Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, Спектральный анализ индефинитных операторов Штурма–Лиувилля, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 88–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:28:33

соответствующие меньшим числовым полям, но у нас нет сторогого доказательства этого факта.

В работе [6] было доказано, что на многообразиях Олеклауса–Тома нет нетривиальных мероморфных функций. Значит, все дивизоры на этих многообразиях фиксированы в своих линейных системах (нульмерных). Имеется гипотеза, что многообразия Олеклауса–Тома не содержат дивизоров.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd ed., Academic Press, Amsterdam–New York, 2003. [2] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982. [3] M. Inoue, *Invent. Math.*, **24** (1974), 269–310. [4] J. S. Milne, *Fields and Galois Theory*, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ft.html>, version 4.21. [5] J. S. Milne, *Algebraic Number Theory*, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ant.html>, version 3.02. [6] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **55**:1 (2005), 1291–1300. [7] L. Ornea, M. Verbitsky, *Math. Res. Lett.*, **18**:4 (2011), 747–754. [8] M. Parton, V. Vuletescu, *Math. Z.*, **270**:1 (2012), 179–187; <http://arxiv.org/abs/1001.4891>. [9] M. S. Raghunathan, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972. [10] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, V. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sverb57@gmail.com

Поступило в редакцию
16 мая 2012 г.

УДК 517.9

Спектральный анализ индефинитных операторов Штурма–Лиувилля*

© 2014. А. С. Костенко

1. Пусть $\mathcal{J} := (-b, b)$, $0 < b \leq \infty$, а q и w — вещественные функции, такие, что $q, w \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J})$ и $w(x) > 0$ для п. в. $x \in \mathcal{J}$. Рассмотрим оператор

$$A := \frac{\operatorname{sgn} x}{w(x)} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right), \quad \operatorname{dom}(A) := \mathfrak{D}_{\max}, \quad (1)$$

задаваемый в гильбертовом пространстве $L^2_w(\mathcal{J})$ на максимальной области определения $\mathfrak{D}_{\max} = \{f \in L^2_w(\mathcal{J}) : f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{J}), Af \in L^2_w(\mathcal{J})\}$. Будем считать, что дифференциальное выражение сингулярно в концах интервала $\mathcal{J}$, причем имеет место случай предельной точки в b и $-b$, т. е. оператор $L := JA$ самосопряжен. Здесь $J: f(x) \rightarrow (\operatorname{sgn} x)f(x)$, $J = J^* = J^{-1}$. Отметим, что в случае $q \equiv 0$ ($q \geq 0$) условия $x \notin L^2_w(0, b)$ и $x \notin L^2_w(-b, 0)$ необходимы и достаточны (достаточны) для самосопряженности оператора L [13].

Легко видеть, что $A \neq A^*$, однако $(JA)^* = L^* = L = JA$, т. е. A является J -самосопряженным. Наша основная цель — это вопрос о подобии оператора A самосопряженному.

*Работа поддержана Австрийским научным фондом (FWF), грант M1309–N13.

2. Спектральные свойства J -самосопряженных операторов Штурма–Лиувилля хорошо изучены, когда соответствующее дифференциальное выражение регулярно. Например, рассмотрим спектральную задачу

$$-y'' + q(x)y = z \operatorname{sgn}(x)w(x)y, \quad x \in (-1, 1), \quad y(-1) = y(1) = 0, \quad (2)$$

