это оптимальная регулярность в пространствах $W^{1,p} \leftrightarrow W^{-1,p}$ в окрестности неймановской вершины в том случае, когда речь к тому же идет о разнородных материалах.

Интерес к таким задачам происходит в основном из естественных наук и техники, где многие явления описываются эллиптическими или параболическими уравнениями и часто важно учесть влияние разнородных материалов, которое математически выражается в виде разрывных функций в коэффициентах. Подробный список таких задач можно найти во введении к [9], а также в [4]. В частности, при анализе весьма широкого круга нелинейных задач (см. [10]) существенно, что пространство $W^{1,p}$ обладает «хорошими» мультипликаторными свойствами при условии, что p больше, чем размерность пространства. Кроме того, читатель может представить себе параболическое уравнение с квадратичным градиентным членом в правой части. Тогда важно, с одной стороны, чтобы имелось вложение $L^{p/2} \hookrightarrow W^{-1,p}$ (откуда в силу теоремы вложения Соболева следует, что p должно быть больше, чем размерность пространства), а с другой стороны — вложение области определения эллиптического оператора в $W^{1,p}$, см. [10], [11]. Напомним, что пространства типа $W^{-1,q}$ содержат рас-

*Исследования Г. М. Циглера поддержаны исследовательским центром Немецкого научно-исследовательского общества МАТНЕОН и расширенным грантом ERC no. 247029-SDModels.

пределения, такие, как, например, поверхностные плотности, необходимые во многих приложениях, см. [29, гл. 1].

Наш основной результат состоит, грубо говоря, в том, что существует $p > 3$, такое, что для любой функции $f \in (W^{1,p'}(\Pi))'$ любое решение v уравнения $-\nabla \cdot \mu \nabla v = f$ лежит в $W^{1,p}$ локально вблизи любой вершины a_Δ области Π при условии, что $\bar{\Pi}$ — полиэдральное многообразие с краем, а коэффициентная функция μ обладает некоторыми свойствами, позволяющими оценивать соответствующие эллиптические реберные особенности (см. дальнейшие подробности в теореме 5.1).

Подчеркнем, что матрицы, составляющие коэффициентную функцию μ , могут быть не диагональными и, в частности, не кратными единице (см. [15, гл. IV и V]). Это диктуется приложениями. Более того, анизотропные коэффициенты неизбежно возникают при (локальных) деформациях области (см. предложение 3.1). Следует заметить, что в случае анизотропной матрицы коэффициентов μ общие свойства эллиптического оператора $\nabla \cdot \mu \nabla$ могут разительно отличаться от таковых в случае скалярного коэффициента; см. [7, замечание 5.1], [8, §4] и [27, гл. 5].

Мы решаем задачу с помощью локализации, деформации и рассуждения, основанного на отражении. В частности, мы должны выпрямить часть границы таким образом, чтобы она стала частью плоскости. При этом, чтобы сохранить клеточную структуру областей постоянства преобразованной коэффициентной функции, необходимо в качестве преобразования использовать кусочно линейный гомеоморфизм. Поскольку наша цель — исследовать вершины общего вида, мы широко пользуемся нетривиальными (хотя и классическими) инструментами геометрической топологии в размерностях 2 и 3. В качестве побочного результата мы получаем (утвердительный) ответ (теорема 3.10) на вопрос о том, каждое ли топологическое многообразие допускает липшицеву структуру (см. [17, гл. 9]), для случая трехмерных полиэдров, являющихся одновременно 3-многообразиями с краем.

§2. Обозначения

Всюду в тексте мы используем следующие обозначения. Через $\mathcal{C} :=]-1, 1[^3$ мы обозначаем открытый куб в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке 0; кроме того, $\mathcal{C}_\pm := \mathcal{C} \cap \{x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \gtrless 0\}$ и $\Sigma := \mathcal{C} \cap \{x = (x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

В том, что касается понятия *липшицевой области*, мы следуем терминологии из [18, разд. 1.1.9]. Пусть Ω — (ограниченная) липшицева область. Всюду далее через $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ обозначается относительно открытая часть границы $\partial\Omega$. Символом $W^{1,p}(\Omega)$ обозначается обычное (комплексное) *пространство Соболева* на Ω , а символом $W_\Gamma^{1,p}(\Omega)$ — замыкание множества

$$\{v|_\Omega : v \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \text{supp}(v) \cap (\partial\Omega \setminus \Gamma) = \emptyset\}$$

в $W^{1,p}(\Omega)$. Если $\Gamma = \emptyset$, то, как обычно, мы пишем $W_0^{1,p}(\Omega)$ вместо $W_\emptyset^{1,p}(\Omega)$. Наконец, через $W_\Gamma^{-1,p'}(\Omega)$ обозначается пространство непрерывных антилинейных форм на $W_\Gamma^{1,p}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$.

Выражение $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ всегда обозначает спаривание банахова пространства X и его (анти)дуального пространства; в случае если $X = \mathbb{C}^d$, мы обычно пи-

шем $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если ω — измеримая по Лебегу существенно ограниченная функция на Ω со значениями в множестве $(d \times d)$ -матриц, то мы определяем оператор $-\nabla \cdot \omega \nabla: W_{\Gamma}^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_{\Gamma}^{-1,2}(\Omega)$ формулой

$$\langle -\nabla \cdot \omega \nabla v, w \rangle_{W_{\Gamma}^{1,2}} := \int_{\Omega} \omega \nabla v \cdot \nabla \bar{w} \, dx, \quad v, w \in W_{\Gamma}^{1,2}(\Omega).$$

§3. Преобразование задачи

Все приемы, используемые нами при преобразовании задачи, существенно опираются на тот факт, что билипшицевы преобразования не изменяют ее общей структуры. Поэтому приведем сначала важную лемму из [9], позволяющую преобразовывать эллиптические операторы в дивергентной форме с помощью билипшицевых отображений с сохранением оптимальной регулярности.

Предложение 3.1 [9, предложение 16]. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ — ограниченная липшицева область, а Γ — открытое подмножество ее границы. Предположим, что ϕ — билипшицево отображение окрестности множества $\bar{\Omega}$ в $\mathbb{R}^d$, и введем обозначения $\phi(\Omega) = \Omega_*$ и $\phi(\Gamma) = \Gamma_*$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого $p \in]1, \infty[$ отображение ϕ порождает линейный топологический изоморфизм

$$\Psi_p: W_{\Gamma_*}^{1,p}(\Omega_*) \rightarrow W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega),$$

задаваемый формулой $(\Psi_p f)(x) = f(\phi(x)) = (f \circ \phi)(x)$.

(ii) Оператор Ψ_p^* является линейным топологическим изоморфизмом между $W_{\Gamma}^{-1,p}(\Omega)$ и $W_{\Gamma_*}^{-1,p}(\Omega_*)$.

(iii) Если ω — ограниченная измеримая функция на Ω со значениями в множестве $d \times d$ -матриц, то

$$\Psi_p^* \nabla \cdot \omega \nabla \Psi_p = \nabla \cdot \underline{\omega} \nabla,$$

где

$$\underline{\omega}(y) = (D\phi)(\phi^{-1}(y))\omega(\phi^{-1}(y))(D\phi)^T(\phi^{-1}(y)) \frac{1}{|\det(D\phi)(\phi^{-1}y)|}, \quad (3.1)$$

$D\phi$ — матрица Якоби отображения ϕ , а $\det(D\phi)$ — ее определитель.

Кроме того, если отображение $-\nabla \cdot \omega \nabla: W_{\Gamma}^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_{\Gamma}^{-1,p}(\Omega)$ — топологический изоморфизм, то топологическим изоморфизмом является и отображение $-\nabla \cdot \underline{\omega} \nabla: W_{\Gamma_*}^{1,p}(\Omega_*) \rightarrow W_{\Gamma_*}^{-1,p}(\Omega_*)$ (причем верно и обратное).

3.1. Локальное выпрямление границы кусочно линейными отображениями. В этом разделе мы докажем при весьма общих предположениях, что границу полиэдра в $\mathbb{R}^3$ можно локально (в окрестности любой ее точки) выпрямить кусочно линейным гомеоморфизмом. В частности, это означает, что если полиэдр разбит на клетки, в каждой из которых коэффициентная функция эллиптического оператора постоянна, то существует отображение, которое локально выпрямляет границу, не разрушая такую конфигурацию.

Для этого нам понадобятся некоторые понятия и результаты геометрической топологии, которые мы сейчас кратко и введем в духе книг Мойзе [23] и Александрова–Хопфа [1]; см. также Бинг [2].

Если $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{R}^3$, причем выпуклая оболочка этих точек содержит d -мерный шар и ни одного $(d+1)$ -мерного шара, то эта выпуклая оболочка называется d -клеткой, порожденной точками $v_0, \dots, v_m$. Стороны, ребра и вершины границы d -клетки называются *гранями*. Если $m \leq 3$ и точки $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{R}^3$ находятся в общем положении, то мы называем клетку *симплексом*. Симплексы в $\mathbb{R}^3$ суть тетраэдры, треугольники, ребра или вершины.

