Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Топология примыканий лагранжевых особенностей типов A и D , *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 83–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:47:39

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, Функциональный анализ и его приложения, **43:3** (2009), 3–25. [2] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH Verlag, Berlin etc., 1999. [3] D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983. [4] A. Kirsch, in: Inverse Problems in Math. Physics, Lect. Note in Physics, vol. 422, 1993, 87–102. [5] P. Kuchment, Waves Random Media, **14:1** (2004), 107–128. [6] P. Kuchment, J. Phys. A, **38:22** (2005), 4887–4900. [7] I. L. Garanovich, S. Longhi, A. Sukhorukov, Yu. Kivshar, Physics Reports, **518:1** (2012), 1–79. [8] V. S. Rabinovich, S. Roch, Integral Equations Operator Theory, **72:2** (2012), 197–217. [9] V. Rabinovich, S. Roch, Georgian Math. J., **15:2** (2008), 333–351. [10] V. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 150, Birkhäuser, Basel, 2004. [11] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29:3** (1965), 567–586. [12] М. А. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, Наука, М., 1978.

Национальный политехнический институт Мексики
e-mail: vladimir.rabinovich@gmail.com

Поступило в редакцию
22 ноября 2012 г.

УДК 515.16

Топология примыканий лагранжевых особенностей типов A и D

© 2014. В. Д. СЕДЫХ*

Мы вычисляем гомотопический тип примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с особенностями типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$. Распадения вещественных особенностей изучались и в других работах, см., например, [2] и [6].

1. Особенности лагранжевых отображений. Сначала напомним основные факты теории лагранжевых особенностей; подробности см. в [1].

Пусть E — гладкое $2n$ -мерное многообразие с симплектической структурой ω . Гладкое n -мерное подмногообразие L в E называется лагранжевым, если $\omega|_L = 0$. Гладкое расслоение $\rho: E \rightarrow V$ над гладким n -мерным многообразием V называется лагранжевым, если все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями в E .

Пусть ρ — лагранжево расслоение и L — лагранжево подмногообразие в E . Тогда отображение $f = \rho|_L: L \rightarrow V$ называется лагранжевым. Мы рассматриваем лишь собственные лагранжевы отображения.

Согласно теореме Арнольда, простые устойчивые особенности лагранжевых отображений исчерпываются списком $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . А именно, всякий простой устойчивый росток лагранжева отображения лагранжево эквивалентен ростку в нуле лагранжева отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto (-\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})/\partial \mathbf{t}, \mathbf{q})$, где $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\mathbf{q} = (q_{k+1}, \dots, q_n)$, а $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ — гладкая функция следующего

*Работа частично поддержана грантом НШ-4850.2012.1.

вида ($\mu \leq n + 1$ целое):

$$\begin{aligned}
 A_\mu^\pm : \quad S &= \pm t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \cdots + q_2 t_1^2, & \mu \geq 1, \\
 D_\mu^\pm : \quad S &= t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \cdots + q_3 t_2^2, & \mu \geq 4, \\
 E_6^\pm : \quad S &= t_1^3 \pm t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 6, \\
 E_7 : \quad S &= t_1^3 + t_1 t_2^3 + q_6 t_1^2 t_2 + q_5 t_1^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 7, \\
 E_8 : \quad S &= t_1^3 + t_2^5 + q_7 t_1 t_2^3 + q_6 t_1 t_2^2 + q_5 t_2^3 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 8.
 \end{aligned}$$

Число μ называется степенью особенности, а $\mu - 1$ — коразмерностью. Если μ четное или $\mu = 1$, то особенности типов A_μ^+ , A_μ^- лагранжево эквивалентны (обозначаются через A_μ).

Пусть $\mathbb{S}^+$ — свободная абелева мультипликативная полугруппа, образующими которой служат символы A_1 , A_{2k} , A_{2k+1}^+ , A_{2k+1}^- ($k = 1, 2, \dots$), D_μ^+ , D_μ^- ($\mu = 4, 5, \dots$), E_6^+ , E_6^- , E_7 , E_8 . Единичный элемент этой полугруппы обозначим через **1**.

