Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 34–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:09:16

Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами*

© 2014. С. Е. ПАСТУХОВА

Доказана оценка многомасштабного усреднения для параболического уравнения диффузии при минимальных условиях регулярности. Это позволяет придать результату смысл оценки в операторной норме для разности операторных экспонент исходного и усредненного уравнений.

Введение. Рассматривается задача, лежащая на стыке двух направлений теории усреднения. Первое из них — многомасштабное усреднение, предметом изучения которого являются так называемые реитерированные среды, часто встречающиеся в приложениях (см., например, [1]–[5]). Оценки усреднения операторного типа — второе направление. Оно активно развивается в последнее десятилетие после выхода фундаментальной работы Бирмана и Суслиной [6]. Наша задача — найти аппроксимацию для экспоненты оператора диффузии во всем пространстве в предположении, что матрица диффузии быстро осциллирует и имеет по разным группам переменных период осцилляции разного порядка малости, скажем ε , ε^2 и т. д. при $\varepsilon \rightarrow 0$. С этой целью изучается асимптотика решения задачи Коши в полупространстве для параболического уравнения с коэффициентами указанного типа при $\varepsilon \rightarrow 0$. Согласно теории многомасштабного усреднения, известна предельная, или усредненная, задача. Ее коэффициенты постоянны и находятся в результате процедуры усреднения, повторенной столько раз, сколько имеется масштабов осцилляции. В продолжение линии работ [7]–[18] с помощью *модифицированного метода первого приближения* доказывается оценка в L^2 -норме по сечению $t = \text{const}$ для разности между решениями исходной и усредненной задач Коши. Эта оценка имеет порядок малости $\varepsilon^{1/2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с явно контролируемой константой. На регулярность матрицы диффузии и начальную функцию накладываются минимальные условия, что позволяет трактовать результат как оценку в операторной норме для разности экспонент исходного и усредненного операторов диффузии.

Основными моментами модифицированного метода первого приближения, предложенного впервые в работе Жикова [7], являются специальное представление соленоидальных периодических векторов и введение параметра сдвига как дополнительной переменной интегрирования. Применительно к многомасштабным параболическим задачам метод обрел новые существенные особенности. Во-первых, поскольку параметров сдвига несколько и их роль несимметрична, возможна «игра в параметры». Во-вторых, параметр сдвига предназначен стать дополнительной переменной дифференцирования.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №14-01-00192А и Российского научного фонда (проект 14-11-00398).

До сих пор многочисленные результаты по операторным оценкам усреднения доказаны в основном в рамках периодических задач. Нет результатов для случайных или почти периодических операторов. Изучение локально периодических операторов и операторов с многомасштабными коэффициентами — первая попытка отойти от чисто периодического случая.

1. Точная постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим задачу Коши в полупространстве $\mathbb{R}_+^{d+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0\}$ для параболического уравнения с сильно неоднородными коэффициентами

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u^\varepsilon &\equiv (\partial_t + A_\varepsilon)u^\varepsilon = 0, \quad t > 0, \quad u^\varepsilon(x, 0) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon &= -\operatorname{div} a^\varepsilon(x) \nabla. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь симметрическая матрица $a^\varepsilon(x)$ имеет «двухмасштабную» структуру

$$a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2), \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

где элементы матрицы $a(y, z)$ вещественнозначны, измеримы и периодичны по y и z , а ячейкой периодичности служит куб $Y = Z = [-1/2, 1/2)^d$. Кроме того, выполнены условия липшицевости и эллиптичности:

$$|a(y, z) - a(y', z)| \leq c_L |y - y'|, \quad (2)$$

$$\lambda |\xi|^2 \leq a(y, z) \xi \cdot \xi \leq \lambda^{-1} |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0, \quad (3)$$

для п. в. $z \in \mathbb{R}^d$ и всех $y, y' \in \mathbb{R}^d$.

С задачей (1) связана (см. [1]) усредненная задача

$$L_0 u \equiv (\partial_t + A_0)u = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad A_0 = -\operatorname{div} a^0 \nabla, \quad (4)$$

где постоянная симметрическая положительно определенная матрица a^0 находится в процессе повторного усреднения, см. (9)–(12).

Нашим основным результатом является

Теорема 1. *Для разности решений задач (1), (4) выполнена следующая оценка:*

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_0 \varepsilon^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad t \geq 1, \quad (5)$$

где константа c_0 зависит лишь от размерности d и постоянных λ и c_L из условий (2) и (3).

В силу (5) $u(x, t)$ служит нулевым приближением к решению задачи (1) в L^2 -норме по сечениям $t = \text{const}$ с указанной погрешностью.

Оператор A_ε , участвующий в уравнении (1), самосопряжен и неотрицателен в $L^2(\mathbb{R}^d)$, его точное определение дается через замкнутую квадратичную форму $\int_{\mathbb{R}^d} a^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dx$, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Определена экспонента e^{-tA_ε} , $t \geq 0$, и решение $u^\varepsilon(x, t)$ можно понимать в смысле теории полугрупп:

$$u^\varepsilon(x, t) = e^{-tA_\varepsilon} f(x), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Аналогичное представление имеет решение усредненной задачи

$$u(x, t) = e^{-tA_0} f(x), \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Неравенство (5) допускает, согласно (6) и (7), операторную форму:

$$\|e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_0 \varepsilon^{1/2}, \quad t \geq 1. \quad (8)$$

2. Задачи на ячейке и усредненные матрицы. Условимся о некоторых обозначениях:

$e^1, \dots, e^d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$;

$\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_Y = \int_Y \cdot dy$ — среднее по ячейке;

$L_{\text{per}}^2(Y)$, $L_{\text{per}}^2(Y \times Z)$ — лебеговы пространства периодических функций с указанной ячейкой периодичности;

$H^1(Y) = H_{\text{per}}^1(Y)$ — соболевское пространство периодических функций;

$H^1(Y)/\mathbb{R} = \{\varphi \in H^1(Y) : \langle \varphi \rangle_Y = 0\}$.

Здесь и далее все функциональные пространства состоят из вещественнозначных функций. Часто мы не будем различать в обозначениях пространства скалярных и векторных функций.

Введем задачи на ячейке периодичности

$$M^j(y, \cdot) \in H^1(Z)/\mathbb{R}, \quad \text{div}_z[a(y, z)(e^j + \nabla_z M^j(y, z))] = 0, \quad (9)$$

$$N^j(y) \in H^1(Y)/\mathbb{R}, \quad \text{div}[\hat{a}(y)(e^j + \nabla N^j(y))] = 0, \quad (10)$$

$$j = 1, \dots, d$$

(в задаче (9) переменная y выступает как параметр) с «промежуточной» усредненной матрицей

$$\hat{a}(y) = \langle a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z)) \rangle_Z, \quad (11)$$

где I — единичная $d \times d$ -матрица, M — вектор с координатами M^j . «Окончательную» усредненную матрицу получаем после повторного усреднения:

$$a^0 = \langle \hat{a}(y)(I + \nabla N(y)) \rangle_Y, \quad (12)$$

где N — вектор с координатами N^j .