Евклидовым комплексом K называется локально конечное семейство клеток в $\mathbb{R}^3$, такое, что K содержит все грани всех своих элементов, причем если σ и τ — две клетки из K , такие, что $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, то $\sigma \cap \tau$ является гранью как клетки σ , так и клетки τ (см. [1, гл. III]). Комплекс называется *симплициальным*, если все его клетки — симплексы. Пусть K — комплекс в $\mathbb{R}^3$; тогда через $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ обозначается *полиэдр*, задаваемый комплексом K . Если v — вершина евклидова комплекса K , то множество всех клеток из K , содержащих v , вместе со всеми их гранями образует *звезду* $K_v^\star$ вершины v в K . Все те грани в этой звезде, для которых v не является вершиной, образуют *линку* вершины v . *Открытая звезда* определяется как теоретико-множественная разность звезды и линка. (Открытая звезда является открытым множеством в $|K|$ и не отвечает никакому подкомплексу.)

Если K — конечный симплициальный комплекс, такой, что $|K|$ является m -мерным топологическим многообразием (с краем), то комплекс K называется *триангулированным m -многообразием (с краем)*, а топологическое пространство $|K|$ — *полиэдральным m -многообразием (с краем)*. Через K_∂ мы обозначаем его *граничный комплекс*, порожденный всеми теми $(m-1)$ -клетками исходного комплекса, каждая из которых лежит в точности в одной m -клетке. Все рассматриваемые в дальнейшем многообразия M предполагаются компактными.

Если K и K' — евклидовы комплексы в $\mathbb{R}^3$, такие, что $|K| = |K'|$ и любая клетка $\sigma \in K'$ содержится в некотором элементе из K , то K' называется *подразделением* комплекса K . Ниже нам неоднократно потребуются следующая важная связь между евклидовыми комплексами и симплициальными комплексами.

Предложение 3.2 [1, гл. III.2]. *Каждый евклидов комплекс K допускает симплициальное подразделение K' без новых вершин. Более того, для произвольной заранее заданной вершины $v \in K$ подразделение K' можно построить таким образом, что вершина v будет одним из концов каждого из ребер в K' , которые окажутся в ее открытой звезде.*

Пусть K — комплекс в $\mathbb{R}^d$. Непрерывное отображение f полиэдра $|K|$ на подмножество в $\mathbb{R}^m$ называется *кусочно линейным*, если существует подразделение K' комплекса K , такое, что сужение $f|_\sigma$ — линейная функция для каждого $\sigma \in K'$.

Замечание 3.3. В силу предложения 3.2 всегда можно предполагать, что клетки, на которых кусочно линейное отображение линейно, суть симплексы.

Если K — конечный комплекс, а f инъективно, то на $f(|K|)$ возникает структура комплекса, индуцированная из K с помощью f . В случае симплициальных комплексов это определение совпадает с данным в [23]; ср. [2, гл. II]. В [23, гл. 5] можно также найти базовые сведения о *кусочно линейных гомеоморфизмах*.

Наконец, нам понадобятся различные понятия края (границы) для многообразий и комплексов. Пусть M есть m -мерное топологическое многообразие в $\mathbb{R}^3$, с краем или без. Тогда все точки из M , у которых есть открытая окрестность в M , гомеоморфная $\mathbb{R}^m$, образуют *внутренность* $\text{Int}(M)$ многообразия M , а оставшееся множество $\text{Bd}(M) := M \setminus \text{Int}(M)$ называется *теоретико-множественным краем* многообразия M .

Символом ∂A обозначается *топологическая граница* множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$, т.е. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^d \setminus A}$, где замыкание следует брать в $\mathbb{R}^d$.

Замечание 3.4. Пусть K — триангулированное 3-многообразие с краем. Предположим, что μ — коэффициентная функция на $|K|$, постоянная на внутренности каждой 3-клетки из K , и что $\phi: |K| \rightarrow \mathbb{R}^3$ — кусочно линейное отображение, осуществляющее гомеоморфизм множества $|K|$ на его образ. Тогда полученная в результате коэффициентная функция на $\phi(|K|)$ (см. (3.1)) постоянна на внутренности каждой из 3-клеток, прообразы которых содержатся в 3-клетках из K .

В дальнейшем мы используем следующие результаты геометрической топологии.

Предложение 3.5 [2, теорема I.2.A]. *Если K — конечный симплициальный комплекс в $\mathbb{R}^3$, то существует триангуляция $K_{\mathbb{R}^3}$ пространства $\mathbb{R}^3$, содержащая K в качестве подкомплекса.*

Предложение 3.6 ([17, теорема 2.18], [28, с. 504]). *Пусть K — конечный евклидов комплекс в $\mathbb{R}^d$, и пусть отображение $\phi: |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ кусочно линейно и непрерывно. Тогда оно непрерывно по Липшицу.*

Предложение 3.7 (теорема Шёнфлиса для трехмерного кусочно линейного случая ([23, теорема 17.12], [2, теорема XIV.I])). *Пусть S — полиэдр в $\mathbb{R}^3$, граница которого топологически является 2-сферой. Тогда существует кусочно линейный гомеоморфизм $\phi_S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий внутренность полиэдра S на внутренность тетраэдра σ^3 , а ∂S — на $\partial \sigma^3$.*

Замечание 3.8. Ниже мы применим теорему Шёнфлиса для трехмерного кусочно линейного случая, чтобы получить гомеоморфизм на границу не тетраэдра, а кирпича $\overline{\mathcal{C}}_+ = [-1, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1] = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3 : y \geq 0\}$. Более того, нам потребуется, чтобы заданная точка $a \in S$ отображалась в точку $0 \in \partial \mathcal{C}_+$. Оба эти условия можно выполнить, построив кусочно линейный гомеоморфизм $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий σ^3 на $\overline{\mathcal{C}}_+$ и переносящий заданную точку $a \in \partial \sigma^3$ в 0 . Этого легко добиться явной геометрической конструкцией, в которой следует различать три случая, когда a лежит в относительной внутренности треугольной грани, на ребре или в вершине тетраэдра σ^3 .

Докажем теперь ключевую лемму, которая понадобится для теоремы о выпрямлении в следующем разделе.

Лемма 3.9. *Пусть K — триангулированное 3-многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$, и пусть v — вершина на границе полиэдра $|K|$. Тогда полиэдр $|K_v^\star|$ звезды вершины v в K гомеоморфен замкнутому единичному шару в $\mathbb{R}^3$. В частности, краем многообразия $K_v^\star$ является полидральная 2-сфера.*

Доказательство. Так как $|K|$ — трехмерное многообразие с краем и одновременно замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^3$, то $\text{Bd } |K| = \partial |K|$ (см. [23, теорема 17.1]). Далее, согласно [23, теорема 23.3], край $\text{Bd } |K|$ есть 2-многообразие, которое также является полиэдром, отвечающим комплексу K_∂ , т.е. $|K_\partial| = \text{Bd } |K|$ (см. [23, теорема 23.7]). Следовательно, звезда $K_{\partial,v}^\star$ вершины $v \in K_\partial$ представляет собой диск (см. [23, теорема 4.8]). Рассмотрим настолько малый шар B с центром в v , что он пересекает только те грани комплекса K , которые лежат в $K_v^\star$, т.е. содержат v . Прежде всего, заметим, что $K_{\partial,v}^\star \cap B$ гомеоморфно $K_{\partial,v}^\star$. Поэтому пересечение диска $K_{\partial,v}^\star$ с границей шара B представляет собой жорданову кривую на 2-сфере ∂B , которая по двумерной теореме Шёнфлиса [23, теорема 10.2] делит сферу на два диска, одним из которых является $\partial B \cap K_v^\star$. Таким образом, радиальная проекция из v показывает, что звезда $K_v^\star$ является конусом (с вершиной v) над диском, а следовательно, шаром; его граница, будучи объединением двух дисков, а именно, звезды вершины v в $K_{\partial,v}^\star$ и линка вершины v в $K_v^\star$, является 2-сферой. $\square$

3.2. Теорема о кусочно линейном выпрямлении. Цель данного раздела состоит в том, чтобы установить следующий результат.

Теорема 3.10. Пусть $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ — область, такая, что $\bar{\Pi}$ — полиэдральное 3-многообразие с краем, удовлетворяющее условию $\Pi = \text{Int}(\bar{\Pi})$. Тогда Π — липшицева область и локальные билипшицевы карты вблизи точек ее границы могут быть заданы кусочно линейными гомеоморфизмами следующим образом.

Пусть K_Π — евклидов комплекс, такой, что $|K_\Pi| = \bar{\Pi}$. Продолжим его до триангуляции $K_{\mathbb{R}^3} \supset K_\Pi$ пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда для любой точки $a \in \partial \Pi$ существует непрерывное кусочно линейное отображение φ_a куба $\mathcal{C} = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ на замкнутую окрестность $\mathcal{W}_a$ точки a в $\mathbb{R}^3$ со следующими свойствами:

- (1) точка 0 отображается в a ;
- (2) множество $\Sigma =]-1, 1[\times \{0\} \times]-1, 1[$ отображается в границу $\partial \Pi$ области Π ;
- (3) множество $\mathcal{C}_+ =]-1, 1[\times]0, 1[\times]-1, 1[$ отображается в область Π ;
- (4) множество $\mathcal{C}_- =]-1, 1[\times]-1, 0[\times]-1, 1[$ отображается во внешность $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Pi}$ области Π .