Элементы полугруппы $\mathbb{S}^+$ нумеруют типы мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с простыми особенностями. А именно, рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{A} = X_1 \dots X_p \in \mathbb{S}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$, где $X_1, \dots, X_p$ — любой набор образующих полугруппы $\mathbb{S}^+$. Лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$ имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в точке $y \in V$, если: (i) $f^{-1}(y)$ состоит из p попарно различных точек; (ii) существует порядок $x_1, \dots, x_p$ точек из $f^{-1}(y)$, такой, что f имеет в этих точках особенности типов $X_1, \dots, X_p$ соответственно. В точках дополнения $V \setminus f(L)$ отображение f имеет мультиособенность типа **1**.

Сумма степеней (коразмерностей) особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется степенью (коразмерностью) мультиособенности типа $\mathcal{A}$ и обозначается через $\deg \mathcal{A}$ ($\text{codim } \mathcal{A}$ соответственно). Символ $\#(\cdot | \mathcal{A})$ обозначает число p сомножителей в разложении $\mathcal{A} = X_1 \dots X_p$ элемента $\mathcal{A}$ в произведение образующих полугруппы $\mathbb{S}^+$. Число сомножителей, равных данной образующей X , обозначается через $\#(X | \mathcal{A})$.

Если $\#(\cdot | \mathcal{A}) = 1$, то мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в образе устойчивого лагранжева отображения называется моноособенностью.

2. Индексы примыканий лагранжевых мультиособенностей. Рассмотрим устойчивое лагранжево отображение $f: L \rightarrow V$. Множество $\mathcal{A}_f$ точек $y \in V$, таких, что f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ в y , является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V .

Пусть отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$ в точке $y \in V$, где $\text{codim } \mathcal{B} = c$. Выберем окрестность U начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и рассмотрим гладкое вложение $h: U \rightarrow V$, такое, что $h(0) = y$ и подмногообразие $h(U) \subset V$ трансверсально многообразию $\mathcal{B}_f$ в y . Через $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$ обозначим открытый c -мерный шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в 0 . Тогда существует положительное $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y, h)$, такое, что для любых $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ множество $h(D_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ является гладким многообразием, класс эквивалентности которого относительно диффеоморфизмов зависит только от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Зафиксируем произвольную систему гладких многообразий $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$, таких, что $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ диффеоморфно $h(D_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$. Эйлерову характеристику многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ обозначим через $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Говорят, что мультиособенность типа $\mathcal{B}$ примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ и $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Число $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ называется индексом примыкания. Примыкание называется простым, если все связанные компоненты многообразия $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ стягиваемы. В противном случае примыкание называется сложным.

Следующее утверждение показывает, что топология примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с простыми особенностями полностью определяется топологией примыканий моноособенностей к мультиособенностям.

Теорема 1. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{S}^+$ многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}\mathcal{C})$ диффеоморфно несвязному объединению многообразий вида $\Xi_X(\mathcal{B}) \times \Xi_Y(\mathcal{C})$ по всем парам $(X, Y) \in \mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^+$, таким, что $XY = \mathcal{A}$.

Следствие. $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = \sum_{(X, Y) \in \mathbb{S}^+ \times \mathbb{S}^+ : XY = \mathcal{A}} J_X(\mathcal{B}) J_Y(\mathcal{C})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{S}^+$.

Теорема 2. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}^+$

$$\begin{aligned} & \sum_{X \in \mathbb{S}^+ \setminus \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(\mathcal{B}) \\ &= \begin{cases} 2(-1)^{\text{codim } \mathcal{B}-1} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} + 1 \pmod{2}, \end{cases} \\ & \sum_{X \in \mathbb{S}^+} (-1)^{\text{codim } X} J_X(\mathcal{B}) = 1, \quad \sum_{X \in \mathbb{S}^+ \setminus \{1\}} (-1)^{\text{codim } X} \#(\cdot | X) J_X(\mathcal{B}) = \#(\cdot | \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Теоремы 1 и 2 следуют из аддитивности эйлеровой характеристики и общих свойств стратификаций, удовлетворяющих условиям Уитни (см. [7]). Аналогичные утверждения справедливы и для других объектов (см. [3], [4]).

3. Индексы примыканий лагранжевых особенностей типов $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$. Моноособенности типов $A_\mu^\pm$ в образе устойчивого лагранжева отображения могут примыкать лишь к мультиособенностям типов $\prod A_{\mu_i}^\pm \in \mathbb{S}^+$. Лагранжевы моноособенности типов $D_\mu^\pm$ могут примыкать только к мультиособенностям типов $\prod A_{\mu_i}^\pm$ и $D_\nu^\pm \prod A_{\mu_i}^\pm$ (см. [2]).