Решения задач на ячейке понимаются в смысле интегрального тождества. Например, для N^j имеем

$$\langle \hat{a}(y)(\nabla N^j(y) + e^j) \cdot \nabla \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Y).$$

Это означает соленоидальность 1-периодического вектора $\hat{a}(y)(\nabla N^j(y) + e^j)$, что существенно будет использовано далее.

Известно, что обе усредненные матрицы $\hat{a}(y)$ и a^0 симметричны и удовлетворяют неравенству типа (3) с исходной константой эллиптичности λ . Таким образом, корректно поставлены обе задачи на ячейке периодичности, а также усредненная задача (4).

Наши предположения о регулярности матрицы $a(y, z)$ весьма близки к минимальным, допускающим корректное определение матрицы $a^\varepsilon(x)$. Напомним, что здесь минимальным предположением служит свойство каратеодориевости, которое означает, что $a(y, z)$ измерима по z для всех y и непрерывна по y для п. в. z . Предполагаемая в условии (2) непрерывность по Лишницу не может быть ослаблена в рамках применяемого метода, ибо ею обусловлены многие свойства рассматриваемых объектов, без которых метод не работает. Мы используем «модифицированный метод первого приближения», который был предложен В. В. Жиковым в работе [7] для уравнения диффузии и получил дальнейшее развитие и применение в цикле работ [8]–[18], где изучались самые разнообразные уравнения. В частности, для задачи (1) указанный метод позволяют применить следующие свойства решений задач на ячейке.

Лемма 1. Пусть M^j, N^j — решения задач (9) и (10), а $\hat{a}(y)$ определена в (11). Тогда

- (i) $M^j(y, z)$ — липшицева по $y \in Y$ функция со значениями в $H_{\text{per}}^1(Z)$ с константой Липшица, зависящей лишь от постоянных из условий (2) и (3);
- (ii) $\|M^j(y, \cdot)\|_{H_{\text{per}}^1(Z)} \leq c, \|N^j\|_{H_{\text{per}}^2(Y)} \leq c, c = \text{const}(\lambda, c_L)$;
- (iii) $\hat{a}(y)$ — липшицева матрица с той же оговоркой о константе Липшица, что и выше.

Доказательство леммы дано в разд. 8.

3. Оценка для разности экспонент. Покажем, как благодаря групповым свойствам операторных экспонент можно вывести основную оценку (5) из аналогичной оценки для задачи Коши с начальной функцией из $H^1(\mathbb{R}^d)$. Сначала отметим вытекающие из спектрального разложения самосопряженных операторов оценки

$$\|A_\varepsilon^{1/2} e^{-tA_\varepsilon}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \|A_0^{1/2} e^{-tA_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t > 0,$$

из которых следуют неравенства

$$\|\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^2}, \quad \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \|f\|_{L^2}, \quad c = c(\lambda), \quad t > 0, \quad (13)$$

для градиента решений задач (1) и (4).

Ввиду представления

$$e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0} = T_\varepsilon(t) + T_\varepsilon^*(t),$$

где

$$T_\varepsilon(t) = (e^{-\frac{1}{2}tA_\varepsilon} - e^{-\frac{1}{2}tA_0})S_\varepsilon(t), \quad S_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}tA_\varepsilon} + e^{-\frac{1}{2}tA_0}),$$

достаточно доказать, что

$$\|T_\varepsilon(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq c\varepsilon^{1/2}, \quad c = c(d, \lambda, c_L), \quad t \geq 1.$$

Для этого изучим близость решений двух задач

$$L_\varepsilon u^\varepsilon = (\partial_s + A_\varepsilon)u^\varepsilon = 0, \quad s > t/2, \quad u^\varepsilon(x, t/2) = \Phi(x), \quad (14)$$

$$L_0 u = (\partial_s + A_0)u = 0, \quad s > t/2, \quad u(x, t/2) = \Phi(x), \quad (15)$$

с начальной функцией $\Phi(x) = S_\varepsilon(t)f \in H^1(\mathbb{R}^d)$, причем $\|\Phi\|_{H^1} \leq c(1+1/\sqrt{t})\|f\|_{L^2}$ в силу (13). Тогда оценку (5) обеспечивает

Лемма 2. Пусть u^ε, u — решения задач (14) и (15) с произвольной начальной функцией $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c\varepsilon \|\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad c = c(d, \lambda, c_L), \quad t \geq 1. \quad (16)$$

Дальнейшее изложение посвящено получению оценки типа (16) для разности решений задач (1) и (4) при условии, что $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. В этом случае выполнено неравенство

$$\|\nabla u\|_{0,t}^2 + \int_0^t \|\partial_s u(\cdot, s)\|^2 ds \leq c_1 \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad c_1 = c_1(d, \lambda, c_L), \quad (17)$$

для решения усредненной задачи. Здесь и далее

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

а $\|\cdot\|_{0,t}$ — параболическая норма, определенная соотношением

$$\|u\|_{0,t}^2 = \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(\cdot, s)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(\cdot, s)\|^2 ds. \quad (18)$$

Неравенство (17) выводится после дифференцирования уравнения (4) из обычной энергетической оценки $\|u\|_{0,t} \leq c(\lambda)\|f\|$. В итоге из (17) получаем свойства ограниченности

$$\|\nabla u\|_{L^2(Q)} \leq c_1\|f\|, \quad \|\nabla^2 u\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t u\|_{L^2(Q)} \leq c_1\|\nabla f\|, \quad c_1 = c_1(d, \lambda, c_L). \quad (19)$$

Здесь и далее для упрощения записи $Q = \mathbb{R}^d \times (0, t)$.

4. Проинтегрированная по параметрам сдвига оценка для смещенного первого приближения. Используя решения задач (4), (9) и (10), построим функцию

$$\begin{aligned} v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(x, t) &= u(x', t) + \varepsilon N(y') \cdot \nabla u(x', t) + \varepsilon^2 (I + \nabla_y N(y')) M(y', z) \cdot \nabla u(x', t), \\ x' &= x - \varepsilon \omega - \varepsilon^2 \sigma, \quad y' = y - \varepsilon \sigma, \quad \omega \in Y, \sigma \in Z, \quad y = x/\varepsilon, \quad z = x/\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая $\omega = 0, \sigma = 0$, получаем функцию

$$v^\varepsilon(x, t) = v_{0,0}^\varepsilon(x, t), \quad (21)$$

называемую первым приближением к решению задачи (1).

Нашей целью будет

Лемма 3. Пусть u^ε — решение задачи (1) с начальной функцией $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда верна проинтегрированная по $\omega \in Y$ и $\sigma \in Z$ оценка

$$\langle \|u^\varepsilon - v_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{0,t}^2 \rangle_{Y \times Z} \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad c = c(d, \lambda, c_L), \quad t \geq 1. \quad (22)$$

Поясним роль параметров сдвига в оценке (22). В наших предположениях регулярность функций u , N и M такова (см. лемму 1 и (19)), что нельзя гарантировать конечность параболической нормы $\|v^\varepsilon\|_{0,t}$. Этой проблемы нет для смещенного первого приближения $v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(x, t)$ как функции переменных x, t, ω, σ , поскольку $\nabla v_{\omega, \sigma}^\varepsilon \in L^2(Q \times Y \times Z)$ и $v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\cdot, s) \in L^2(\mathbb{R}^d \times Y \times Z)$ при фиксированном s , благодаря следующему общему факту.