Кроме того, комплекс $L_{\overline{\mathcal{C}}}$, связанный с отображением φ_a , обладает следующими свойствами:

- (5) для любого $A \in L_{\overline{\mathcal{C}}}$ множество $\varphi_a(A)$ является подмножеством элемента звезды вершины a в $K_{\mathbb{R}^3}$; в частности, если $A \in L_{\overline{\mathcal{C}}}$ — подмножество в $\mathcal{C}_+$, то $\varphi_a(A)$ — подмножество элемента звезды вершины a в K_Π .
- (6) у каждой 3-клетки комплекса $L_{\overline{\mathcal{C}}}$ одна из вершин лежит в точке 0;
- (7) каждое ребро комплекса $L_{\overline{\mathcal{C}}}$, пересекающееся с $\mathcal{C}$, соединяет точку 0 с вершиной, лежащей в $\partial \mathcal{C}$.

Замечание 3.11. Ключевые условия здесь — это равенство $\Pi = \text{Int}(\bar{\Pi})$ и тот факт, что $\bar{\Pi}$ — многообразие с краем. Первое условие исключает трещины, а второе запрещает, например, призму с таким основанием, как показано на рис. 1, ср. замечание 4.3.

Рис. 1. Пинцет — не многообразие с краем, ср. замечание 3.11.

Доказательство теоремы 3.10. Все утверждения теоремы легко установить для случая, когда a — относительно внутренняя точка граничного треугольника комплекса K_Π , и довольно несложно доказать в том случае, когда точка a лежит на ребре комплекса K_Π , поскольку тогда проекция параллельно этому ребру сводит дело к двумерной задаче. Трудным случаем является тот, в котором a — вершина комплекса K_Π .

Лемма 3.9 вместе с теоремой Шёнфлиса для трехмерного кусочно линейного случая, адаптированной согласно замечанию 3.8, дает кусочно линейный гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, отображающий звезду $K_a^\star$ на кирпич $\overline{\mathcal{C}_+} = [-1, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$, а вершину a — в граничную точку $0 \in \partial \mathcal{C}_+$. Пусть L_{ref} — подразделение комплекса $K_{\mathbb{R}^3}$ и одновременно измельчение триангуляции пространства $\mathbb{R}^3$, связанной с кусочно линейным гомеоморфизмом $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (с подкомплексом, триангулирующим $K_a^\star$). С точностью до еще одного подразделения (не сужающего полиэдр звезды вершины a), можно предположить, что 3-клетки комплекса L_{ref} суть тетраэдры; мы перейдем к этому подразделению, но сохраним обозначение L_{ref} .

Пусть $L_a^\star$ — звезда вершины a в L_{ref} . Рассмотрим теперь комплекс $h(L_a^\star)$. Полиэдр $|h(L_a^\star)|$ является окрестностью нуля. Очевидно, что все клетки комплекса $h(L_a^\star)$ — снова тетраэдры, на этот раз с одной вершиной в нуле. Кроме того, все ребра, пересекающие внутренность полиэдра $|h(L_a^\star)|$, выходят из нуля. Пусть $\varepsilon \overline{\mathcal{C}}$ — куб, лежащий во внутренности полиэдра $|h(L_a^\star)|$. Таким образом, пересечение с $|h(L_a^\star)|$ индуцирует на $\varepsilon \overline{\mathcal{C}}$ структуру комплекса, у клеток которого одна из вершин находится в нуле. Далее, отображение $\varphi_a := h^{-1}|_{\varepsilon \overline{\mathcal{C}}}$ линейно на каждой из этих клеток. Итак, окончательно, масштабируя $x \mapsto \varepsilon x$ и полагая $\mathcal{W}_a := \varphi_a(\overline{\mathcal{C}})$, получаем нужную окрестность. Необходимое свойство билипшицевости отображения φ_a следует из предложения 3.6. $\square$

§4. Реберные особенности

В этом параграфе, после некоторых приготовлений, мы напомним результат об оптимальной регулярности, доказанный в [21] для гетерогенных задач Дирихле в полиэдральных областях, и объясним, как идентифицировать возникающие реберные особенности. Сначала введем некоторые понятия и обозначения, отвечающие нашей геометрической ситуации с полиэдральной областью Π и кусочно постоянной коэффициентной функцией μ .

Определение 4.1. Пусть $\iota, \vartheta \in]-\pi, \pi]$, $\iota < \vartheta$. Определим *сектор*

$$S_\iota^\vartheta := \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r > 0, \theta \in]\iota, \vartheta[\}.$$

Определение 4.2. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ — липшицева область, такая, что $\bar{\Omega}$ — полиэдральное 3-многообразие с краем, ассоциированное с конечным комплексом K . Если $\{\sigma_k\}_k$ — множество всех 3-клеток из K , то определим μ как матричную функцию на Ω , постоянную на внутренности каждой клетки σ_k , значения которой — вещественные симметрические положительно определенные матрицы размера 3×3 . Возьмем ребро E любой из клеток σ_k и рассмотрим произвольную точку P этого ребра, не являющуюся его концом.

Выберем новую ортогональную систему координат (x, y, z) с началом в точке P , такую, что направление ребра E совпадает с осью z . Через $\mathcal{O}_E$ обозначим матрицу соответствующего ортогонального преобразования, а через $\mu_{E,P}$ — кусочно постоянную матричную функцию, совпадающую для x из окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^3$ с $A_{E,Px} := \mathcal{O}_E \mu(\mathcal{O}_E^{-1}x + P) \mathcal{O}_E^{-1}$ и удовлетворяющую условию

$$\mu_{E,P}(tx, ty, z) = \mu_{E,P}(x, y, 0) \quad \text{для всех } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0. \quad (4.1)$$

Через $\mu_E(\cdot, \cdot)$ обозначим верхний левый 2×2 -блок матрицы $\mu_{E,P}(\cdot, \cdot, 0)$.

Замечание 4.3. Существенно, что, как и указывают наши обозначения, коэффициентная функция μ_E — одна и та же для всех точек P из (относительной) внутренности ребра E .

Существуют углы $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n \leq \theta_0 + 2\pi$, такие, что μ_E постоянна в каждом из секторов $S_{\theta_j}^{\theta_{j+1}}$ и принимает значения в множестве вещественных симметрических положительно определенных матриц. В дальнейшем такие коэффициентные функции в секторе $S \subseteq \mathbb{R}^2$ будут называться *посекторно постоянными*.

Если μ_E отвечает внутреннему ребру E , то $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$. В противном случае μ_E задана на бесконечном секторе $S_{\theta_0}^{\theta_n}$, который вблизи P совпадает с пересечением преобразованной области Ω с плоскостью (x, y) .

Заметим, что полный сектор $S_{\theta_0}^{\theta_n}$ в случае граничных ребер появляется в действительности благодаря тому факту, что $\bar{\Omega}$ — полиэдральное 3-многообразие с краем.

Чтобы привести результат из [21] об оптимальной регулярности, введем теперь оператор Штурма–Лиувилля, ассоциированный с ребром и коэффициентной функцией μ .

Определение 4.4. Пусть заданы числа $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n \leq \theta_0 + 2\pi$, а также вещественные симметрические положительно определенные 2×2 -матрицы $\rho^1, \dots, \rho^n$, ассоциированные с секторами $S_{\theta_0}^{\theta_1}, \dots, S_{\theta_{n-1}}^{\theta_n}$. Обозначим получающуюся коэффициентную функцию на всем секторе $S_{\theta_0}^{\theta_n}$ через ρ . Введем на множестве $[\theta_0, \theta_n] \setminus \{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ коэффициентные функции b_0, b_1, b_2 , сужения которых на интервал $[\theta_j, \theta_{j+1}[$, $j = 0, \dots, n-1$, заданы формулами

$$\begin{aligned} b_0(\theta) &= \rho_{11}^j \cos^2 \theta + 2\rho_{12}^j \sin \theta \cos \theta + \rho_{22}^j \sin^2 \theta, \\ b_1(\theta) &= (\rho_{22}^j - \rho_{11}^j) \sin \theta \cos \theta + \rho_{12}^j (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ b_2(\theta) &= \rho_{11}^j \sin^2 \theta - 2\rho_{12}^j \sin \theta \cos \theta + \rho_{22}^j \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Если $\theta_n \neq \theta_0 + 2\pi$, то определим пространство $\mathcal{H}$ как $W^{1,2}([\theta_0, \theta_n])$ в случае условия Неймана и как $W_0^{1,2}([\theta_0, \theta_n])$ в случае условия Дирихле. Если $\theta_n =$

$\theta_0 + 2\pi$ (случай внутреннего ребра), то определим $\mathcal{H}$ как периодическое пространство Соболева $W^{1,2}([\theta_0, \theta_n]) \cap \{v : v(\theta_0) = v(\theta_n)\}$, которое очевидным образом можно идентифицировать с пространством Соболева $W^{1,2}(S^1)$ на единичной окружности S^1 . Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим квадратичную форму t_λ на $\mathcal{H}$, полагая

$$t_\lambda[v] := \int_{\theta_0}^{\theta_n} (b_2 v' \overline{v'} + \lambda b_1 v \overline{v'} - \lambda b_1 v' \overline{v} - \lambda^2 b_0 v \overline{v}) d\theta, \quad (4.2)$$

и $\mathcal{A}_\lambda$ как оператор, индуцированный формой t_λ на пространстве $L^2([\theta_0, \theta_n])$ или на $L^2(S^1)$ соответственно.