предполагая, что $w, q \in L^1(-1, 1)$ и $w > 0$ п. в. на $(-1, 1)$ (случай общих самосопряженных граничных условий изучен в [5], [15]). Известно [6], что спектр задачи (2) дискретен, симметричен относительно $\mathbb{R}$ и невещественная часть спектра состоит лишь из конечного числа собственных значений конечной геометрической и алгебраической кратности. Вопросу о базисности по Риссу системы собственных и присоединенных функций (ССПФ) задачи (2) в пространстве $L_w^2(-1, 1)$ посвящено много работ (см. [2], [4]–[6], [11], [14], [15] и библиографию к ним). Существование весов w , для которых СППФ задачи (2) не образует базис Рисса, установлено Г. Волькмером, а первые примеры построены А. Фляйге, Н. Л. Абашеевой и С. Г. Пятковым (см. [4], [14]). В случае четного веса w с помощью интерполяционного критерия Пяткова критерий базисности установлен Парфеновым [14] (см. также [4]): *если $w(x) = w(-x) > 0$ для п. в. $x \in (-1, 1)$, то СППФ задачи (2) образует базис Рисса в $L_w^2(\mathcal{J})$ в точности тогда, когда найдется $t \in (0, 1)$, такое, что*

$$S_0(t) := \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{W(xt)}{W(x)} \neq 1, \quad W(x) := \int_0^x w(s) ds, \quad (3)$$

т. е. функция W является положительно возрастающей в нуле.

Правильно меняющиеся с положительным индексом функции и быстро меняющиеся функции [10] являются положительно возрастающими. Однако медленно меняющиеся функции [10] не являются положительно возрастающими и, следовательно, дают примеры операторов, СППФ которых не образует базис Рисса.

3. В случае, когда дифференциальное выражение сингулярно, спектральные свойства оператора A изучены менее полно. Например, структура спектра оператора A может быть очень сложной. В дальнейшем будем предполагать, что оператор A J -самосопряжен и J -неотрицателен, т. е. $L(= JA) = L^* \geq 0$ в $L_w^2(\mathcal{J})$.

Один из основных инструментов исследования свойств оператора A вида (1) — спектральная теория дефинизируемых операторов (см. [12]). Известно (см. [8]), что при указанных выше ограничениях A имеет вещественный спектр, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, и обладает спектральной функцией E_A (E_A — семейство J -ортogonalных проекторов), свойства которой принципиально отличны от свойств спектральной функции самосопряженного оператора лишь в *сингулярных критических точках*; а именно, в окрестности этих точек E_A неограничена. Несингулярные критические точки называют *регулярными*. Отметим, что только 0 и ∞ могут быть критическими точками J -неотрицательного оператора A . Более того (см. [12, теоремы 5.7 и 6.1]), *оператор A вида (1) подобен самосопряженному в $L_w^2(\mathcal{J})$ тогда и только тогда, когда $\ker A = \ker A^2$ и точки 0 и ∞ не являются сингулярными критическими точками оператора A .*

Вопросу о регулярности критической точки ∞ оператора A посвящено много работ. Кроме того, в [6] отмечено, что методы исследования вопроса о базисности распространяются на случай, когда 0 не является критической точкой (например, когда $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$).

Несмотря на наличие достаточных и необходимых условий регулярности критических точек абстрактного J -неотрицательного оператора, первые результаты о регулярности критической точки 0 оператора A вида (1) были получены сравнительно недавно (см. подробности в [8]). Регулярность критической точки 0 установлена лишь для некоторых модельных классов операторов Штурма–Лиувилля (см. [8], [9]), а первые примеры J -неотрицательных операторов A вида (1) с сингулярной критической точкой 0 были построены в [7] (см. также [8, разд. 5]). Основным результатом настоящей заметки — это критерий подобия оператора A , формулируемый в терминах m -функции Вейля–Титчмарша. А именно, пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $f_+(\cdot, z)$ — некоторое решение уравнения

$$-y''(x) + q(x)y(x) = zw(x)y(x), \quad x \in [0, b), \quad (4)$$

принадлежащее $L_w^2(0, b)$. Тогда m -функция Вейля–Титчмарша задачи Неймана для уравнения (4) определяется соотношением

$$m_+(z) := -\frac{f_+(0, z)}{f'_+(0, z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $w, q \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{J})$ — четные функции, такие, что оператор A вида (1) J -самосопряжен и J -неотрицателен. Оператор A подобен самосопряженному в точности тогда, когда

$$\sup_{y>0} \frac{\text{Im } m_+(iy)}{\text{Re } m_+(iy)} < \infty. \quad (6)$$

Необходимость условия (6) отмечена в [7]. Доказательство достаточности основано на критерии Акопяна–Веселича ([1], [17]).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор A вида (1) подобен самосопряженному, если и только если

$$\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} |\text{Im } z| \cdot \|(A - zI)^{-1}\| < \infty. \quad (7)$$

Доказательство вытекает из теоремы 1 и того факта, что условие (6) необходимо для справедливости неравенства (7) (см. [7]). В регулярном случае этот факт впервые отмечен в [11].