Лемма 4. (i) Если $b \in L_{\text{per}}^2(Y)$ и $U \in L^2(\mathbb{R}^d)$, то $\varphi(x, \omega, \sigma) = b(x/\varepsilon - \varepsilon\sigma)U(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) \in L^2(\mathbb{R}^d \times Y \times Z)$, причем

$$\langle \|\varphi(\cdot, \omega, \sigma)\|^2 \rangle_{Y \times Z} = \langle b^2 \rangle \|U\|^2. \quad (23)$$

(ii) Если $b \in L_{\text{per}}^2(Y \times Z)$ и $U \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, t))$, то $\psi(x, s, \omega, \sigma) = b(x/\varepsilon - \varepsilon\sigma, x/\varepsilon^2)U(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, s) \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, t) \times Y \times Z)$, причем

$$\left\langle \int_0^t \|\psi(\cdot, s, \omega, \sigma)\|^2 ds \right\rangle_{Y \times Z} = \|b\|_{L^2(Y \times Z)}^2 \int_0^t \|U(\cdot, s)\|^2 ds. \quad (24)$$

Доказательство проведем для равенства (24). В исходном интеграле делается замена переменной $x \rightarrow x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & \int_{Q \times Y \times Z} |\psi(x, s, \omega, \sigma)|^2 dx ds d\omega d\sigma \\ &= \int_{Q \times Y \times Z} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega, \frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{\omega}{\varepsilon} + \sigma\right) U(x, s) \right|^2 dx ds d\omega d\sigma \\ &= \int_Q |U(x, s)|^2 \left(\int_{Y \times Z} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega, \frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{\omega}{\varepsilon} + \sigma\right) \right|^2 d\omega d\sigma \right) dx ds \\ &= \|b\|_{L^2(Y \times Z)}^2 \|U\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Покажем, как из (22) вывести оценку типа (16). Прежде всего, по определению параболической нормы из (22) следует, что

$$J \equiv \langle \|u^\varepsilon(\cdot, t) - v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 \rangle_{Y \times Z} \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

В интеграле J сделаем замену переменной и поменяем порядок интегрирования. Тогда по выпуклости

$$\begin{aligned} J &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{Y \times Z} u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega + \varepsilon^2\sigma, t) d\omega d\sigma - u(x, t) - \varepsilon \int_Y N\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega\right) \cdot \nabla u(x, t) d\omega \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \int_{Y \times Z} \left(I + \nabla N\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega\right) \right) M\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega, \frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{\omega}{\varepsilon} + \sigma\right) \cdot \nabla u(x, t) d\omega d\sigma \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |[[u^\varepsilon]_\varepsilon]_{\varepsilon^2}(x, t) - u(x, t)|^2 dx, \end{aligned}$$

где первый интеграл свернут с использованием средних по Стеклову

$$[\varphi]_\varepsilon(x) = \int_Y \varphi(x + \varepsilon\omega) d\omega, \quad [\varphi]_{\varepsilon^2}(x) = \int_Z \varphi(x + \varepsilon^2\sigma) d\sigma,$$

а два следующих интеграла исчезают за счет того, что $\langle N \rangle = \langle M(y, \cdot) \rangle = 0$. Таким образом, из (22) следует неравенство

$$\|[[u^\varepsilon]_\varepsilon]_{\varepsilon^2}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad t \geq 1,$$

в котором усреднение по Стеклову можно опустить, благодаря следующим его свойствам (доказательство см., например, в [10], [11]):

$$\nabla[\varphi]_h = [\nabla\varphi]_h, \quad \|[\varphi]_h\| \leq \|\varphi\|, \quad \|[\varphi]_h - \varphi\| \leq c(d)h\|\nabla\varphi\|, \quad h > 0,$$

а также оценке градиента ∇u^ε , см. (13). В итоге получаем

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad t \geq 1,$$

что и требовалось.

5. Первое приближение и его невязка в уравнении. Изучим подробнее введенную в (21) функцию

$$v^\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) + \varepsilon^2 M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t),$$

$$y = x/\varepsilon, \quad z = x/\varepsilon^2,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d . Вычислив градиент $\nabla v^\varepsilon(x, t)$, сравним поток $a^\varepsilon(x) \nabla v^\varepsilon(x, t)$ с потоком $a^0 \nabla u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \nabla v^\varepsilon(x, t) &= \nabla u(x, t) + \nabla N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) \\ &\quad + \nabla_z M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t) + \varepsilon N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla u(x, t) \\ &\quad + \varepsilon \nabla_y \left[M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, t) \\ &\quad + \varepsilon^2 M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \nabla u(x, t) \\ &= (I + \nabla N) \nabla u + \nabla_z M (I + \nabla N) \nabla u + \dots \\ &= (I + \nabla_z M) (I + \nabla N) \nabla u + \dots, \end{aligned} \tag{25}$$

где многоточие скрывает члены порядка $O(\varepsilon)$ и выше, откуда получаем

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &\equiv a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u \\ &= a(y, z) (I + \nabla_z M) (I + \nabla N) \nabla u \mp \hat{a}(y) (I + \nabla N) \nabla u - a^0 \nabla u + \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$R_\varepsilon = [a(I + \nabla_z M) - \hat{a}] (I + \nabla N) \nabla u + [\hat{a}(I + \nabla N) - a^0] \nabla u + r_\varepsilon^1 \tag{26}$$

с остаточным членом (см. (25))

$$r_\varepsilon^1 = \varepsilon a^\varepsilon \nabla^2 u N + \varepsilon a^\varepsilon \nabla_y [(I + \nabla N) M] \nabla u + \varepsilon^2 a^\varepsilon \nabla^2 u [(I + \nabla N) M]. \tag{27}$$

Проанализируем структуру вектора R_ε с учетом соотношений (9)–(12).