Как обычно [19], семейство $\{\mathcal{A}_\lambda\}_\lambda$ будет в дальнейшем называться соответствующим *операторным пучком*.

Определение 4.5. Пусть E — произвольное ребро триангуляции множества $\overline{\Omega}$, и пусть $\mathcal{A}_\lambda$ задано, как в определении 4.4, с $\rho = \mu_E$. Назовем число

$$\inf\{\operatorname{Re} \lambda > 0 : \ker(\mathcal{A}_\lambda) \neq \{0\}\}$$

показателем сингулярности, ассоциированным с E . Более общо, число λ , $\operatorname{Re} \lambda > 0$, такое, что $\ker(\mathcal{A}_\lambda) \neq \{0\}$, будем называть *сингулярным числом* операторного пучка $\mathcal{A}_\lambda$.

Приведем теперь центральный результат о линейной регулярности из [21, теорема 2.3], который в дальнейшем послужит основным инструментом в доказательстве нашего результата о регулярности.

Предложение 4.6. Пусть Ω , $\{\sigma_k\}_k$ и μ такие же, как в определении 4.2. Если для любого ребра триангуляции $\{\sigma_k\}_k$ ассоциированный показатель сингулярности больше, чем $1/3$, то существует $p > 3$, такое, что

$$-\nabla \cdot \mu \nabla : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p}(\Omega)$$

— топологический изоморфизм.

Замечание 4.7. Хорошо известно, что в любой полосе $\{\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 : |\lambda_1| \leq c\}$ содержится лишь конечное число значений λ , для которых ядро оператора $\mathcal{A}_\lambda$ нетривиально, см. [21, следствие 3.11]. Поэтому достаточно показать, что ни у одного из операторов $\mathcal{A}_\lambda$ с $0 < \operatorname{Re} \lambda \leq 1/3$ нет нетривиального ядра.

В последующих параграфах все ребра, возникающие в нашей задаче, изучаются на предмет тривиальности ядра $\ker(\mathcal{A}_\lambda)$. Здесь существенны два типа ребер, а именно, мономатериальные ребра и биматериальные внешние ребра, описываемые в следующем определении.

Определение 4.8. Пусть E — ребро многообразия $\overline{\Omega}$, лежащее в $\partial\Omega$. Используя терминологию из определения 4.2, скажем, что

(i) E — *мономатериальное ребро*, если у каждой точки в относительной внутренности ребра E имеется окрестность в $\overline{\Omega}$, на которой μ постоянна п. в. относительно трехмерной меры Лебега;

(ii) E — *биматериальное внешнее ребро*, если у функции $[\theta_0, \theta_n] \ni \theta \mapsto \mu_E(\cos(\theta), \sin(\theta))$ есть ровно один скачок, причем длины обоих интервалов постоянства этой функции не превосходят π . Здесь θ_0 и θ_n — углы, ассоциированные с E в замечании 4.3.

Для соответствующих особенностей имеются следующие два результата (см. [7, лемма 2.3] или [9, теорема 24/25]).

Предложение 4.9. Для любого мономатериального ребра E ядра ассоциированных с ним операторов $\mathcal{A}_\lambda$ тривиальны, если ставится чистое условие Дирихле или чистое условие Неймана, а $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1/2[$.

Предложение 4.10. Пусть $S_{\theta_0}^{\theta_1}, S_{\theta_1}^{\theta_2}$ — два соседних сектора в $\mathbb{R}^2$, такие, что $\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1 \leq \pi$ и $\theta_2 - \theta_0 < 2\pi$. Пусть ρ^1, ρ^2 — вещественные симметрические положительно определенные 2×2 -матрицы, отвечающие секторам $S_{\theta_0}^{\theta_1}$ и $S_{\theta_1}^{\theta_2}$ соответственно. Пусть t_λ — форма, определенная соотношением (4.2) на $W_0^{1,2}([\theta_0, \theta_2])$ или на $W^{1,2}([\theta_0, \theta_2])$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что ядро соответствующего оператора $\mathcal{A}_\lambda$ (см. определение 4.4) тривиально при $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1/2 + \varepsilon[$.

В оставшейся части этого параграфа собраны некоторые необходимые в дальнейшем результаты о реберных особенностях.

Прежде всего установим принцип инвариантности для множества сингулярных чисел операторного пучка $\mathcal{A}_\lambda$ при действии посекторно линейного отображения на геометрическую и коэффициентную конфигурации.

Определение 4.11. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^2$ — сектор, который разбит на подсекторы $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_m$, такие, что $\hat{S}_l$ соседствует с $\hat{S}_{l-1}$ и $\hat{S}_{l+1}$, $l = 2, \dots, m-1$. Пусть A — гомеоморфизм сектора S на другой сектор $S_\bullet$. Будем говорить, что A посекторно линейен, если его ограничение на каждый сектор $\hat{S}_l$ — линейное отображение, т. е. если из того, что $x, y \in \hat{S}_l$ и $x + y$ также лежит в $\hat{S}_l$, вытекает, что $Ax + Ay = A(x + y)$, и, кроме того, $A(tx) = tAx$ при $x \in \hat{S}_l$ и $t > 0$.

Замечание 4.12. Заметим, что отображение, обратное к посекторно линейному отображению, само посекторно линейно.

Располагая этими сведениями, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.13. Пусть задано разбиение сектора $S \subseteq \mathbb{R}^2$ на подсекторы $S_1, \dots, S_n$. Пусть ρ — коэффициентная функция на S , принимающая на каждом из секторов S_l постоянное значение ρ_l , представляющее собой симметрическую положительно определенную матрицу размера 2×2 . Далее, пусть $A: S \rightarrow S_\bullet$ — посекторно линейный гомеоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Преобразованная коэффициентная функция $\underline{\rho}$ (см. предложение 3.1) также посекторно постоянна на $S_\bullet$.

2. Если $\mathcal{A}_\lambda$ — операторный пучок, ассоциированный с коэффициентной функцией ρ , а $\underline{\mathcal{A}}_\lambda$ — соответствующий операторный пучок для коэффициентной функции $\underline{\rho}$ (ср. определение 4.4), то сингулярные числа (ср. определение 4.5) пучков $\mathcal{A}_\lambda$ и $\underline{\mathcal{A}}_\lambda$ в действительности совпадают. В частности, показатели сингулярности этих пучков одинаковы.

Доказательство. Первое утверждение следует из формулы преобразования (3.1). Второе утверждение доказано в [13, теорема 4.3] для случая, когда $\theta_n \neq \theta_0 + 2\pi$ и сектор S разбит только на два подсектора $\hat{S}_1, \hat{S}_2$. Достаточно очевидных изменений, чтобы перенести это доказательство на общий случай. Ключевым является тот факт, что посекторно линейное отображение однородно степени 1. $\square$

Замечание 4.14. Заметим, что разбиения на секторы $S_1, \dots, S_n$ и $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_m$ совершенно друг от друга не зависят. Тем не менее они имеют общее подразбиение.

Теорема 4.15. Пусть K_E — евклидов комплекс в $\mathbb{R}^3$ и выполнены следующие предположения.

1. Каждая 3-клетка $\sigma \in K_E$ содержит ребро E .
 2. Если $P \in E$ является произвольной (относительно) внутренней точкой, а $\mathcal{H}(P, E)$ — плоскость, содержащая P и перпендикулярная E , то пересечение $|K_E| \cap \mathcal{H}(P, E)$ локально вблизи P совпадает с полным сектором.
 3. ω — коэффициентная функция на $|K_E|$, принимающая значения в множестве вещественных симметричных положительно определенных 3×3 -матриц и постоянная на каждой клетке $\sigma \in K_E$.
 4. Отображение $\phi: |K_E| \rightarrow \mathbb{R}^3$ является гомеоморфизмом множества $|K_E|$ на его образ и линейно на каждой клетке $\sigma \in K_E$.
- Тогда преобразованная коэффициентная функция (см. предложение 3.1)

$$\rho(y) = (D\phi)(\phi^{-1}(y))\omega(\phi^{-1}(y))(D\phi)^T(\phi^{-1}(y)) \frac{1}{|\det(D\phi)(\phi^{-1}y)|}$$

на полиэдре $\phi(|K_E|)$ удовлетворяет (с необходимыми изменениями) предположению 3, и, кроме того, сингулярные числа соответствующих операторных пучков $\mathcal{A}_\lambda$ и $\underline{\mathcal{A}}_\lambda$ (ср. определение 4.4) одинаковы. В частности, совпадают их показатели сингулярности (ср. определение 4.5).

Доказательство. Мы покажем, что коэффициентные функции ω_E и $\rho_{\phi(E)}$ (ср. определение 4.2) связаны посекторно линейным отображением, что позволяет применить теорему 4.13.

Напомним, как получается коэффициентная функция ω_E , определяющая операторный пучок $\mathcal{A}_\lambda$: рассматривается аффинное преобразование $A_{E,P}$, переводящее произвольную точку $P \in E$ в начало координат и поворачивающее (сдвинутое) ребро E таким образом, чтобы оно совпало с осью z , см. определение 4.2. Коэффициентная функция $\omega_{E,P}$ совпадает на достаточно малой окрестности $\mathcal{V}$ начала координат $0 \in \mathbb{R}^3$ с коэффициентной функцией, получающейся из ω в результате преобразования $A_{E,P}$, ср. предложение 3.1, и продолжается на все $\mathbb{R}^3$ по формуле (4.1). Наконец, ω_E — верхний левый блок матрицы $\omega_{E,P}(\cdot, \cdot, 0)$ и, таким образом, уже не зависит от P , ср. определение 4.2.

