Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, О подобии самосопряженным операторам, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:11:25

О подобии самосопряженным операторам

© 2014. Г. М. ГУБРЕЕВ, А. А. ТАРАСЕНКО

В настоящей заметке, которая является продолжением работ [1]–[3], формулируются критерии подобия самосопряженным операторам w -возмущений вольтерровых операторов.

1. Приведем основные понятия из [1]–[3], которые встречаются в этой статье. Через $\Omega^{(\text{exp})}$ обозначается класс операторов B в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, таких, что: 1) $\sigma(B) = \{0\}$, $\text{Ker } B = \text{Ker } B^* = \{0\}$; 2) оператор B^{-1} генерирует C_0 -полугруппу $\exp\{iB^{-1}t\}$, $t > 0$; 3) целая оператор-функция $(I - zB)^{-1}$ имеет конечный экспоненциальный тип роста. Через $\mathcal{M}_n$ обозначим множество почти всюду положительных на $\mathbb{R}$ матричных весов $w^2(x)$ порядка $n \geq 1$, удовлетворяющих (A_2) -условию Макенхаупта [4]

$$\sup_{\Delta} \|(M(w^{-2}))^{1/2}(M(w^2))^{1/2}\| < \infty, \quad M(w^{\pm 2}) := |\Delta|^{-1} \int_{\Delta} w^{\pm 2}(x) dx,$$

где Δ — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $|\Delta|$ — его длина.

В дальнейшем рассматриваются конечномерные возмущения K операторов $B \in \Omega^{\text{exp}}$ вида

$$Kh = Bh + \sum_{k=1}^n (h, f_k) g_k, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $\{f_k\}_1^n, \{g_k\}_1^n$ — линейно независимые системы векторов пространства $\mathfrak{H}$.

Оператор K , действующий по формуле (1), называется w -возмущением ранга n оператора B , если существует вес $w^2 \in \mathcal{M}_n$ и положительные константы m, M , такие, что для всех $h \in \mathfrak{H}$

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{B}(x, h)w^{-1}(x)\|^2 dx \leq M\|h\|^2, \quad (2)$$

где $\mathcal{B}(z, h) := \text{row}((I - zB)^{-1}g_k, h)$, $z \in \mathbb{C}$.

Для каждого веса $w^2 \in \mathcal{M}_n$ справедливы факторизации

$$w^2(x) \doteq w_+^*(x + i0)w_+(x + i0) \doteq w_-^*(x - i0)w_-(x - i0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где через $w_+(x + i0)$ ($w_-(x - i0)$) обозначаются некасательные предельные значения внешней в $\mathbb{C}_+$ матрицы-функции (в дальнейшем м.-ф.) $w_+(z)$ (внешней в $\mathbb{C}_-$ м.-ф. $w_-(z)$) [4]. Отметим, что в факторизации (3) м.-ф. w_+, w_- единственны с точностью до постоянного унитарного множителя слева.

Обозначим через J_n множество целых внутренних в $\mathbb{C}_+$ м.-ф. порядка n [5]. Пусть оператор K вида (1) есть w -возмущение ранга n , a — экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$. Среди всех левых делителей [5] $\tilde{\theta}$ м.-ф. $e^{iaz}E_n$ класса J_n (E_n — единичная матрица) существуют такие, что для каждого $h \in \mathfrak{H}$

$$\mathcal{B}(z, h)w_+^{-1}(z)\tilde{\theta}(z) \in H_+^2(\mathbb{C}_-), \quad (4)$$

где $H_+^2(\mathbb{C}_n)$ — векторный класс Харди в $\mathbb{C}_+$, а м.-ф. w_+ взята из факторизации (3) веса w^2 , который вместе со строкой $\mathcal{B}(z, h)$ входит в определение w -возмущения. Доказывается, что среди всех м.-ф. $\tilde{\theta}$, для которых справедливо включение (4), существует единственная м.-ф. $\theta \in J_n$, удовлетворяющая следующим условиям: (i) θ есть левый делитель каждой м.-ф. $\tilde{\theta}$; (ii) включение (4) имеет место для $\tilde{\theta} = \theta$; (iii) $\theta(0) = E_n$.

Таким образом, каждому w -возмущению вида (1) отвечают два объекта: $w^2 \in \mathcal{M}_n$, $\theta \in J_n$.

2. Каждому оператору K отнесем целую м.-ф. $\Phi(z)$ с элементами

$$\Phi_{kj}(z) = \delta_{kj} - z((I - zB)^{-1}g_j, f_k), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Фредгольмов спектр оператора K совпадает с множеством корней целой функции $\Delta(z) = \det \Phi(z)$.