Заметим, что столбцы матрицы $\hat{a}(I + \nabla N) - a^0$ образуют 1-периодические векторы

$$g^j(y) = \hat{a}(e^j + \nabla N^j) - a^0 e^j, \quad j = 1, \dots, d,$$

каждый из которых соленоиденален и имеет среднее $\langle g^j \rangle = 0$, см. (10) и (12). Известно представление (см. [19, гл. I, § 1])

$$\begin{aligned} g^j(y) &= \operatorname{div}_y G^j(y), \quad G^j \in H^1(Y) \text{ — кососимметрическая матрица,} \\ \|G^j\|_{H^1(Y)} &\leq \|g^j\|_{L^2(Y)} \leq c, \quad c = c(d, \lambda). \end{aligned} \tag{28}$$

Тогда второе слагаемое в сумме (26) записывается как

$$\begin{aligned} g^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) &= (\operatorname{div}_y G^j(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) \\ &= \varepsilon \operatorname{div}_x \left(G^j(y) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) - \varepsilon G^j(y) \nabla \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где вектор $\operatorname{div}_x(G^j(y)\partial u(x,t)/\partial x_j)$ соленоидален по x ввиду кососимметричности матрицы $G^j(y)$. В самом деле,

$$\int_{\mathbb{R}}^d \operatorname{div}_x \left(G^j(y) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}}^d (G^j \cdot \nabla^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = 0.$$

Аналогично каждый столбец матрицы $a(I + \nabla_z M) - \hat{a}$ (см. (26)) образует вектор

$$p^j(y, z) = a(y, z)(e^j + \nabla_z M^j(y, z)) - \hat{a}(y)e^j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (29)$$

который соленоидален по z и имеет среднее $\langle p^j(y, \cdot) \rangle = 0$, см. (9) и (11). Так же, как в (28), имеем представление

$$p^j(y, z) = \operatorname{div}_z P^j(y, z), \quad P^j(y, \cdot) \in H^1(Z) \text{ — кососимметрическая матрица,} \\ \|P^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)} \leq \|p^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \leq c, \quad c = c(d, \lambda). \quad (30)$$

По построению (см. (29)) вектор $p^j(y, z)$ липшицев по y со значениями в $L^2_{\text{per}}(Z)^d$ ввиду соответствующих свойств функций $a(y, z)$, $\hat{a}(y)$ и $M(y, z)$ (см. (2) и лемму 1). Это свойство липшицевости наследуется матрицей $P^j(y, z)$, поскольку, согласно предъявленной в [19, гл. I, §1] конструкции, отображение $p^j(y, z) \rightarrow P^j(y, z)$ представляет собой ограниченный оператор, действующий из $L^2_{\text{per}}(Z)^d$ в $L^2_{\text{per}}(Z)^{d \times d}$. Как следствие липшицевости матрицы $P^j(y, z)$ по y для п. в. y существует градиент $\nabla_y P^j(y, z)$ с оценкой

$$\|\nabla_y P^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \leq c, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (31)$$

Более подробное обсуждение свойств матрицы $P^j(y, z)$ приведено в разд. 8.

В силу (30) первое слагаемое в (26) записывается как

$$p^j(y, z)\zeta_j = (\operatorname{div}_z P^j(y, z))\zeta_j \\ = \varepsilon^2 \operatorname{div}_x(P^j(y, z)\zeta_j) - \varepsilon \operatorname{div}_y(P^j(y, z)\zeta_j) - \varepsilon^2 P^j(y, z)\nabla_x \zeta_j, \\ \zeta_j = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} N(y) \cdot \nabla u(x, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2},$$

где вектор $\operatorname{div}_x(P^j(y, z)\zeta_j)$ соленоидален по x ввиду кососимметричности матрицы P^j .

В итоге получаем

$$\operatorname{div} R_\varepsilon = \operatorname{div}(r_\varepsilon^1 + r_\varepsilon^2 + r_\varepsilon^3), \quad (32)$$

где

$$r_\varepsilon^2 = -\varepsilon G^j(y) \nabla \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j}, \\ r_\varepsilon^3 = -\varepsilon \operatorname{div}_y \left[P^j(y, z) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial N(y)}{\partial y_j} \cdot \nabla u(x, t) \right) \right] \\ - \varepsilon^2 P^j(y, z) \nabla_x \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial N(y)}{\partial y_j} \cdot \nabla u(x, t) \right]. \quad (33)$$

Отсюда выводим (см. (1), (4), (26), (32)):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u^\varepsilon - v^\varepsilon) &= L_0 u - L_\varepsilon v^\varepsilon = \partial_t u - \operatorname{div} a^0 \nabla u - \partial_t v^\varepsilon + \operatorname{div} a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon \\ &= \partial_t(u - v^\varepsilon) + \operatorname{div} R_\varepsilon = r_\varepsilon^0 + \operatorname{div}(r_\varepsilon^1 + r_\varepsilon^2 + r_\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$r_\varepsilon^0 = \partial_t(u - v^\varepsilon) = -\varepsilon N \cdot \nabla \partial_t u - \varepsilon^2(I + \nabla N)M \cdot \nabla \partial_t u. \quad (35)$$

Кроме того,

$$(u^\varepsilon - v^\varepsilon)|_{t=0} = -\varepsilon N \cdot \nabla f - \varepsilon^2(I + \nabla N)M \cdot \nabla f \equiv r_\varepsilon. \quad (36)$$

Напомним, что для решения задачи Коши

$$L_\varepsilon w = F_0 + \operatorname{div} F, \quad t > 0, \quad w|_{t=0} = w_0,$$

верна оценка

$$c_0 \|w\|_{0,t}^2 \leq \int_0^t (F_0 + \operatorname{div} F, w) ds + \|w_0\|^2, \quad c_0 = c_0(\lambda),$$

где использовано обозначение $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^d}$. Отсюда, согласно (34), (36), для $w^\varepsilon = u^\varepsilon - v^\varepsilon$ получаем неравенство

$$c \|w^\varepsilon\|_{0,t}^2 \leq \int_0^t (r_\varepsilon^0, w^\varepsilon) ds + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \|r_\varepsilon^i\|^2 ds + \|r_\varepsilon\|^2, \quad (37)$$

где $r_\varepsilon, r_\varepsilon^i, i = 0, \dots, 3$, определены в (27), (33), (35), (36).

Произведенные выше действия были формальными. Они имеют смысл, например, если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. В таком случае решение усредненной задачи гладкое и вместе со всеми своими производными убывает экспоненциально при $|x| \rightarrow \infty$ (см. [19, гл. II, § 1]). Но даже в этой ситуации структура стоящих в правой части формулы (37) функций $r_\varepsilon, r_\varepsilon^i$ такова, что не представляется возможным получить напрямую из (37) оценку вида (5) или (16). Мы доказываем эти оценки окольным путем. Изучается возмущенная посредством сдвигов задача, причем роль параметров сдвига по разным переменным несимметрична и возможна «игра» с параметрами. *Введение параметров сдвига дает дополнительные переменные интегрирования и дифференцирования.* Что касается дополнительных переменных дифференцирования, то этот момент впервые проявляется в методе сдвига при получении оценок для параболических задач, когда коэффициенты не чисто периодические. За счет специально подобранного вхождения параметров возмущения удастся доказать сначала оценки, усредненные (или проинтегрированные) по параметрам сдвига, а уже из них вывести искомые оценки.