Ту же конструкцию мы применяем к комплексу $\phi(K_E)$ и соответствующей коэффициентной функции ρ , определяя таким образом отображение $A_{\phi(E), \phi(P)}$ и операторный пучок $\underline{\mathcal{A}}_\lambda$. Отображение $B := A_{\phi(E), \phi(P)} \phi A_{E,P}^{-1}: A_{E,P}|K_E| \rightarrow A_{\phi(E), \phi(P)} \phi(|K_E|)$ — гомеоморфизм, действующий линейно на каждом клине $S_l \times]-\infty, \infty[$, где S_l — любой из секторов, определенных в замечании 4.3 и отвечающих здесь коэффициентной функции ω . Заметим, что B отображает $0 \in \mathbb{R}^3$ в себя и переводит вектор $(0, 0, 1)^T$ в вектор $(0, 0, \tau)^T$, где $\tau \neq 0$. Поэтому сужение отображения B на любой из этих клиньев должно быть линейным отображением вида

$$B_l = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \tau \end{pmatrix}.$$

Величина τ не зависит от конкретного клина, но $|\tau|$ является коэффициентом растяжения ребра E относительно ϕ . В соответствии с формулой преобразования (3.1) для точек x из соответствующего клина-образа, которые к тому же близки к $A_{\phi(E),\phi(P)}\phi(E)$, имеем

$$\rho_{\phi(E),\phi(P)}(x) = \frac{1}{|\det(B_l)|} B_l \omega_{E,P}(B_l^{-1}(x)) B_l^T. \quad (4.3)$$

Однако ввиду (4.1) соотношение (4.3) распространяется на весь клин-образ. Для 3×3 -матрицы M пусть $\widehat{M}$ обозначает верхний левый блок размера 2×2 . Матрица $\widehat{B}$ порождает посекторно линейное отображение соответствующего сектора, который является частью плоскости (x, y) . Поскольку B имеет специальный вид, а именно, $b_{13} = b_{23} = 0$, мы получаем соотношение

$$\widehat{\rho}_{\phi(E),\phi(P)}(x) = \frac{1}{|\det(B)|} \widehat{B} \widehat{\omega}_{E,P}(B^{-1}(x)) \widehat{B}^T = \frac{1}{|\tau|} \frac{1}{|\det(\widehat{B})|} \widehat{B} \widehat{\omega}_{E,P}(B^{-1}(x)) \widehat{B}^T$$

при $x \in A_{\phi(E),\phi(P)}\phi(|K_E|)$. Отсюда следует, что

$$\rho_{\phi(E)}(x, y) = \widehat{\rho}_{\phi(E),\phi(P)}(x, y, 0) = \frac{1}{|\tau|} \frac{1}{|\det(\widehat{B})|} \widehat{B} \widehat{\omega}_{E,P}(B^{-1}(x, y, 0)) \widehat{B}^T. \quad (4.4)$$

Далее, опять-таки в силу специального вида матрицы B , получаем

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{B}^{-1} & 0 \\ c_{1,3} & c_{2,3} & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

Подстановка этого выражения в (4.4) дает

$$\rho_{\phi(E)}(x, y) = \frac{1}{|\tau|} \frac{1}{|\det(\widehat{B})|} \widehat{B} \widehat{\omega}_{E,P}(\widehat{B}^{-1}(x, y), z) \widehat{B}^T \quad (4.5)$$

при $z = c_{1,3}x + c_{2,3}y \in \mathbb{R}$. Однако коэффициентные функции $\omega_{E,P}$ и $\widehat{\omega}_{E,P}$ не зависят от z , так что окончательно получаем

$$\rho_{\phi(E)}(x, y) = \frac{1}{|\tau|} \frac{1}{|\det(\widehat{B})|} \widehat{B} \widehat{\omega}_{E,P}(\widehat{B}^{-1}(x, y), 0) \widehat{B}^T = \frac{1}{|\tau|} \frac{1}{|\det(\widehat{B})|} \widehat{B} \omega_E(\widehat{B}^{-1}(x, y)) \widehat{B}^T.$$

Итак, коэффициентная функция $\rho_{\phi(E)}$ получается из коэффициентной функции ω_E посекторно линейным отображением (с точностью до постоянного скалярного множителя $\frac{1}{|\tau|}$) и наоборот. Поэтому в силу теоремы 4.13 ядро $\ker \mathcal{A}_\lambda$ тривиально при условии, что тривиально ядро $\ker \mathcal{A}_\lambda$. $\square$

Последний результат этого параграфа в некотором смысле является обращением рассуждения, основанного на отражении (ср. леммы 6.3 и 6.4 ниже): он позволяет держать под контролем сингулярности на ребрах из Σ , получающиеся из четного отражения относительно бывшей неймановской части границы.

Лемма 4.16. Пусть полупространство $\{(x, y) : y > 0\}$ разбито на секторы $S_0^{\theta_1}, \dots, S_{\theta_{n-1}}^{\theta_n}$ с ассоциированными матрицами

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}^1 & \rho_{12}^1 \\ \rho_{12}^1 & \rho_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \rho_{11}^n & \rho_{12}^n \\ \rho_{12}^n & \rho_{22}^n \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Далее, предположим, что секторам $S_0^{-\theta_1}, \dots, S_{-\theta_{n-1}}^{-\pi}$ поставлены в соответствие матрицы

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}^1 & -\rho_{12}^1 \\ -\rho_{12}^1 & \rho_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \rho_{11}^n & -\rho_{12}^n \\ -\rho_{12}^n & \rho_{22}^n \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Обозначим через $\mathcal{A}_\lambda$ оператор, соответствующий матрицам (4.6), (4.7) при указанном разбиении пространства $\mathbb{R}^2$ на секторы. Далее, пусть $\mathcal{A}_\lambda^D$ и $\mathcal{A}_\lambda^N$ — операторы, задаваемые матрицами (4.6) в секторах полупространства $\{(x, y) : y > 0\}$ и граничными условиями Дирихле и Неймана соответственно. Тогда для любого λ , такого, что $\operatorname{Re} \lambda > 0$, ядро оператора $\mathcal{A}_\lambda$ тривиально при условии, что для этого же λ тривиальны ядра операторов $\mathcal{A}_\lambda^D$ и $\mathcal{A}_\lambda^N$.

Доказательство. Доказательство для случая двух секторов в полупространстве дано в [9, лемма 22]. С необходимыми изменениями оно переносится на случай многих секторов. $\square$

§5. Результат об оптимальной регулярности

Теперь можно сформулировать наш основной результат об оптимальной регулярности эллиптической задачи вблизи гетерогенной вершины Неймана.

Теорема 5.1. Пусть $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, такая, что она и ее замыкание $\bar{\Pi}$ имеют одну и ту же границу, причем $\bar{\Pi}$ — полиэдральное 3-многообразие с краем. Пусть $a_\blacktriangle$ — вершина многообразия $\bar{\Pi}$, и предположим, что выполнены следующие условия.

1. Коэффициентная функция μ на Π эллиптична и принимает значения в множестве вещественных симметрических положительно определенных матриц размера 3×3 .

2. Существует триангуляция многообразия $\bar{\Pi}$ (конечным) евклидовым комплексом K , таким, что μ постоянна на внутренней части каждой 3-клетки, принадлежащей K .

3. Каждое ребро в K , лежащее на границе области Π , для которого вершина $a_\blacktriangle$ является одним из концов, представляет собой мономатериальное ребро или биматериальное внешнее ребро.

4. Показатель сингулярности любого внутреннего ребра с концом в $a_\blacktriangle$, получающегося из триангуляции K , превышает $1/3$.

Тогда существует открытая окрестность $\mathcal{U}$ точки $a_\blacktriangle \in \mathbb{R}^3$, такая, что если положить $\Pi_\bullet := \Pi \cap \mathcal{U}$ и $\Gamma := \partial\Pi \cap \mathcal{U}$, то оператор

$$-\nabla \cdot \mu|_{\Pi_\bullet} \nabla : W_\Gamma^{1,p}(\Pi_\bullet) \rightarrow W_\Gamma^{-1,p}(\Pi_\bullet) \quad (5.1)$$

будет топологическим изоморфизмом для некоторого $p > 3$.

Замечание 5.2. 1. Условие 2 в теореме 5.1 ни в коем случае не означает, что коэффициентная функция μ обязана принимать разные значения на разных клетках.

2. Для случая оператора Лапласа (т.е. $\mu \equiv 1_{\mathbb{R}^3}$) теорема 5.1 утверждает, что одних лишь геометрических условий на Π достаточно, чтобы гарантировать, что (5.1) — изоморфизм, вне зависимости от того, насколько «дикий» в действительности является локальная геометрия области Π (ср. [6]). Итак, здесь мы находимся в той же ситуации, что и в случае задачи Дирихле (ср. предложения 4.6 и 4.9, а также [7, теорема 2.1]).

К сожалению, для внутренних ребер представляется чрезвычайно трудным выяснить, тривиальны ли ядра операторов $\mathcal{A}_\lambda$ в общем случае (см. подробное обсуждение в [7]). Однако имеется несколько важных конфигураций, для которых известно, что это предположение выполнено.