4. Оказывается, что поведение m -функции m_+ в 0 и ∞ можно охарактеризовать в терминах поведения коэффициентов w и q , а затем получить критерий подобия в терминах коэффициентов. Отметим, что зависимость поведения функции m_+ в ∞ от поведения коэффициентов в нуле была впервые отмечена в работах И. С. Каца (см. [13, §11]), а подробный обзор результатов содержится в работе [3].

Теорема 2. Пусть $q \equiv 0$, $w \in L_{\text{loc}}^1(\mathcal{J})$ — четная функция, причем $x \notin L_w^2(\mathcal{J})$. Пусть, кроме того, A — оператор вида (1) и $W(x) := \int_0^x w(t) dt$.

(i) Если $b < \infty$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда W положительно возрастает в 0;

(ii) Если $b = \infty$ и $w \in L^1(\mathbb{R})$, то A не подобен самосопряженному;

(iii) Если $b = \infty$ и $w \notin L^1(\mathbb{R})$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда W положительно возрастает и в 0, и в ∞ ¹⁾. Кроме того,

¹⁾ W называется положительно возрастающей в ∞ , если функция $1/W(1/x)$ положительно возрастает в 0.

критическая точка 0 (∞) оператора A регулярна в точности тогда, когда W положительно возрастает в ∞ (в 0).

В первую очередь отметим, что теорема 2(iii) позволяет привести простые примеры J -положительных операторов A с сингулярной точкой 0 . Так, полагая $b = \infty$, $w(x) = (1 + |x|)^{-1}$ и $q \equiv 0$, получаем функцию $W(x) = \log(1 + x)$, которая является медленно меняющейся в ∞ и, следовательно, не является положительно возрастающей в ∞ . По теореме 2(iii) 0 будет сингулярной критической точкой J -положительного оператора $A = -(\operatorname{sgn} x)(1 + |x|)d^2/dx^2$.

Более того, используя преобразование Лиувилля [13, §14], можно распространить теорему 2 на случай $q \neq 0$.

Теорема 3. Пусть $w, q \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{J})$ — четные функции, такие, что оператор A вида (1) является J -самосопряженным и J -неотрицательным. Пусть $c(x)$ — решение уравнения (4) для $z = 0$, удовлетворяющее условиям $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$. Тогда

- (i) если $c \in L^2_w(\mathcal{J})$, то A не подобен самосопряженному;
- (ii) если $1/c \in L^2(\mathcal{J})$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда W положительно возрастает в 0 ;
- (iii) если $c \notin L^2_w(\mathcal{J})$, $1/c \notin L^2(\mathcal{J})$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда функция

$$\widetilde{W}(\xi) := \int_0^x w(t)c^2(t) dt, \quad \xi(x) := \int_0^x \frac{dt}{c^2(t)}, \quad x \in (0, b),$$

положительно возрастает и в 0 , и в ∞ .

Замечание 1. Как отмечалось в [2], [6], [14], регулярность критической точки ∞ зависит лишь от поведения веса w в окрестности нуля. Согласно теореме 2, в случае $q \equiv 0$ о регулярности критической точки 0 также можно судить по одному лишь поведению веса в сингулярном конце. Однако если $q \neq 0$, то регулярность критической точки 0 уже зависит и от локального поведения коэффициентов q и w (см. теорему 3, а также [8, разд. 5]).