Пусть $[x]$ — целая часть вещественного числа x и $\langle k_1, \dots, k_l \rangle = \frac{(k_1 + \dots + k_l)!}{k_1! \dots k_l!}$ для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_l$. Зафиксируем $\delta = \pm 1$ и

$$\mathcal{A} = A_1^k A_{\mu_1}^{m_1} \dots A_{\mu_p}^{m_p} (A_{\mu_1}^+)^{m_1^+} \dots (A_{\mu_q}^+)^{m_q^+} (A_{\mu_1}^-)^{m_1^-} \dots (A_{\mu_r}^-)^{m_r^-} \in \mathbb{S}^+, \quad (1)$$

где $\mu_1, \dots, \mu_p$ — попарно различные целые положительные четные числа, а каждый из двух наборов $\mu_1^+, \dots, \mu_q^+$ и $\mu_1^-, \dots, \mu_r^-$ состоит из попарно различных целых положительных нечетных чисел, больших 1.

Пусть $d = k + m_1^+ + \dots + m_q^+ + m_1^- + \dots + m_r^-$,

$$k_+^\delta = [(2d + \delta + 1)/4] - m_1^+ - \dots - m_q^+, \quad k_-^\delta = [(2d - \delta + 1)/4] - m_1^- - \dots - m_r^-,$$

$$N^\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} \langle m_1^+, \dots, m_q^+, k_+^\delta \rangle \langle m_1^-, \dots, m_r^-, k_-^\delta \rangle \langle m_1, \dots, m_p, d \rangle, & \text{если } 0 \leq k_+^\delta \leq k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$N_+^\delta(\mathcal{A}) = \left[\frac{2d + \delta + 3}{4} \right] \frac{\#(\cdot|\mathcal{A}) + 1}{d + 1} N^\delta(\mathcal{A}),$$

$$N_-^\delta(\mathcal{A}) = \left[\frac{2d - \delta + 3}{4} \right] \frac{\#(\cdot|\mathcal{A}) + 1}{d + 1} N^\delta(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{A}^- = A_1^k A_{\mu_1}^{m_1} \dots A_{\mu_p}^{m_p} (A_{\mu_1}^-)^{m_1^+} \dots (A_{\mu_q}^-)^{m_q^+} (A_{\mu_1}^+)^{m_1^-} \dots (A_{\mu_r}^+)^{m_r^-}.$$

Символом A_μ^δ обозначается A_μ^+ , если $\delta = +1$, и A_μ^- , если $\delta = -1$. Аналогичное соглашение действует и относительно символа D_μ^δ .

Теорема 3. Пусть $\mu \geq 1$ целое и $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (1). Тогда

- (i) моноособенность типа A_μ^δ в образе устойчивого лагранжева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - 1$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}$, $N^\delta(\mathcal{A}) \neq 0$;
- (ii) примыкание лагранжевой моноособенности типа A_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является простым; при этом $J_{\mathcal{A}}(A_\mu^\delta) = N^\delta(\mathcal{A})$;
- (iii) $J_{\mathcal{A}}(A_\mu^-) = J_{\mathcal{A}^-}(A_\mu^+)$.

Теорема 3 является вариацией аналогичных утверждений об индексах примыканий лежандровых мультиособенностей коранга 1 (см. [4], [5], [8]). В частности, для любого $X = \prod_{i=1}^l A_{\mu_i}^\pm \in \mathbb{S}^+$, такого, что $\mu_i > 1$ при всех i , сумма чисел $J_Y(A_\mu^+)$ по всем $Y \in \mathbb{S}^+$, отличающимся от X лишь знаками в верхних индексах типов мультиособенностей и количеством образующих A_1 , равна индексу примыкания особенности типа $A_{\mu-1}$ к особенности типа $\prod_{i=1}^l A_{\mu_i-1}$ устойчивого (некоориентированного) волнового фронта.

Следующие две теоремы являются принципиально новыми.

