Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Новиков, И. А. Тайманов, С. П. Царев,
Двумерные потенциалы Вигнера–фон Неймана с
кратным положительным собственным значени-
ем, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, вы-
пуск 4, 74–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 06:55:56

подстановки. Для случая $h(\xi) = 1$ результат следствия 3 совпадает с критерием из этих работ — спектр является чисто точечным тогда и только тогда, когда $c(\xi) = 1$. А для случая $h(\xi) > 1$ критерий из следствия 3, в отличие от критерия из этих работ, не требует перехода к модифицированной подстановке.

Автор выражает благодарность Ф. В. Петрову и А. М. Вершику за многочисленные полезные обсуждения, указания и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, **119**:5 (1958), 861–864. [2] А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, **124** (1959), 754–755. [3] Я. Г. Синай, Докл. АН СССР, **124** (1959), 768–771. [4] А. Г. Купширенко, УМН, **22**:5(137) (1967), 57–65. [5] Т. Kamae, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 285–306. [6] F. M. Dekking, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **41**:3 (1977/78), 221–239. [7] А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, ТВП, **52**:3 (2007), 446–467. [8] M. Queffelec, *Substitution Dynamical Systems—Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010. [9] A. Vershik, Markov Processes and Related Fields, **16**:1 (2010), 169–185. [10] А. М. Вершик, Алгебра и анализ, **23**:1 (2011), 111–135. [11] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, Зап. научн. сем. ПОМИ, **390** (2011), 201–209. [12] A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, Cent. Eur. J. Math., **11**:3 (2013), 379–400.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
Санкт-Петербургского государственного университета
Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: раха239@yandex.ru

Поступило в редакцию
1 сентября 2014 г.

УДК 517.95+517.984.5

Двумерные потенциалы Вигнера–фон Неймана с кратным положительным собственным значением*

© 2014. Р. Г. Новиков, И. А. Тайманов, С. П. Царев

Пусть H — оператор Шрёдингера,

$$H = -\Delta + U,$$

с убывающим на бесконечности потенциалом $U(x)$ в $\mathbb{R}^N$. Потенциал U называется *потенциалом Вигнера–фон Неймана*, если H имеет положительное собственное значение с собственной функцией, принадлежащей $L_2(\mathbb{R}^N)$, т. е. существует точка его дискретного спектра, вложенная в абсолютно непрерывный спектр.

*Работа была частично поддержана ФЦП №14.А18.21.0866 Министерства образования и науки РФ (Р. Г. Н.), междисциплинарным проектом «Геометрические и алгебраические методы нахождения явных решений уравнений математической физики и механики сплошной среды» СО РАН (И. А. Т. и С. П. Ц.) и грантом 1431/ГФ Министерства образования и науки Республики Казахстан (И. А. Т.). Она также получила поддержку в рамках государственного задания Министерства образования и науки по Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году, задание №1.1462.2014/К (С. П. Ц.).

Первый пример подобного потенциала был построен фон Нейманом и Вигнером [1]. Они нашли трехмерный гладкий потенциал $U(r)$, зависящий только от расстояния r до начала координат, со следующим асимптотическим поведением (здесь мы исправляем вычислительную ошибку работы [1], которая была замечена позже):

$$U(r) = -\frac{8 \sin 2r}{r} + O(r^{-2}) \quad \text{при } r = |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Операторы Шрёдингера с $U(x) = o(1/|x|)$ при $x \rightarrow \infty$ не имеют положительных собственных значений ([2]).

В данной работе мы в явном виде строим многопараметрические семейства двумерных потенциалов, убывающих, как $1/|x|$, и имеющих двукратное положительное собственное значение. Насколько нам известно, это первые примеры подобных потенциалов.

Мы используем метод, впервые примененный в [3], [4] для построения двумерных операторов Шрёдингера с быстро убывающими потенциалами и многомерными ядрами. Этот метод основан на преобразовании Мутара для двумерных операторов Шрёдингера и состоит в следующем: пусть ω — формальное решение уравнения

$$H\omega = (-\Delta + U(x, y))\omega = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Преобразование Мутара, соответствующее H и ω , дает новый оператор Шрёдингера

$$\tilde{H} = -\Delta + \tilde{U}, \quad \tilde{U} = U - 2\Delta \log \omega,$$

такой, что φ удовлетворяет уравнению $H\varphi = 0$. Тогда функция θ , определенная с точностью до слагаемого const/ω совместной системой уравнений

$$(\omega\theta)_x = -\omega^2(\varphi/\omega)_y, \quad (\omega\theta)_y = \omega^2(\varphi/\omega)_x, \quad (2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{H}\theta = 0.$$

Таким образом, имеются отображения

$$U \rightarrow M_\omega(U) = U - 2\Delta \log \omega, \quad \varphi \rightarrow S_\omega(\varphi) = \{\theta + C/\omega, C \in \mathbb{C}\}.$$

Рассмотрим оператор H и пару решений ω_1 и ω_2 уравнения (1). Для каждого $\theta_1 \in S_{\omega_1}(\omega_2)$ существует функция (результат двойной итерации преобразования Мутара)

$$\hat{U} = M_{\theta_1} M_{\omega_1}(U) - U = -2\Delta \log(\theta_1 \omega_1).$$

Результат этой двойной итерации зависит от выбора $\theta_1 \in S_{\omega_1}(\omega_2)$, т. е. от константы интегрирования C в (2). Кроме того, функции

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta_1}, \quad \psi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1 \theta_1}$$

удовлетворяют уравнению

$$(-\Delta + M_{\theta_1} M_{\omega_1}(U))\psi = 0.$$

В отличие от [3], [4], где подобная двойная итерация применялась к нулевому начальному потенциалу $U = 0$, здесь мы применяем ее к постоянному потенциалу $U = -k^2$, $k \in \mathbb{R}$. Таким образом, ω_1 и ω_2 удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$-\Delta\omega = k^2\omega.$$

Широкий запас решений этого уравнения задается функциями вида

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \exp \left(i \frac{k}{2} \left(\lambda z + \frac{\bar{z}}{\lambda} \right) \right) \right], \quad z = x + iy, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

и их линейными комбинациями.