Определение 5.3. Пусть заданы углы $-\pi = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \pi$, и пусть матрица $\hat{\mu}$ постоянна в каждом секторе $S_j := S_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}$, $j = 1, \dots, n$, в $\mathbb{R}^2$. Тогда будем говорить, что $\hat{\mu}$ распределена *квазимоноotonно*, если существуют индексы $j_{\min}, j_{\max} \in \{1, \dots, n\}$, такие, что

$$\hat{\mu}|_{S_{j_{\max}}} \geq \hat{\mu}|_{S_{j_{\max}+1}} \geq \dots \geq \hat{\mu}|_{S_{j_{\min}-1}} \geq \hat{\mu}|_{S_{j_{\min}}} \leq \hat{\mu}|_{S_{j_{\min}+1}} \leq \dots \leq \hat{\mu}|_{S_{j_{\max}-1}} \leq \hat{\mu}|_{S_{j_{\max}}},$$

а также точка $x \in \mathbb{R}^2$, такая, что $x \in S_{j_{\max}}$ и $-x \in S_{j_{\min}}$. Здесь индексы рассматриваются по модулю n , т.е. S_{n+1} есть снова S_1 .

Пример 5.4. Условие 4 теоремы 5.1 выполнено в каждом из следующих случаев.

1. Существует в точности одна плоскость, содержащая $a_\blacktriangle$ и разбивающая Π в окрестности точки $a_\blacktriangle$ на две части, такие, что коэффициентная функция локально постоянна в каждой из этих частей. Разумеется, при этом вблизи точки $a_\blacktriangle$ нет внутренних ребер.

2. Существуют в точности две плоскости, содержащие точку $a_\blacktriangle$ и пересекающие Π , такие, что коэффициентная функция постоянна и скалярнозначна в каждой из соответствующих четырех четвертей пространства. Более того, эта последовательность скаляров монотонно возрастает, если начать с наименьшего из них и затем переходить из сектора в сектор (см. [26, теорема 6.4]).

3. Матрицы распределены квазимонотонно (ср. [7, лемма 2.1], а также [14]). В частности, это так, если μ скалярнозначна, а $\mathbb{R}^2$ разбивается на три сектора, угол раствора каждого из которых меньше π .

Замечание 5.5. Условие 3 в теореме 5.1, в частности, запрещает сочетание матриц M_+ , M_- , M_+ в трех соседних секторах, несмотря на то, что в нем участвуют только два разных материала.

§6. Доказательство теоремы 5.1

6.1. Локализация и отражение. Поскольку наша цель — доказать оптимальную эллиптическую регулярность в окрестности вершины a полиэдральной области Π , следующая задача состоит в том, чтобы определить подходящую окрестность $\mathcal{U}$ рассматриваемой точки a , в которой мы и будем исследовать регулярность решения.

Определение 6.1. Начиная с этого момента, мы все время предполагаем, что $a_\blacktriangle$ — вершина полиэдральной области Π и что $\varphi_{a_\blacktriangle}$ выбрана, как в теореме 3.10. Кроме того, определим евклидов комплекс $K_{\overline{\mathcal{C}}}^+$ как комплекс $L_{\overline{\mathcal{C}}} \cap \overline{\mathcal{C}}_+$.

Пусть теперь заданы срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с носителем $\text{supp}(\eta) \subseteq \mathcal{U}$ и правая часть $f \in (W^{1,p'}(\Pi))'$ для некоторого $p \in]3, 6]$. В следующей лемме выводится уравнение для усеченной функции ηv .

Лемма 6.2 [10, гл. 5.1]. Пусть $p \in]3, 6]$, и пусть $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ — открытое множество, такое, что область $\Pi_\bullet := \Pi \cap \mathcal{U}$ снова липшицева. Положим

$\Gamma := \partial\P \cap \mathcal{U}$. Пусть $v \in W^{1,2}(\Pi)$ — (единственное) решение уравнения

$$-\nabla \cdot \mu \nabla v + v = f \in (W^{1,p'}(\Pi))'. \quad (6.1)$$

Тогда $\eta v \in W_{\Gamma}^{1,2}(\Pi_{\bullet})$ и

$$-\nabla \cdot \mu|_{\Pi_{\bullet}} \nabla(\eta v) = g \in W_{\Gamma}^{-1,p}(\Pi_{\bullet}), \quad (6.2)$$

где g непрерывно зависит от f .

Эта лемма утверждает, что для заданных $f \in (W^{1,p'}(\Pi))'$ и вариационно-го решения v задачи (6.1) функция ηv является вариационным решением задачи (6.2) со смешанными граничными условиями (в том смысле, что запись $g \in L^2(\Pi_{\bullet})$ подразумевает условие Неймана на Γ и условие Дирихле на $\partial\P_{\bullet} \setminus \Gamma$). Таким образом, можно перефразировать исходную задачу о регулярности поведения решения в окрестности неймановского ребра в виде вопроса об оптимальной регулярности для смешанной граничной задачи.

На следующем шаге (с этого места полагая $\mathcal{U} := \varphi_{a_{\bullet}}(\mathcal{C})$) мы преобразуем нашу задачу с помощью кусочно линейного гомеоморфизма $\phi = \varphi_{a_{\bullet}}^{-1}$, построенного в теореме 3.10. Как указано в начале §3, уравнение (6.2) преобразуется тогда в

$$-\nabla \cdot \underline{\mu} \nabla u = h \in W_{\Sigma}^{-1,p}(\mathcal{C}_+), \quad (6.3)$$

где $u := (\eta v) \circ \phi^{-1}$. В дополнение к этому мы знаем, что регулярность поведения решений одинакова для конфигураций, связанных лишь билипшицевыми преобразованиями (ср. предложение 3.1). Поэтому решающим шагом в доказательстве основного результата теоремы 5.1 является следующая лемма.

Лемма 6.3. Пусть $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$, $a_{\bullet} \in \partial\P$ и μ такие же, как в теореме 5.1, а $\varphi_{a_{\bullet}}$ — такое же, как в теореме 3.10. Положим $\Pi_{\bullet} := \mathcal{U} \cap \Pi = \varphi_{a_{\bullet}}(\mathcal{C}) \cap \Pi$ и определим $\underline{\mu}$ как коэффициентную функцию, полученную на $\mathcal{C}_+$ из $\mu|_{\Pi_{\bullet}}$ с помощью билипшицева преобразования $\varphi_{a_{\bullet}}^{-1}$ (см. предложение 3.1).

Тогда отображение $-\nabla \cdot \underline{\mu} \nabla : W_{\Sigma}^{1,p}(\mathcal{C}_+) \rightarrow W_{\Sigma}^{-1,p}(\mathcal{C}_+)$ является топологическим изоморфизмом для некоторого $p > 3$.

Это снова задача со смешанными граничными условиями, но теперь неймановская часть границы Σ плоская. Поэтому можно применить стандартное рассуждение, основанное на отражении (см. [9, предложение 17]). В результате приходим к задаче Дирихле на кубе $\mathcal{C}$, которая будет рассмотрена ниже. Итак, чтобы доказать лемму 6.3, достаточно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.4. Отображение

$$-\nabla \cdot \hat{\mu} \nabla : W_0^{1,p}(\mathcal{C}) \rightarrow W^{-1,p}(\mathcal{C}), \quad (6.4)$$

где коэффициентная функция $\hat{\mu}$ получена из $\underline{\mu}$ четным отражением, является топологическим изоморфизмом для некоторого $p > 3$.

Очевидно, отображение (6.4) определяет задачу Дирихле на полиэдральной области. Чтобы найти триангуляцию куба $\mathcal{C}$, на 3-клетках которой коэффициентная функция $\hat{\mu}$ постоянна, введем следующее определение.

Определение 6.5. Определим комплекс $K_{\overline{\mathcal{C}}}$ как объединение всех клеток комплекса $K_{\mathcal{C}}^+$ и всех клеток, являющихся образами клеток комплекса $K_{\mathcal{C}}^+$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$.

Замечание 6.6. Триангуляция $K_{\overline{\mathcal{C}}}$ куба $\overline{\mathcal{C}}$, вообще говоря, отлична от $L_{\overline{\mathcal{C}}}$, но совпадает с ней на $\mathcal{C}_+$. Кроме того, коэффициентная функция $\hat{\mu}$ постоянна на внутренности каждой 3-клетки триангуляции $K_{\overline{\mathcal{C}}}$. Таким образом, этот комплекс определяет ребра, существенные для задачи Дирихле в лемме 6.4. При этом важно, что вся конфигурация коэффициентов на $\mathcal{C}$ связана с исходной конфигурацией коэффициентов в Π таким образом, который в дальнейшем позволит нам проконтролировать эллиптические реберные особенности с помощью условий, наложенных на коэффициентную функцию μ в Π .

В соответствии с предложением 4.6 для доказательства леммы 6.4 достаточно оценить реберные особенности. Подробности изложены в следующих двух разделах.

6.2. Поиск ребер. Чтобы найти все эти ребра, для заданной вершины $a_{\blacktriangle}$, рассмотрим коэффициентную функцию $\hat{\mu}$ из леммы 6.4. Вспомним в этом контексте замечание 6.6, а также кусочно линейное отображение $\varphi_{a_{\blacktriangle}}$ и комплекс $K_{\overline{\mathcal{C}}}$ из определений 6.1 и 6.5.