Теорема 4. Пусть $\mu \geq 4$ целое и $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (1). Тогда

- (i) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A} D_\nu^\pm$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - \nu$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu - \nu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu - \nu \pmod{2}$, $N_\pm^\delta(\mathcal{A}) \neq 0$ при четном ν и $N^\delta(\mathcal{A} A_\nu^\pm) \neq 0$ при нечетном ν ;
- (ii) примыкание лагранжевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A} D_\nu^\pm$ является простым; при этом

$$J_{\mathcal{A} D_\nu^\pm}(D_\mu^\delta) = \begin{cases} N_\pm^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \nu \text{ четное,} \\ (\#(A_\nu^\pm|\mathcal{A}) + 1) N^\delta(\mathcal{A} A_\nu^\pm), & \text{если } \nu \text{ нечетное;} \end{cases}$$

- (iii) $J_{\mathcal{A} D_\nu^\pm}(D_\mu^-) = J_{\mathcal{A}^- D_\nu^\mp}(D_\mu^+)$;
- (iv) если μ нечетное, то $J_{\mathcal{A} D_\nu^+}(D_\mu^\delta) = J_{\mathcal{A} D_\nu^-}(D_\mu^\delta)$ при четном ν и $J_{\mathcal{A} D_\nu^+}(D_\mu^+) = J_{\mathcal{A} D_\nu^-}(D_\mu^-)$ при нечетном ν .

Теорема 4 следует из свойств пространства вещественных многочленов вида $\delta t^\mu + q_{\mu-1}t^{\mu-1} + \dots + q_\nu t^\nu$ от одной переменной t .

Теорема 5. Пусть $\mu \geq 4$ целое и $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (1). Тогда

(i) моноособенность типа D_μ^δ в образе устойчивого лагранжева отображения примыкает к мультиособенности типа $\mathcal{A}$, если и только если $\text{codim } \mathcal{A} < \mu - 1$, $\deg \mathcal{A} \leq \mu$, $\deg \mathcal{A} \equiv \mu \pmod{2}$ и хотя бы одно из чисел $\tilde{N}^\delta(\mathcal{A})$, $N_*^\delta(\mathcal{A})$ отлочно от нуля, где

$$\tilde{N}^\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 2(N_+^\delta(\mathcal{A}) - N_0^\delta(\mathcal{A})), & \text{если } \deg \mathcal{A} = \mu \text{ и } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_1^2, \\ 2(N_+^\delta(\mathcal{A}) - N_0^\delta(\mathcal{A})) - N_-^\delta(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}), & \text{если } \deg \mathcal{A} = \mu \text{ и } \mathcal{A} \text{ делится на } A_1^2, \\ N_+^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \deg \mathcal{A} \leq \mu - 2, \end{cases}$$

$$N_0^\delta(\mathcal{A}) = \left(1 + \frac{1 + (-1)^{\deg \mathcal{A}}}{2} \delta\right) N^\delta(\mathcal{A}), \quad N_*^\delta(\mathcal{A}) = N_{*,+}^\delta(\mathcal{A}) + N_{*,-}^\delta(\mathcal{A}),$$

$$N_{*,\pm}^\delta(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_3^\pm, \\ (\#(A_3^\mp | \mathcal{A}) + 1) N^\delta(A_3^\mp \frac{\mathcal{A}}{A_3^\pm}), & \text{если } \mathcal{A} \text{ делится на } A_3^\pm; \end{cases}$$

(ii) если $\deg \mathcal{A} = \mu$, то примыкание лагранжевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является простым; при этом $J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta) = \tilde{N}^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A})$;

(iii) если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, то

$$J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta) = \begin{cases} N_+^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A}), & \text{если } \mathcal{A} \text{ не делится на } A_1^2, \\ N_+^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A}) - N_-^\delta(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}), & \text{если } \mathcal{A} \text{ делится на } A_1^2; \end{cases}$$

при этом примыкание лагранжевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является простым в случае, когда $\mathcal{A}$ не делится на A_1^2 , а также в случае, когда $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 , но $N_-^\delta(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}) = 0$;

(iv) если $\deg \mathcal{A} \leq \mu - 2$, $\mathcal{A}$ делится на A_1^2 и $N_-^\delta(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2}) \neq 0$, то примыкание лагранжевой моноособенности типа D_μ^δ к мультиособенности типа $\mathcal{A}$ является сложным; многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\delta)$ имеет $N_+^\delta(\mathcal{A}) + N_*^\delta(\mathcal{A})$ связанных компонент, причем $N_-^\delta(\frac{\mathcal{A}}{A_1^2})$ из них гомотопически эквивалентны окружности, а остальные стягиваемы;

(v) если μ нечетное, то многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^-)$ гомотопически эквивалентно $\Xi_{\mathcal{A}-}(D_\mu^+)$.