6. О свойствах сдвига. Начнем с довольно простой и конкретной ситуации. Рассмотрим интегральную форму

$$J = \int_{\mathbb{R}^d \times Y} b(x/\varepsilon) U(x - \varepsilon \omega) \cdot \eta(x) dx d\omega,$$

в которой

$$b(y) = \operatorname{div} N(y), \quad \text{где } N \in H_{\text{per}}^1(Y)^d, \quad U \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \eta \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (38)$$

Очевидно преобразование

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^d \times Y} b(x/\varepsilon + \omega) U(x) \eta(x + \varepsilon\omega) dx d\omega \\ &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d \times Y} N(x/\varepsilon + \omega) U(x) \cdot \nabla_x \eta(x + \varepsilon\omega) dx d\omega, \end{aligned} \quad (39)$$

где использованы равенства

$$b(y + \omega) = \operatorname{div}_y N(y + \omega) = \operatorname{div}_\omega N(y + \omega), \quad \nabla_\omega \eta(x + \varepsilon\omega) = \varepsilon \nabla_x \eta(x + \varepsilon\omega). \quad (40)$$

Отсюда по неравенству Коши–Буняковского так же, как при доказательстве леммы 4, легко вывести оценку

$$|J| \leq \varepsilon \langle N^2 \rangle^{1/2} \|U\| \|\nabla \eta\|, \quad (41)$$

т. е. форма J имеет порядок ε , что изначально совсем не очевидно.

Обобщая ситуацию (38)–(41), возьмем в интеграле J вместо функции одной переменной $\eta(x)$, определенной на $\mathbb{R}^d$, функцию двух переменных $\eta(x, \omega)$, определенную на $\mathbb{R}^d \times Y$.

Лемма 5. Пусть $b \in L^2_{\text{per}}(Y)$, $\langle b \rangle = 0$, $U \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\eta, \nabla_x \eta, \nabla_\omega \eta \in L^2(\mathbb{R}^d \times Y)$. Пусть $\psi(x, \omega) = b(x/\varepsilon)U(x - \varepsilon\omega)$. Тогда верна оценка

$$|\langle (\psi(\cdot, \omega), \eta(\cdot, \omega)) \rangle| \leq c \langle b^2 \rangle^{1/2} \|U\| (\varepsilon \|\nabla_x \eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times Y)} + \|\nabla_\omega \eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times Y)}), \quad c = c(d). \quad (42)$$

Исходя из соотношений (38)–(41), для вывода оценки (42) необходимо представление $b(y) = \operatorname{div} N(y)$ с оценкой $\|N\|_{H^1(Y)} \leq c \|b\|_{L^2(Y)}$, $c = c(d)$. Но оно на самом деле имеет место по эллиптической теории в силу условия $\langle b \rangle = 0$, если положить $N = \nabla \Phi$, где Φ — решение уравнения на ячейке $\Delta \Phi = b$. Кроме того, вместо (40)₂ используем равенство

$$\nabla_\omega [\eta(x + \varepsilon\omega, \omega)] = \varepsilon \nabla_x \eta(x + \varepsilon\omega, \omega) + \nabla_\omega \eta(x + \varepsilon\omega, \omega).$$

На основе леммы 4(ii) оценка (42) обобщается на функции

$$\psi(x, t, \omega, \sigma) = b(x/\varepsilon - \varepsilon\sigma, x/\varepsilon^2)U(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, t), \quad \omega \in Y, \sigma \in Z,$$

с множителем $b(y, z) \in L^2_{\text{per}}(Y \times Z)$, таким, что $\langle b(y, \cdot) \rangle = 0$.

Лемма 6. При указанных выше условиях верна оценка

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \int_0^T (\psi(\cdot, t, \omega, \sigma), \eta(\cdot, t, \omega, \sigma)) dt \right\rangle_{Y \times Z} \right| \\ & \leq c \langle b^2 \rangle_{Y \times Z}^{1/2} \|U\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])} (\varepsilon^2 \|\nabla_x \eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T] \times Y \times Z)} \\ & \quad + \|\nabla_\sigma \eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T] \times Y \times Z)}), \quad c = c(d). \end{aligned} \quad (43)$$

Замечание. Данная в (43) оценка трилинейной формы с осциллирующим множителем весьма существенна в дальнейшем как способ преодолеть неинтегрируемость в наших предположениях производной $\nabla \partial_t u$ решения усредненной задачи, когда оценивается невязка первого приближения для исходного уравнения, см. (34), (35), а также (19). Использование такого рода оценок встречалось и ранее как один из основных моментов метода первого приближения, см. его версии в [10], [11], [14], [17], [18].

Теперь рассмотрим задачу Коши вида (1) со сдвигом в коэффициентах и начальной функции, а именно,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^h u_h^\varepsilon &\equiv \partial_t u_h^\varepsilon - \operatorname{div} a(x/\varepsilon - h, x/\varepsilon^2) \nabla u_h^\varepsilon = 0, & t > 0, \\ u_h^\varepsilon|_{t=0} &= f(x - h), & f \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (44)$$

Лемма 7. Для п. в. $h \in Y$ существует градиент $\nabla_h u_h^\varepsilon$, причем выполнена оценка

$$\|\nabla_h u_h^\varepsilon\|_{0,t} \leq c \|f\|_{H^1}, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (45)$$

Доказательство. Из энергетической оценки вытекает неравенство

$$\|u_h^\varepsilon\|_{0,t} \leq c \|f\|, \quad c = c(\lambda).$$

Дифференцируя уравнение (44) по h_i , получаем задачу Коши с правой частью

$$L_\varepsilon^h v_i^\varepsilon = \operatorname{div} b_i^\varepsilon(x) \nabla u_h^\varepsilon, \quad t > 0, \quad v_i^\varepsilon|_{t=0} = -\frac{\partial}{\partial x_i} f(x - h),$$

для $v_i^\varepsilon = \partial u_h^\varepsilon / \partial h_i$, где $b_i^\varepsilon(x) = -\partial a(x/\varepsilon - h, x/\varepsilon^2) / \partial y_i$ есть ограниченная матрица в силу условия (2). Тогда снова из энергетической оценки выводим

$$c_0 \|v_i^\varepsilon\|_{0,t}^2 \leq \int_0^t \|\nabla u_h^\varepsilon\|^2 ds + \|\nabla f\|^2, \quad c_0 = c_0(\lambda, c_L),$$

что вместе с первым неравенством дает (45).

Следствие леммы 7. Для разности решений задач (1) и (44) верна оценка

$$\|u^\varepsilon - u_h^\varepsilon\|_{0,t} \leq |h| c \|f\|_{H^1}, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (46)$$

Доказательство следует из (45), поскольку $u_h^\varepsilon|_{h=0} = u^\varepsilon$.

Замечание. В более общей ситуации в задаче (44) сдвиги в коэффициентах и начальной функции могут быть независимыми, соответствующие параметры сдвига — это $h \in Y$ и $\tilde{h} \in Y$. Тогда зависящее от этих параметров решение задачи $u_{h,\tilde{h}}^\varepsilon$ имеет градиент $\nabla_{h,\tilde{h}} u_{h,\tilde{h}}^\varepsilon$, удовлетворяющий оценке типа (45), а именно,

$$\|\nabla_{h,\tilde{h}} u_{h,\tilde{h}}^\varepsilon\|_{0,t} \leq c \|f\|_{H^1}, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (47)$$

Для разности решений задач (1) и (44) верна оценка, аналогичная (46),

$$\|u^\varepsilon - u_{h,\tilde{h}}^\varepsilon\|_{0,t} \leq c(|h| + |\tilde{h}|) \|f\|_{H^1}, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (48)$$

7. Вывод проинтегрированной оценки. Дадим набросок доказательства ключевой для нашего метода леммы 3. При этом подробно остановимся на всех трудных и типичных моментах, стараясь избегать повторов и опуская очевидные детали. Сначала представим общую схему, а затем дополним ее пояснениями и выкладками.