Определение 6.7. Для любых $t_0 > 0$ и векторов $a \in \mathbb{R}^3$ и $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ назовем множество $\{a + tb, t \in]0, t_0[\}$ *отрезком с начальной точкой* a . Отрезок в Π назовем *мономатериальным*, если он содержится во внутренности одной из 3-клеток комплекса K_{Π} . Отрезок в Π назовем *биклеточным*, если он лежит во внутренности некоторой 2-границы комплекса K_{Π} .

Замечание 6.8. Напомним, что матрица коэффициентов μ не обязана принимать разные значения на двух 3-клетках, примыкающих к 2-границе, содержащей биклеточный отрезок.

В дальнейшем существенны следующие факты о ребрах из $K_{\overline{\mathcal{C}}}$.

Лемма 6.9. Для ребра E через $\mathring{E}$ обозначим его относительную внутренность.

1. Любое ребро комплекса $K_{\overline{\mathcal{C}}}$, лежащее в $\partial\mathcal{C}$, является либо мономатериальным ребром, либо биматериальным внешним ребром.

2. Один из концов любого ребра E комплекса $K_{\overline{\mathcal{C}}}$, пересекающего $\mathcal{C}_+$, находится в точке 0. Следовательно, отрезок $\varphi_{a_{\blacktriangle}}(\mathring{E})$ начинается в точке $a_{\blacktriangle}$. Таким образом, $\varphi_{a_{\blacktriangle}}(\mathring{E})$ — либо мономатериальный или биклеточный отрезок в Π , либо содержится в ребре комплекса K_{Π} , т.е. в исходной триангуляции множества $\overline{\Pi}$.

3. Для любого ребра $E \subseteq \Sigma$ множество $\varphi_{a_{\blacktriangle}}(\mathring{E}) \subseteq \partial\Pi$ является отрезком с начальной точкой $a_{\blacktriangle}$ и потому либо мономатериальным отрезком, либо частью мономатериального ребра, либо частью биматериального внешнего ребра, уже присутствовавшего в исходной триангуляции K_{Π} .

Доказательство. Все три утверждения следуют из определения триангуляции полиэдра $\varepsilon\mathcal{C}$, индуцированной комплексом $h(L_a^{\star})$ (см. доказательство теоремы 3.10).

1. Поскольку ребра из $\partial\mathcal{C}_- \setminus \overline{\Sigma}$ являются отражениями ребер из $\partial\mathcal{C}_+ \setminus \overline{\Sigma}$, достаточно доказать утверждение для ребер, содержащихся в последнем множестве, и для ребер из $\partial\Sigma$. Рассматривая ребра из $\partial\mathcal{C}_+ \setminus \overline{\Sigma}$, важно помнить, что значение ε было выбрано так, чтобы гарантировать, что линк комплекса $h(L_a^\star)$ не пересекается с $\varepsilon\overline{\mathcal{C}}$. Таким образом, любое ребро, содержащееся в $\partial\mathcal{C}_+ \setminus \overline{\Sigma}$, либо является «естественным» ребром границы $\partial\mathcal{C}$, либо получается из пересечения какой-либо 2-клетки из $h(L_a^\star)$, одна из вершин которой есть точка 0, с $\partial(\varepsilon\overline{\mathcal{C}})$. Поскольку такая 2-клетка примыкает в точности к двум тетраэдрам, получающееся ребро может быть лишь мономатериальным или биматериальным. Наконец, каждое ребро E из $\partial\Sigma$ по построению является ребром в точности одного элемента из $K_{\overline{\mathcal{C}}}^+$ (см. определение 6.1). Вспоминая определение 6.5 комплекса $K_{\overline{\mathcal{C}}}$, понимаем, что E — мономатериальное или биматериальное ребро в $K_{\overline{\mathcal{C}}}$, в зависимости от того, отличается или нет коэффициентная функция на отраженной ячейке от коэффициентной функции на соответствующей ячейке в $K_{\overline{\mathcal{C}}}^+$.

2. По построению все ребра, пересекающие внутренность полиэдра $|h(L_a^\star)|$, начинаются в нуле. Ясно, что это свойство не пропадает при пересечении с $\varepsilon\overline{\mathcal{C}}$. Поэтому если E пересекается с $\mathcal{C}_+$, то $\varphi_{a_\bullet}(E)$ должно быть отрезком с одним из концов в точке $a_\bullet$. Но каждый такой отрезок может быть только мономатериальным или биклеточным либо должен быть частью ребра исходной триангуляции K_Π полиэдра $\overline{\Pi}$.

3. Каждое ребро из Σ уже присутствует в $h(L_a^\star)$ и потому должно начинаться в точке $0 \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, нужное утверждение следует из п. (5) теоремы 3.10. $\square$

6.3. Оценки реберных особенностей. В этом разделе мы завершаем доказательство теоремы 5.1. В силу рассуждений из §4 все в порядке, если для всех ребер триангуляции $K_{\overline{\mathcal{C}}}$ куба $\overline{\mathcal{C}}$ индуцированные операторы $\mathcal{A}_\lambda$ имеют тривиальное ядро для всех λ , таких, что $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1/3]$ (см. также замечание 4.7). Нужно рассмотреть следующие ребра:

- (I) ребра из $\partial\mathcal{C}$, (II) ребра из $\mathcal{C}_+$,
 (III) ребра из Σ , (IV) ребра из $\mathcal{C}_-$.

Нетрудно видеть, что ребра из п. (IV) можно рассматривать аналогично ребрам из п. (II). Итак, далее обсудим случаи (I)–(III).

(I) Ребра из $\partial\mathcal{C}$. В соответствии с п. 1 леммы 6.9 любое ребро, содержащееся в $\partial\mathcal{C}$, является мономатериальным ребром или биматериальным внешним ребром. Поэтому соответствующие операторы $\mathcal{A}_\lambda$ имеют при $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1/2]$ тривиальное ядро в силу предложений 4.9 и 4.10.

(II) Ребра из $\mathcal{C}_+$. Пусть E — ребро из $\mathcal{C}_+$. Тогда E — внутреннее ребро с одним из концов в $0 \in \mathbb{R}^3$, ср. п. 2 леммы 6.9. Рассмотрим евклидов комплекс $K_E \subseteq K_{\overline{\mathcal{C}}}^+$, содержащий в точности те тетраэдры $\sigma \in K_{\overline{\mathcal{C}}}^+$, для которых $E \subseteq \sigma$. Соответствующий двумерный сектор совпадает в этом случае со всем пространством $\mathbb{R}^2$. Совершим теперь обратное преобразование к исходной конфигурации в Π , т. е. применим кусочно линейный гомеоморфизм $\phi := \varphi_{a_\bullet}$, ассоциированный с $a_\bullet$ по теореме 3.10. Соответственно E перейдет тогда либо в мономатериальный или биклеточный отрезок в Π (каждый из которых далее рассматривается как ребро в весьма специфической конфигурации коэффициентов), либо

в открытую часть какого-либо ребра в K_{Π} , т. е. в исходной триангуляции полиэдра $\bar{\Pi}$ (см. лемму 6.9). В первых двух случаях реберных особенностей нет, т. е. $\ker \mathcal{A}_\lambda = \{0\}$ при $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1[$ (ср. [7, гл. 5.1]), в то время как в третьем случае по предположению имеем $\ker \mathcal{A}_\lambda = \{0\}$, если $\operatorname{Re} \lambda \leq 1/3 + \epsilon$. Теперь можно просто применить теорему 4.15.

(III) Ребра из Σ . Очевидно, что каждое ребро из Σ является внутренним ребром по отношению к $\mathcal{C}$, и в силу п. 2 леммы 6.9 один из его концов есть точка $0 \in \mathbb{R}^3$. Если для заданного ребра E из Σ матрицы коэффициентов, отвечающие соответствующим секторам в полупространстве $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$, имеют вид

$$M^1 = \begin{pmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 \\ m_{12}^1 & m_{22}^1 & m_{23}^1 \\ m_{13}^1 & m_{23}^1 & m_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad M^n = \begin{pmatrix} m_{11}^n & m_{12}^n & m_{13}^n \\ m_{12}^n & m_{22}^n & m_{23}^n \\ m_{13}^n & m_{23}^n & m_{33}^n \end{pmatrix},$$

то соответствующие матрицы в отраженных секторах имеют вид

$$M_-^1 = \begin{pmatrix} m_{11}^1 & -m_{12}^1 & m_{13}^1 \\ -m_{12}^1 & m_{22}^1 & -m_{23}^1 \\ m_{13}^1 & -m_{23}^1 & m_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad M_-^n = \begin{pmatrix} m_{11}^n & -m_{12}^n & m_{13}^n \\ -m_{12}^n & m_{22}^n & -m_{23}^n \\ m_{13}^n & -m_{23}^n & m_{33}^n \end{pmatrix}$$

(см. [9, предложение 17]). В соответствии с предложением 4.6 нужно выполнить поворот в плоскости (x, z) , переводящий рассматриваемое ребро в подмножество оси z . Это означает, что нужно рассмотреть матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

где в качестве M последовательно берутся $M^1, \dots, M^n, M_-^1, \dots, M_-^n$, а α — угол между соответствующим ребром и осью z . Непосредственное вычисление показывает, что получающийся блок размера 2×2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}^1 & \rho_{12}^1 \\ \rho_{12}^1 & \rho_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \rho_{11}^n & \rho_{12}^n \\ \rho_{12}^n & \rho_{22}^n \end{pmatrix}$$

в секторах из полупространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ и

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}^1 & -\rho_{12}^1 \\ -\rho_{12}^1 & \rho_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \rho_{11}^n & -\rho_{12}^n \\ -\rho_{12}^n & \rho_{22}^n \end{pmatrix}$$

в отраженных секторах из полупространства $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y < 0\}$. В этой конфигурации можно применить лемму 4.16, чтобы свести задачу, заданную на секториальном разбиении всего пространства $\mathbb{R}^2$, к задачам Дирихле и Неймана на секториальном разбиении полупространства.