Предположим теперь, что K есть w -возмущение оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$, которому отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n$, $\theta \in J_n$. При любом $\epsilon > 0$ вес $w_+^*(x + i\epsilon)w_+(x + i\epsilon)$, где w_+ входит в факторизацию (3), также принадлежит классу $\mathcal{M}_n$. Поэтому для него имеет место факторизация (3), т. е.

$$w_+^*(x + i\epsilon)w_+(x + i\epsilon) = {}^\epsilon w_-^*(x - i0){}^\epsilon w_-(x - i0), \quad x \in \mathbb{R},$$

где ${}^\epsilon w_-(z)$ — внешняя м.-ф. в $\mathbb{C}_-$. Доказывается также, что имеет место представление

$$\Phi(z + i\epsilon){}^\epsilon w_-^{-1}(z) = W_-(z)V_-(z), \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

где W_- — внешняя м.-ф., а V_- — внутренняя м.-ф. в области $\mathbb{C}_-$.

Обозначим через Λ фредгольмов спектр оператора K (множество нулей функции Δ). Для упрощения формулировок в дальнейшем предполагается, что справедливы равенства

$$\text{rank } \Phi(\lambda_k) = n - 1, \quad \lambda_k \in \Lambda. \quad (5)$$

Через c_k , d_k обозначим векторы из $\mathbb{C}^n$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Phi(\lambda_k)c_k = 0, \quad \Phi^*(\lambda_k)d_k = 0, \quad \lambda_k \in \Lambda.$$

Теорема 1. Пусть K — произвольное w -возмущение ранга n оператора $B \in \Omega^{(\text{exp})}$, для которого выполняются равенства (5), причем все полюсы $\lambda_k \in \Lambda$ м.-ф. $\Phi^{-1}(z)$ простые. Пусть также этому оператору отвечает пара $w^2 \in \mathcal{M}_n$, $\theta \in J_n$. Если при некотором $\epsilon > 0$ выполняются условия

(i) вес $W_\epsilon^2(x) := \Phi(x + i\epsilon)(w_+^*(x + i\epsilon)w_+(x + i\epsilon))^{-1}\Phi^*(x + i\epsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу $\mathcal{M}_n$;

(ii) $\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = i \text{Sp}(\theta'(0))$, $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = 0$;

(iii) последовательность Λ вещественная и

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda} |(\Phi'(\lambda_k)c_k, d_k)| (||^\epsilon w_-(\lambda_k - i\epsilon)c_k|| ||W_-^*(\lambda_k - i\epsilon)d_k||)^{-1} > 0,$$

то оператор K подобен самосопряженному оператору.

Обратно, если $\text{Ker } K = \{0\}$ и при некотором $\delta > 0$ м.ф. $e^{-i\delta z}\theta(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$, то в случае подобия K самосопряженному оператору условия (i)–(iii) выполняются при любом $\epsilon > 0$.

Отметим, что в условии (iii) фигурирует стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Напомним, что вещественная последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ называется отделимой, если $\inf_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j| > 0$. Если последовательность Λ отделима, то условие (iii) теоремы 1 выполняется. В случае выполнения условия (iii) Λ представима в виде объединения не более чем n отделимых подпоследовательностей.

Мы предполагаем, что условие «оператор K вида (1) есть w -возмущение ранга n » является необходимым для подобия K самосопряженному оператору. В нескольких частных случаях эта гипотеза нашла свое подтверждение. В частности, если $n = 1$, то из подобия самосопряженному оператору следует, что K есть w -возмущение ранга 1. Этот факт доказывается в следующей ниже теореме 2. Итак, рассмотрим произвольный оператор K вида

$$Kh = Bh + (h, f)g, \quad h \in \mathfrak{H}, \quad B \in \Omega^{(\text{exp})}. \quad (6)$$

Как и раньше, через Λ обозначается множество корней целой функции $\Phi(z) = 1 - z((I - zB)^{-1}g, f)$, a — экспоненциальный тип резольвенты $(I - zB)^{-1}$, $G(z) := (I - zB)^{-1}g$.

Теорема 2. Пусть K — произвольный оператор вида (6). Для того чтобы K был подобен самосопряженному оператору, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (i) вес $\|G(x)\|^2$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит классу $\mathcal{M}_1$;
- (ii) оператор K есть w -возмущение ранга 1 с весом $w^2(x) := \|G(x)\|^2$, $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) вес $W_\epsilon^2(x) := |w_+(x + i\epsilon)|^{-2} |\Phi(x + i\epsilon)|^2$ принадлежит $\mathcal{M}_1$ при некотором $\epsilon > 0$;
- (iv) $\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = a$, $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = 0$;
- (v) корни функции Φ вещественные, простые и образуют отделимую последовательность.