• Наряду с задачей (1) рассмотрим возмущенную с помощью сдвига задачу

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\omega,\sigma}^\varepsilon - \operatorname{div} a(x/\varepsilon - \varepsilon\sigma, x/\varepsilon^2) \nabla u_{\omega,\sigma}^\varepsilon &= 0, & t > 0, \\ u_{\omega,\sigma}^\varepsilon|_{t=0} &= f(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma). \end{aligned} \quad (49)$$

Сдвиг присутствует в коэффициентах и начальной функции. Соответствующие задачи на ячейке (9) и (10) формулируются с матрицами $a(y - \varepsilon\sigma, z)$ и $\hat{a}(y - \varepsilon\sigma)$,

их решениями будут $M^j(y - \varepsilon\sigma, z)$ и $N^j(y - \varepsilon\sigma)$, но окончательная усредненная матрица остается прежней и усредненная задача Коши имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\omega, \sigma} - \operatorname{div} a^0 \nabla u_{\omega, \sigma} &= 0, \quad t > 0, \\ u_{\omega, \sigma}|_{t=0} &= f(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma). \end{aligned}$$

Ясно, что $u_{\omega, \sigma}(x, t) = u(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, t)$, где u — решение задачи (4). Связь между решениями задач (1) и (49) не столь явная. Однако в силу (48) можно заключить, что эти решения близки в смысле оценки

$$\|u_{\omega, \sigma}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{0,t} \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1}, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (50)$$

Обычным первым приближением для решения задачи (49) будет введенная ранее функция $v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(x, t)$, см. (20). Тогда, как установлено в разд. 5, для разности

$$w^\varepsilon = w_{\omega, \sigma}^\varepsilon = u_{\omega, \sigma}^\varepsilon(x, t) - v_{\omega, \sigma}^\varepsilon(x, t)$$

выполнено неравенство (37), где на сей раз r_ε^i , r_ε — функции от смещенных переменных

$$x' = x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, \quad y' = y - \varepsilon\sigma, \quad y = x/\varepsilon, \quad z = x/\varepsilon^2.$$

Проинтегрировав это неравенство по $\omega \in Y$ и $\sigma \in Z$, получим

$$c\langle \|w^\varepsilon\|_{0,t}^2 \rangle_{Y \times Z} \leq \sum_{i=0}^4 \langle J_i \rangle_{Y \times Z}, \quad (51)$$

где через J_i , $i = 0, \dots, 4$, последовательно обозначены слагаемые правой части неравенства (37). Оценивая сверху правую часть неравенства (51) на основе отмеченных ранее свойств сдвига, выведем соотношение

$$J \equiv \langle \|w^\varepsilon\|_{0,t}^2 \rangle_{Y \times Z} \leq C(\varepsilon^2 \|f\|_{H^1}^2 + \varepsilon \|f\|_{H^1} J^{1/2} + \varepsilon \|f\|_{H^1}^2), \quad (52)$$

из которого легко получить, что $J \leq c\varepsilon \|f\|_{H^1}^2$. Отсюда и из (50) по неравенству треугольника следует (22). Далее даются пояснения, как из (51) выводится неравенство (52).

- Рассмотрим в (51) слагаемые J_i , $i > 0$. Верна оценка

$$\langle J_i \rangle_{Y \times Z} \leq c\varepsilon^2 \|f\|_{H^1}^2. \quad (53)$$

Здесь важно, что все эти интегралы, во-первых, содержат $\nabla u, \nabla^2 u \in L^2(Q)$ (см. (19)) или $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Во-вторых, перед интегралами стоит степень ε^{2+k} ($k \geq 0$), никак не меняющаяся в процессе преобразований и оценок. По лемме 4 и по свойствам вспомогательных функций производим в этих интегралах (после замены переменных) повторное интегрирование по переменным σ , ω и x , t в указанном порядке с одновременной их оценкой и упрощением. Например, в слагаемое $\langle J_1 \rangle_{Y \times Z}$ (см. r_ε^1 в (27)) входит интеграл

$$\begin{aligned} I &\equiv \varepsilon^4 \int_{Q \times Y \times Z} |\nabla_y N(y') M(y', z)|^2 |U(x', s)|^2 dx ds d\omega d\sigma \\ &= \varepsilon^4 \int_Y \left(\int_Z |\nabla N(\omega) M(\omega, \sigma)|^2 d\sigma \right) d\omega \int_Q |U(x, s)|^2 dx ds \end{aligned}$$

с $U = \nabla^2 u$, преобразованный согласно равенству (24), причем интегрирование по $Y \times Z$ представлено здесь как повторное. Параметры σ и ω входят в функции

∇N и M так, что начальное интегрирование по σ падает только на множитель $|M|^2$. Как следствие при получении оценки сверху интегрирование по σ и ω разделяется по множителям, благодаря свойству $\sup_y \|M(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \leq c$ (см. лемму 1(ii)). А именно,

$$I \leq \varepsilon^4 \sup_y \|M(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}^2 \|\nabla_y N\|_{L^2(Y)}^2 \int_Q |U|^2 dx ds \leq c \varepsilon^4 \|f\|_{H^1}^2, \quad (54)$$

где последовательно использованы свойства ограниченности для функций M^j , N^j и u (см. (19) и лемму 1(ii)). Для оценки других интегралов того же типа, что и I , учитываем также свойства ограниченности функций G^j и P^j (см. (28), (30), (31)).

• Теперь рассмотрим в (51) наиболее трудные для оценки интегралы из слагаемого $\langle J_0 \rangle_{Y \times Z}$, в которые входят через r_ε^0 (см. (35)) производные $\nabla(\partial u / \partial t)$, вообще говоря, не принадлежащие $L^2(Q)$. Тогда перебрасываем дифференцирование по x , за счет интегрирования по частям, с $u(x, t)$ на другие подынтегральные функции. Если оно падает на осциллирующие функции, то стоящая перед интегралом положительная степень параметра ε вовсе может исчезнуть. Так возникают выражения (с $U = \partial u / \partial t$)

$$I_1 = \int_{Q \times Y \times Z} (\operatorname{div} N)(y') U(x', s) w^\varepsilon(x, s) dx ds d\omega d\sigma,$$

$$I_2 = \int_{Q \times Y \times Z} \nabla_y N(y') \cdot \nabla_z M(y', z) U(x', s) w^\varepsilon(x, s) dx ds d\omega d\sigma,$$

малость которых отнюдь не очевидна на первый взгляд. Однако к этим интегралам применимы оценки (42) и (43). Здесь роль функции η играет разность $w^\varepsilon = u_{\omega, \sigma}^\varepsilon - v_{\omega, \sigma}^\varepsilon$.