Теорема 5 следует из свойств пространства пар вещественных многочленов вида $(t_1 t_2 + q_1, t_1^2 + \delta t_2^{\mu-2} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-3} + \dots + q_3 t_2 + q_2)$ от двух переменных t_1, t_2 .

Следствие. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{S}^+$ определяется формулой (1). Тогда для любого целого $l \geq 0$ справедливы следующие утверждения:

(i) $J_{\mathcal{A}}(A_\mu^\pm) = J_{\mathcal{A}}(A_{\mu+2l}^\pm)$ для всех целых $\mu \geq \max\{\text{codim } \mathcal{A} + 2, \deg \mathcal{A}\}$;

(ii) $J_{\mathcal{A}}(D_\nu^\pm) = J_{\mathcal{A}}(D_{\nu+2l}^\pm)$, $J_{\mathcal{A}}(D_\nu^\pm) = J_{\mathcal{A}}(D_{\nu+2l}^\pm)$ для всех целых $\nu \geq 4$ и $\mu \geq \nu + \max\{\text{codim } \mathcal{A} + 1, \deg \mathcal{A}\}$;

(iii) многообразие $\Xi_{\mathcal{A}}(D_\mu^\pm)$ гомотопически эквивалентно многообразию $\Xi_{\mathcal{A}}(D_{\mu+2l}^\pm)$ для всех целых $\mu \geq \max\{4, \deg \mathcal{A} + 2\}$.

Пример. Индексы примыканий моноособности типа D_6^- в образе устойчивого лагранжева отображения даются следующей таблицей:

X	A_1^2	A_1^4	A_1^6	$A_2 A_1^2$	$A_2 A_1^4$	$A_2^2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	$A_3^+ A_1^3$	$A_3^- A_1^3$
$J_X(D_6^-)$	0	0	3	2	16	17	2	2	8	8
$A_3^+ A_2 A_1$	$A_3^- A_2 A_1$	$(A_3^+)^2$	$A_3^+ A_3^-$	$(A_3^-)^2$	$A_4 A_1^2$	$A_5^+ A_1$	$A_5^- A_1$	D_4^-		
11	11	1	2	1	6	2	2	1		
$D_4^+ A_1^2$	$D_4^- A_1^2$	$D_4^- A_2$	$D_5^+ A_1$	$D_5^- A_1$						
1	2	2	1	1						

Все примыкания лагранжевой моноособности типа D_6^- , кроме примыканий к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$, являются простыми. Примыкания к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$ являются сложными. А именно, многообразие $\Xi_{A_1^2}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно окружности, $\Xi_{A_1^4}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению двух окружностей, $\Xi_{A_2 A_1^2}(D_6^-)$ имеет четыре связные компоненты, две из которых стягиваемы, а две гомотопически эквивалентны окружности.

Замечание. Автору неизвестны аналоги теорем 3–5 для лагранжевых особенностей типов $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . Это — предмет будущих исследований.

Автор благодарен М. Э. Казаряну за полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
 [2] В. А. Васильев, *Лагранжевы и лежандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000. [3] В. Д. Седых, Матем. заметки, **78**:3 (2005), 413–427. [4] В. Д. Седых, Функц. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 88–91. [5] В. Д. Седых, Изв. РАН, сер. матем., **76**:2 (2012), 171–214. [6] Ю. С. Численко, Функц. анализ и его прил., **22**:4 (1988), 52–67. [7] C. McCrory, A. Parusiński, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **30**:4 (1997), 527–552. [8] V. D. Sedykh, Mosc. Math. J., **11**:3 (2011), 583–598.

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина
email: vdsedykh@gmail.com

Поступило в редакцию
26 октября 2012 г.

УДК 517.956.2

Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*

© 2014. Т. А. Суслина

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Укажем книги [1], [2] по теории усреднений.

1. Класс операторов в $\mathbb{R}^d$. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω — элементарная ячейка этой решетки. Используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для

*Работа выполнена при поддержке грантов СПбГУ №11.38.63.2012 и РФФИ №14-01-00760.