Для простоты мы рассмотрим случай $k^2 = 1$ и продемонстрируем метод на одном явном примере.

Теорема 1. Пусть $U = -1$ и

$$\omega_1 = x^2 \cos y - y \sin y + y^2 \sin x + x \cos x, \quad \omega_2 = 4(y \cos x + x \sin y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Тогда двумерный потенциал $\hat{U}$ принимает вид

$$\hat{U} = P/Q^2,$$

где

$$\begin{aligned} Q = \omega_1 \theta_1 = & -x^4 - y^4 - 4x^2 y \sin x \sin y + x^2(-8 \cos y \sin x - 2 \sin^2 y - 1) \\ & + 4xy^2 \cos x \cos y - 16xy \cos x \sin y + 2x \cos x(-8 \cos y - \sin x) \\ & + y^2(-8 \cos y \sin x + 2 \sin^2 x - 3) + 2y \sin y(\cos y + 8 \sin x) \\ & + 16 \cos y \sin x + \sin^2 x - \sin^2 y + 4C + 1, \end{aligned}$$

и P — полином от x , y , а также синусов и косинусов от x и y :

$$P = 16(x^6 y \sin x \sin y - x^5 y^2 \cos x \cos y + x^2 y^5 \sin x \sin y - xy^6 \cos x \cos y) + \dots$$

(точками обозначены члены меньшего порядка, зависящие от x и y). Функции ψ_1 и ψ_2 принимают вид

$$\psi_1 = \omega_1/Q, \quad \psi_2 = \omega_2/Q$$

и удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\psi = \psi, \quad \hat{H} = -\Delta + \hat{U}.$$

Если константа C отрицательна и $|C|$ достаточно велик, то Q не обращается в нуль и, значит, потенциал $\hat{U}$ и функции ψ_1 и ψ_2 гладкие. Имеем

$$\hat{U} = O(r^{-1}), \quad \psi_1 = O(r^{-2}), \quad \psi_2 = O(r^{-3}) \quad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Следовательно, ψ_1 и ψ_2 принадлежат $L_2(\mathbb{R}^2)$ и являются линейно независимыми собственными функциями оператора $\hat{H} = -\Delta + \hat{U}$ с собственным значением $E = 1$.

Используя различные линейные комбинации решений (3), можно легко построить многопараметрические семейства подобных двумерных потенциалов $\hat{U}$ с асимптотикой (4) и решениями ψ_i на уровне энергии $E = k^2$, а также увеличить скорость убывания собственных функций ψ_i на бесконечности. Однако

невозможно увеличить скорость убывания получаемых потенциалов в силу упомянутой выше теоремы Като [2].

Мы предполагаем, что при повторной итерации преобразования Мутара можно получить подобные потенциалы с положительным собственным значением более высокой кратности.

Благодарности. Данная работа была выполнена во время посещения одним из авторов (И. А. Т.) Centre de Mathématique Appliquées (Ecole Polytechnique) в июле 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. von Neumann, E. P. Wigner, Z. Phys., **30** (1929), 465–467. [2] T. Kato, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 403–425. [3] И. А. Тайманов, С. П. Царев, УМН, **62:3** (2007), 217–218. [4] И. А. Тайманов, С. П. Царев, ТМФ, **157:2** (2008), 188–207.

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique
e-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

Поступило в редакцию
2 августа 2013 г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Сибирский федеральный университет,
Институт космических и информационных технологий
e-mail: sptsarev@mail.ru

УДК 517.9

Акустическая дифракция на периодических графах*

© 2014. В. С. РАБИНОВИЧ

Пусть Γ — ориентированный граф, вложенный в $\mathbb{R}^2$ и периодический относительно свободного действия группы $\mathbb{Z}^n$, $n = 1, 2$. Мы рассматриваем акустическую проблему дифракции, описываемую уравнением Гельмгольца

$$\rho(x)\nabla \cdot \rho^{-1}(x)\nabla u(x) + a(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1)$$

где ρ — плотность неоднородной среды, $a = \omega^2/c^2$, ω — частота гармонических колебаний, c — скорость звука в среде. Мы рассматриваем решения уравнения (1) в пространстве $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, удовлетворяющие дифракционным условиям (условиям трансмиссии) на Γ

$$[u]_{\Gamma \setminus \mathcal{V}} = 0, \quad (2)$$

$$\left[b \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma \setminus \mathcal{V}} + du = f \in L^p(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \quad (3)$$

где $\mathcal{V}$ есть множество вершин графа Γ , b принадлежит $PC(\mathbb{R}^2, \Gamma)$, пространству ограниченных кусочно-непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$ с разрывами на Γ , d принадлежит $PC(\Gamma, \mathcal{V})$, пространству ограниченных кусочно-непрерывных

*Работа поддержана Национальной системой исследователей Мексики (SNI), а также проектом CONACYT 000000000179872.