Нетрудно понять, что

$$\langle \|\nabla_{\omega, \sigma} w^\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2 \rangle_{Y \times Z} \leq C \varepsilon^2 \|f\|_{H^1}^2, \quad (55)$$

поскольку, согласно оценке (47), $\langle \|\nabla_{\omega, \sigma} u_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q)}^2 \rangle_{Y \times Z} \leq c \varepsilon^2 \|f\|_{H^1}^2$, а неравенство

$$\|\nabla_{\omega, \sigma} v_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)} \leq c \varepsilon \|f\|_{H^1}$$

устанавливается по лемме 4 после непосредственного дифференцирования функции $v_{\omega, \sigma}^\varepsilon$ по ω , σ . В самом деле (см. (20)),

$$\nabla_\omega v_{\omega, \sigma}^\varepsilon = -\varepsilon [\nabla_x u(x', s) + \varepsilon \nabla^2 u(x', s) N(y') + \varepsilon^2 (I + \nabla N(y')) \nabla^2 u(x', s) M(y', z)],$$

и аналогичной суммой, но более громоздкой, задается $\nabla_\sigma v_{\omega, \sigma}^\varepsilon$. К подобного сорта выражениям применимы равенства (23) и (24). Отсюда с учетом леммы 1 получаем

$$\|\nabla_{\omega, \sigma} v_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)} \leq c \varepsilon (\|\nabla u\|_{L^2(Q)} + \|\nabla^2 u\|_{L^2(Q)}) \stackrel{(19)}{\leq} c \varepsilon \|f\|_{H^1}.$$

В итоге оценка интегралов I_i , $i = 1, 2$, проходит по схеме

$$\begin{aligned} |I_i| &\stackrel{(42), (43)}{\leq} c \|U\|_{L^2(Q)} (\varepsilon \|\nabla w_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)} + \|\nabla_{\omega, \sigma} w_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)}) \\ &\stackrel{(19), (55)}{\leq} C \|f\|_{H^1} (\varepsilon \|\nabla w_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)} + \varepsilon \|f\|_{H^1}) \leq C \varepsilon (\|f\|_{H^1} J^{1/2} + \|f\|_{H^1}^2), \end{aligned}$$

где учтено неравенство $\|\nabla w_{\omega, \sigma}^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)}^2 \leq J$, вытекающее из определений величины J и параболической нормы $\|\cdot\|_{0,t}$ (см. (52) и (18)).

• Помимо I_1 и I_2 в слагаемое $\langle J_0 \rangle_{Y \times Z}$ из (51) входят интегралы, имеющие после указанного выше перебрасывания производной по x следующий вид:

$$I_3 = \varepsilon \int_{Q \times Y \times Z} b(y', z) U(x', s) w^\varepsilon(x, s) dx ds d\omega d\sigma, \quad b = \Delta N \cdot M, \quad U = \frac{\partial u}{\partial s},$$

$$I_4 = \varepsilon^2 \int_{Q \times Y \times Z} b(y', z) U(x', s) \nabla w^\varepsilon(x, s) dx ds d\omega d\sigma, \quad b = (I + \nabla N)M, \quad U = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

При этих интегралах сохранился множитель ε . Интеграл I_3 оценивается по лемме 6, а интеграл I_4 — по неравенству Коши–Буняковского и лемме 4. Например,

$$\begin{aligned} |I_4|^2 &\leq c\varepsilon^4 \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)}^2 \int_{Q \times Y \times Z} |b(y', z) U(x', s)|^2 dx ds d\omega d\sigma \\ &\stackrel{(24)}{=} c\varepsilon^4 \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)}^2 \|b\|_{L^2(Y \times Z)}^2 \|U\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\stackrel{(19)}{\leq} C\varepsilon^4 \|f\|_{H^1}^2 \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(Q \times Y \times Z)}^2 \leq C\varepsilon^4 \|f\|_{H^1}^2 J. \end{aligned}$$

Здесь оценка $\|b\|_{L^2(Y \times Z)}^2 \leq c$ получена так же, как при изучении интеграла I , с учетом специально подобранного вхождения параметров ω, σ в аргументы функции b .

Окончательно, с учетом всех интегралов, входящих в J_0 , получаем

$$\langle J_0 \rangle_{Y \times Z} \leq c(\varepsilon \|f\|_{H^1} J^{1/2} + \varepsilon \|f\|_{H^1}^2 + \varepsilon^2 \|f\|_{H^1}^2),$$

и вместе с (53) это позволяет из (51) вывести искомую оценку (52).

8. Свойство липшицевости и его следствия. В этом разделе докажем свойства вспомогательных функций, важные для применения нашего метода.

Начнем со свойств, собранных в лемме 1. Первое свойство ограниченности из (ii) немедленно следует из энергетического равенства для решения M^j задачи (9)

$$\langle a \nabla_z M^j \cdot \nabla_z M^j \rangle_Z = -\langle a \nabla_z M^j \cdot e^j \rangle_Z \implies \langle a \nabla_z M^j \cdot \nabla_z M^j \rangle_Z \leq \langle a e^j \cdot e^j \rangle_Z$$

и условия (3) на матрицу $a(y, z)$, если учесть, что в пространстве $H^1(Z)/\mathbb{R}$ выражение $\langle \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \rangle^{1/2}$ задает норму в силу неравенства Пуанкаре.

Чтобы доказать свойство (i), запишем интегральные тождества для $M^j(y + h, \cdot)$ и $M^j(y, \cdot)$ и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} &\langle a(y + h, z) \nabla_z (M^j(y + h, z) - M^j(y, z)) \cdot \nabla_z \varphi \rangle_Z \\ &= -\langle (a(y + h, z) - a(y, z)) (\nabla_z M^j(y, z) + e^j) \cdot \nabla_z \varphi \rangle_Z, \quad \varphi \in H_{\text{per}}^1(Z). \end{aligned}$$

Отсюда, положив $\varphi = M^j(y + h, z) - M^j(y, z)$, по неравенству Коши–Буняковского в силу (2) и (3) выводим неравенство

$$\lambda \langle |\nabla_z \varphi|^2 \rangle_Z \leq c_L |h| \langle |\nabla_z \varphi|^2 \rangle_Z^{1/2} \langle |\nabla_z M^j(y, z) + e^j|^2 \rangle_Z^{1/2}.$$

Это вместе с доказанным уже свойством (ii) для M^j дает $\langle |\nabla_z \varphi|^2 \rangle_Z^{1/2} \leq c|h|$, $c = c(\lambda, c_L)$, что и требовалось.

Для вывода свойства (iii), используя определение (11), запишем

$$\begin{aligned} (\hat{a}(y+h) - \hat{a}(y))e^j &= \langle (a(y+h, z) - a(y, z))\nabla_z M^j(y+h, z) \rangle_Z \\ &\quad + \langle (a(y+h, z) - a(y, z))e^j \rangle_Z \\ &\quad + \langle a(y, z)(\nabla_z(M^j(y+h, z) - M^j(y, z))) \rangle_Z, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из условия (2) и уже доказанных свойств (i) и (ii) следует липшицевость матрицы $\hat{a}(y)$.