Теоремы 2 и 3 позволяют получить ряд простых достаточных условий подобия в терминах коэффициентов, которые в случае четных w и q значительно усиливают предыдущие результаты (см. [8]). Из-за недостатка места мы приведем лишь некоторые из них.

Первый результат усиливает теорему 1.3 из [8].

Следствие 2. Пусть $b = +\infty$, $q \equiv 0$ и $w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ — четная положительная функция. Если найдутся $x_0, c_0 > 0$ и $\alpha > -1$, такие, что

$$w(x) = (c_0 + g(x))x^\alpha, \quad x \geq x_0, \quad \int_{x_0}^x t^\alpha g(t) dt = o(x^{\alpha+1}), \quad x \rightarrow \infty,$$

то 0 будет регулярной критической точкой оператора A .

Следующий результат получен другим методом в [16]. При этом в [16] функция q может не быть четной.

Следствие 3 [16]. Пусть $b = +\infty$, $w \equiv 1$ и $q \geq 0$ п. в. на $\mathbb{R}$. Тогда оператор A подобен самосопряженному.

Следствие 4. Пусть $b = +\infty$, $w \equiv 1$ и выполнены условия теоремы 3. Пусть также найдутся $x_0 > 0$ и $l \geq -1/2$, такие, что

$$q(x) = \frac{l(l+1)}{x^2} + \tilde{q}(x), \quad x \geq x_0, \quad \int_{x_0}^{\infty} x |\tilde{q}(x)| dx < \infty.$$

- (i) Если $l \in [-1/2, 1/2]$, то A подобен самосопряженному.
 (ii) Если $l \geq 1/2$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда решение $s(x)$ неограничено.

Отметим, что случай $l = 0$ исследован другим методом в [8, разд. 4].

Автор признателен М. М. Маламуду за многочисленные полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. В. Акопян, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., **15**:5 (1980), 357–364. [2] R. Beals, J. Differential Equations, **56**:3 (1985), 391–407. [3] C. Bennewitz, Proc. London Math. Soc., (3), **59**:2 (1989), 294–338. [4] P. Binding, A. Fleige, Oper. Matrices, **5**:4 (2011), 735–755. [5] B. Ćurgus, A. Fleige, A. Kostenko, Integral Equations Operator Theory, **77**:4 (2013), 533–557. [6] B. Ćurgus, H. Langer, J. Differential Equations, **79**:1 (1989), 31–61. [7] И. М. Карабаш, А. С. Костенко, Функц. анализ и его прил., **43**:1 (2009), 81–84. [8] I. M. Karabash, A. S. Kostenko, M. M. Malamud, J. Differential Equations, **246**:3 (2009), 964–997. [9] I. M. Karabash, M. M. Malamud, Oper. Matrices, **1**:3 (2007), 301–368. [10] J. Korevaar, *Tauberian Theory: A Century of Developments*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. [11] A. Kostenko, Math. Nachr., (2014) (to appear), DOI: 10.1002/mana.201300104; <http://arxiv.org/abs/1202.2444>. [12] H. Langer, in: Lect. Notes in Math., vol. 948, 1982, 1–46. [13] И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Доп. II к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные задачи»*, Мир, М., 1968. [14] А. И. Парфенов, Сиб. матем. журн., **44**:4 (2003), 810–819. [15] С. Г. Пятков, в кн.: Неклассические уравнения математической физики, Изд-во Института математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 240–251. [16] S. G. Pyatkov, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 221, Birkhäuser/Springer-Verlag, Basel, 2012, 549–570. [17] K. Veselić, Glasnik Math. Ser. III, **7**:2 (1972), 229–248.

Faculty of Mathematics, University of Vienna
 e-mail: Oleksiy.Kostenko@univie.ac.at

Поступило в редакцию
 11 июля 2012 г.

УДК 517.948+513.8

Об l^p -мультипликаторах функций, аналитических в круге*

© 2014. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Для произвольной функции f , аналитической в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) z^n, \quad z \in D. \quad (1)$$

*Исследование осуществлено в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект №12-01-0079.