Таким образом, остается доказать следующую лемму.

Лемма 6.10. Пусть $\underline{\mu}$ — преобразованная коэффициентная функция на $\mathcal{C}_+$, и пусть $\underline{\mathcal{A}}_\lambda^D$ и $\underline{\mathcal{A}}_\lambda^N$ — операторные пучки Штурма-Лиувилля, отвечающие ребру из Σ и граничным условиям Дирихле и Неймана соответственно. Тогда ядра операторов $\underline{\mathcal{A}}_\lambda^D$ и $\underline{\mathcal{A}}_\lambda^N$ тривиальны при $\operatorname{Re} \lambda \in]0, 1/2]$.

Доказательство. Пусть E — ребро из Σ . Рассмотрим на этот раз евклидов комплекс K_E , содержащий в точности те тетраэдры $\sigma \in K_{\mathcal{C}}^+$, для которых $E \subseteq \sigma$

(ср. с определением 6.1). Проекция полиэдра $|K_E|$ на любую перпендикулярную к E плоскость локально вблизи E является сектором, а именно, соответствующим полупространством в $\mathbb{R}^2$. Это гарантирует выполнение предположения 2 в теореме 4.15.

Преобразуем теперь соответствующее ребро обратно в исходную конфигурацию в Π , т.е. применим отображение $\phi := \varphi_{a_\bullet}$ в смысле §3. Образ ребра E при этом отображении обязательно либо содержится в плоской грани одной из клеток комплекса K_Π , либо является частью мономатериального ребра или биматериального внешнего ребра, уже присутствовавшего в исходной триангуляции K_Π (см. п. 3 леммы 6.9). Итак, разрез через $\Pi_\bullet$ перпендикулярно $\phi(E)$ в окрестности образа $\phi(E)$ выглядит, как показано на рис. 2. Заметим, что в силу определения биматериального внешнего ребра оба угла раствора секторов в третьем случае не превосходят π .

Рис. 2. Разрез через $\Pi_\bullet$ перпендикулярно $\phi(E)$ для мономатериального отрезка, мономатериального ребра и биматериального ребра соответственно.

Для этих конфигураций полоса $\{\lambda : 0 < \operatorname{Re} \lambda \leq \frac{1}{2}\}$ не содержит сингулярных чисел соответствующих операторных пучков $\mathcal{A}_\lambda$ в силу предложений 4.9 и 4.10. Итак, применение теоремы 4.15 опять приводит к нужному утверждению. $\square$

§7. Заключительные замечания

Замечание 7.1. Мы полагаем, что наши предположения в общем случае являются также и необходимыми. Точнее, если одно из участвующих в задаче ребер допускает показатель сингулярности меньше $1/3$, то [9, лемма 14] позволяет построить функцию на $\mathbb{R}^3$, градиент которой не лежит в L^3 . Применяя подходящую срезающую функцию, можно добиться, чтобы носитель лежал в подходящем конусе, причем особенность появляется в его вершине.

Замечание 7.2. Доказанный в статье результат о регулярности легко переносится на задачи с граничными условиями Робина, поскольку соответствующий граничный оператор компактен относительно главной части.

Благодарности. Мы признательны Хансу-Гюнтеру Боте за полезные обсуждения, касающиеся разд. 3.1. Мы благодарны рецензенту, который, в частности, предложил более естественный способ обсуждения особенностей для ребер полукуба $\mathcal{C}_+$, чем в более ранней версии статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935; *исправленное репринтное издание*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
- [2] R. H. Bing, *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, AMS Colloquium Publications, vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [3] M. Chipot, D. Kinderlehrer, G. V. Caffarelli, *Smoothness of linear laminates*, Arch. Rational Mech. Anal., **96**:1 (1986), 81–96.
- [4] M. Costabel, M. Dauge, S. Nicaise, *Singularities of Maxwell interface problems*, M2AN, Math. Model. Numer. Anal., **33**:3 (1999), 627–649.
- [5] A. Cianchi, V. Maz'ya, *Neumann problems and isocapacitary inequalities*, J. Math. Pures Appl., **89**:1 (2008), 71–105.
- [6] M. Dauge, *Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra*, Integral Equations Operator Theory, **15**:2 (1992), 227–261.
- [7] J. Elschner, H.-C. Kaiser, J. Rehberg, G. Schmidt, $W^{1,q}$ regularity results for elliptic transmission problems on heterogeneous polyhedra, Math. Models Methods Appl. Sci., **17**:4 (2007), 593–615.
- [8] J. Elschner, J. Rehberg, G. Schmidt, *Optimal regularity for elliptic transmission problems including C^1 interfaces*, Interfaces Free Bound., **9**:2 (2007), 233–252.
- [9] R. Haller-Dintelmann, H.-C. Kaiser, J. Rehberg, *Elliptic model problems including mixed boundary conditions and material heterogeneities*, J. Math. Pures Appl., **89**:1 (2008), 25–48.
- [10] R. Haller-Dintelmann, J. Rehberg, *Maximal parabolic regularity for divergence operators including mixed boundary conditions*, J. Differential Equations, **247** (2009), 1354–1396.
- [11] D. Hömberg, Ch. Meyer, J. Rehberg, W. Ring, *Optimal control for the thermistor problem*, SIAM J. Control Optim., **48** (2010), 3449–3481.
- [12] D. Jerison, C. Kenig, *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **130**:1 (1995), 161–219.
- [13] H.-C. Kaiser, J. Rehberg, *Optimal elliptic regularity at the crossing of a material interface and a Neumann boundary edge*, J. Math. Sci. (N.Y.), **169**:2 (2010), 145–166.
- [14] D. Knees, *On the regularity of weak solutions of quasi-linear elliptic transmission problems on polyhedral domains*, Z. Anal. Anwendungen, **23**:3 (2004), 509–546.
- [15] D. Leguillon, E. Sanchez-Palenzia, *Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity*, John Wiley & Sons, Chichester; Masson, Paris, 1987.
- [16] Y. Y. Li, M. Vogelius, *Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients*, Arch. Ration. Mech. Anal., **153**:2 (2000), 91–151.
- [17] J. Luukkainen, J. Väisälä, *Elements of Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math., **3**:1 (1977), 85–122.
- [18] В. Г. Маз'я, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1985.
- [19] V. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic Equations in Polyhedral Domains*, Math. Surveys and Monographs, vol. 162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [20] V. Maz'ya, J. Rossmann, *Weighted L_p estimates of solutions to boundary value problems for second order elliptic systems in polyhedral domains*, Z. Angew. Math. Mech., **83**:7 (2003), 435–467.
- [21] V. Maz'ya, J. Elschner, J. Rehberg, G. Schmidt, *Solutions for quasilinear evolution systems in L^p* , Arch. Ration. Mech. Anal., **171**:2 (2004), 219–262.
- [22] В. Г. Маз'я, С. А. Назаров, *Особенности решений задачи Неймана в конической точке*, Сиб. матем. журн., **30**:3 (1989), 52–63.

- [23] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Math., vol. 47, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977.
- [24] S. Nicaise, *Polygonal interface problems*, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, Bd. 39, Verlag Peter D. Lang, Frankfurt/M, 1993.
- [25] S. Nicaise, A.-M. Sändig, *General interface problems. I, II*, Math. Methods Appl. Sci., **17**:6 (1994), 395–429, 431–450.
- [26] M. Petzoldt, *Regularity results for Laplace interface problems in two dimensions*, Z. Anal. Anwendungen, **20**:2 (2001), 431–455.
- [27] G. Savaré, *Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., **152**:1 (1998), 176–201.
- [28] L. Siebenmann, D. Sullivan, *On complexes that are Lipschitz manifolds*, in: Geometric Topology (Proc. 1977 Georgia Topology Conf., Athens/GA 1977), Academic Press, New York–London, 1979, 503–525.
- [29] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Физматлит, М., 1989.
- [30] D. Zanger, *The inhomogeneous Neumann problem in Lipschitz domains*, Comm. Partial Differential Equations, **25**:9–10 (2000), 1771–1808.

Technische Universität Darmstadt
e-mail: haller@mathematik.tu-darmstadt.de

Weierstrass Institute, Berlin
e-mail: Wolfgang.Hoepfner@wias-berlin.de

Weierstrass Institute, Berlin
e-mail: Hans-Christoph.Kaiser@wias-berlin.de

Weierstrass Institute, Berlin
Joachim.Rehberg@wias-berlin.de

Freie Universität Berlin
ziegler@math.fu-berlin.de

Поступило в редакцию
31 января 2012 г.