Второе свойство ограниченности из (ii) получается по эллиптической теории, поскольку в уравнении (10) имеем $\operatorname{div} \hat{a}e^j \in L^\infty(Y)^d$ ввиду липшицевости матрицы $\hat{a}$.

Из доказанных уже свойств функций M^j и $\hat{a}$ следует, что вектор $p^j(y, z)$, определенный равенством (29), липшицев по y со значениями в $L^2_{\text{per}}(Z)^d$. Косимметрическая матрица $P^j(y, \cdot)$, являющаяся «потенциалом» соленоидального вектора $p^j(y, \cdot)$ (см. (30)), задается с помощью некоторого ограниченного оператора $\mathfrak{L}: L^2_{\text{per}}(Z)^d \rightarrow L^2_{\text{per}}(Z)^{d \times d}$ (см. в [19, гл. I, §1] формулу (12)), норма которого заведомо меньше пяти. Тогда

$$P^j(y+h, \cdot) - P^j(y, \cdot) = \mathfrak{L}p^j(y+h, \cdot) - \mathfrak{L}p^j(y, \cdot) = \mathfrak{L}(p^j(y+h, \cdot) - p^j(y, \cdot))$$

и, следовательно,

$$\|P^j(y+h, \cdot) - P^j(y, \cdot)\|_{L^2_{\text{per}}(Z)^{d \times d}} \leq 5\|p^j(y+h, \cdot) - p^j(y, \cdot)\|_{L^2_{\text{per}}(Z)^d} \leq 5C_L|h|,$$

где C_L — константа Липшица вектора $p^j(y, \cdot)$. Таким образом, доказана липшицевость матрицы $P^j(y, \cdot)$ в указанном смысле и как следствие свойство ограниченности (31).

9. Некоторые замечания и обобщения.

• В чисто периодическом случае, когда $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ и $a(y)$ — периодическая матрица, методом первого приближения (в несколько иной версии, основанной на введении дополнительного параметра интегрирования в скрытом виде через средние по Стеклову) получен более точный результат (см. [11]) по сравнению с тем, что удалось доказать для многомасштабной или локально периодической матрицы [18]. А именно, экспонента усредненного оператора A_0 приближает экспоненту исходного оператора A_ε с точностью порядка ε , т.е. верна оценка типа (8) с равным единице показателем в правой части. Одновременно с этим в [11] было найдено приближение того же порядка в $(L^2 \rightarrow H^1)$ -операторной норме, которое получается добавлением к экспоненте e^{-tA_0} корректирующего оператора, соответствующего корректору в первом приближении. Кроме того, в чисто периодическом случае при фиксированном ε (например, $\varepsilon = 1$) можно утверждать, что

$$\|e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ct^{-1/2}, \quad t \geq 1, \quad (56)$$

т.е. e^{-tA_0} служит приближением к e^{-tA_ε} при фиксированном ε , если $t \rightarrow \infty$. (Оценка типа (56) при $\varepsilon = 1$ оказывается базовой, из нее автомодельной заменой координат выводятся операторные оценки усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$.) Такого рода оценки в многомасштабном или локально периодическом случаях не установлены. В этих случаях версия метода первого приближения с усреднением по Стеклову из работы [11] непригодна. Неприменим и спектральный метод,

- В предыдущих разделах была изучена двухмасштабная задача с осцилляциями в коэффициентах, имеющими периоды ε и ε^2 . Оценки типа (5) и (8) можно получить и в случае многомасштабной матрицы

где $a(y_1, \dots, y_n)$ является периодической по каждой переменной $y_j \in \mathbb{R}^d$ с ячeyкой периодичности Y_j , Y_j ($j = 1, \dots, d$) — параллелепипеды, не обязательно совпадающие. При $n = 2$ требовалась измеримость по y_2 и липшицевость по y_1 функции $a(y_1, y_2)$. Теперь же при $n > 2$ пусть функция $a(y_1, \dots, y_n)$ липшицева по каждой переменной y_j , $j \neq n$, и измерима по y_n . В этом случае первое приближение имеет вид

где

Периодические по всем переменным вектор-функции $N_n(y_1, \dots, y_n), \dots, N_1(y_1)$ являются решениями задач на ячейках $Y_n, \dots, Y_1$ соответственно и определяются параллельно с усредненными матрицами $a_n^0(y_1, \dots, y_n), \dots, a_2^0(y_1), a_1^0$ рекуррентно, начиная с номера n . На первом шаге определяем

где N_n зависит от $y_1, \dots, y_{n-1}$ как от параметров, а также вычисляем матрицу

На втором шаге находим

а также матрицу $a_{n-1}^0(y_1, \dots, y_{n-2}) = \langle a_n^0(y_1, \dots, y_{n-1})(I + \nabla_{y_{n-1}} N_{n-1}) \rangle_{Y_{n-1}}$, и т. д.

и окончательную усредненную матрицу $a_1^0 = \langle a_2^0(y_1)(I + \nabla_{y_1} N_1(y_1)) \rangle_{Y_1}$.

Наконец, в формуле (57) $u(x, t)$ — решение усредненной задачи (4) с матрицей $a^0 \equiv a_1^0$, найденной в процессе n -кратного повторения процедуры усреднения, описанной выше.

- [8] В. В. Жиков, *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.
- [9] С. Е. Пастухова, *О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 604–608.
- [10] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.
- [11] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 351–265.
- [12] В. В. Жиков, С. В. Тихомирова, *Об операторных оценках в несимметрических задачах усреднения*, Современная математика и ее приложения, **33** (2005), 124–128.
- [13] G. Cardone, S. E. Pastukhova, V. V. Zhikov, *Some estimates for non-linear homogenization*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl., **29** (2005), 101–110.
- [14] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений*, Сиб. матем. журн., **49**:1 (2008), 101–124.
- [15] С. Е. Пастухова, С. В. Тихомирова, *Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение «вариационных решений»*, Матем. заметки, **81**:4 (2007), 631–635.
- [16] С. Е. Пастухова, *Операторные оценки в нелинейных задачах повторного усреднения*, Труды МИАН, **261** (2007), 220–233.
- [17] С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, *Операторные оценки повторного и локально периодического усреднения*, Докл. РАН, **415**:3 (2007), 304–309.
- [18] S. E. Pastukhova, *Estimates in homogenization for parabolic equations with locally periodic coefficients*, Asymptot. Anal., **66**:3–4 (2010), 207–228.
- [19] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
- [20] Т. А. Суслина, *Усреднение периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.
- [21] T. A. Suslina, *Homogenization of periodic parabolic Cauchy problem*, in: Nonlinear Equations and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.
- [22] Е. С. Василевская, Т. А. Суслина, *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ, **24**:2 (2012), 1–103.
- [23] В. В. Жиков, *О спектральном методе в теории усреднения*, Труды МИАН, **250** (2005), 95–104.
- [24] С. Е. Пастухова, *Об аппроксимациях экспоненты оператора с периодическими коэффициентами*, Пробл. матем. анализа, вып. 63, 2012, 81–108.
- [25] С. Е. Пастухова, *Аппроксимации операторной экспоненты в периодической задаче диффузии со сносом*, Матем. сб., **204**:2 (2013), 133–160.