В этой формулировке $w_+(z)$ — внешняя в $\mathbb{C}_+$ функция, такая, что $\|G(x)\|^2 \doteq |w_+(x + i0)|^2$, $x \in \mathbb{R}$ (факторизация (3)). Кроме того, если K есть w -возмущение ранга 1 оператора B , то ему отвечает внутренняя функция $\theta(z) = e^{iaz}$. Этим объясняется первое равенство условия (iv).

3. Рассмотрим оператор K вида

$$(Kh)(t) = i \int_0^t h(s) ds + (h, f)g, \quad h \in L_2(0, a), \quad (7)$$

где f, g — произвольные функции из $L_2(0, a)$. Несмотря на кажущуюся простоту формулы (7), есть ряд общеизвестных вопросов об этом операторе, на которые до сих пор нет ответа. Здесь мы рассмотрим вопрос о подобии оператора K самосопряженному оператору. Обозначим через J оператор интегрирования

в формуле (7) и заметим, что $J \notin \Omega^{(\text{exp})}$. Мы сознательно остановились на таком выборе оператора K , поскольку, когда речь идет об одномерном возмущении интегрирования, обычно имеют в виду формулу (7). Так как $-J \in \Omega^{(\text{exp})}$, то все предыдущие результаты можно приспособить для решения поставленной задачи. Из теоремы 2 вытекает, что необходимо дать формулировку ее условий (i)–(ii) только в терминах функции g из формулы (7).

Рассмотрим множество функций вида

$$v(z) = s(z)w_-(z), \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (8)$$

где w_- — внешние в $\mathbb{C}_-$ функции, для которых веса $|w_-(x - i0)|^2$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежат $\mathcal{M}_1$, а s — внутренние функции, такие, что

$$\inf_{z \in \mathbb{C}_-} \{|s(z)| + \exp(\text{Im } za)\} > 0,$$

где число a входит в формулу (7). Нетрудно доказать, что каждая функция v допускает представление

$$v(z) = z \int_0^\infty e^{-izt} g(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (9)$$

где $g \in L_2(0, b)$ при любом $b > 0$. Обозначим через $\mathcal{W}_a$ множество сужений на интервал $[0, a]$ функций g , которые определяются формулами (8), (9). В следующей теореме функция Φ имеет прежний смысл, т. е. $\Phi(z) = 1 - z((I - zJ)^{-1}g, f)$.

Теорема 3. Пусть K — произвольный оператор вида (7) в пространстве $L_2(0, a)$. Оператор K подобен некоторому самосопряженному оператору тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (i) $g \in \mathcal{W}_a$;
- (ii) при некотором $\epsilon > 0$ вес $v_\epsilon^2(x) := |w_-(x - i\epsilon)|^2 |\Phi(x - i\epsilon)|^2$ принадлежит классу $\mathcal{M}_1$, где w_- входит в формулу (8);
- (iii) $\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = 0$, $\limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\det \Phi(iy)| = a$;
- (iv) корни функции Φ вещественные, простые и образуют отделяемую последовательность.

Следствие. Если оператор K вида (7) подобен самосопряженному, то функция $f(a - t)$ также принадлежит классу $\mathcal{W}_a$.

Сформулируем теперь некоторые утверждения, которые выводятся из теоремы 3.

Предложение 1. Оператор K вида (7) с $f = \alpha g$, $\text{Im } \alpha \geq 0$, при любой функции $g \in L_2(0, a)$ не подобен самосопряженному оператору.

Из теоремы 3 следует, что надо ограничиться случаем $g \in \mathcal{W}_a$. Интересно, что в этом случае условие (ii) выполняется, однако условие (iv) теоремы 3 никогда не имеет места.

Поскольку внешняя в $\mathbb{C}_-$ функция $w_-(z) := z^{1-\alpha}$, $1/2 < \alpha < 3/2$, допускает представление (9) с $g(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1}$, то $\Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1} \in \mathcal{W}_a$ при любом $a > 0$.

Рассмотрим теперь множество функций f вида

$$f(t) = \frac{i}{2} + F(\pi - t) - \overline{F(t - \pi)} + i \frac{d}{dt} \int_\pi^\pi F(u - t) \overline{F(u)} du, \quad (10)$$

где F — произвольная 2π -периодическая функция, такая, что $F \in L_2(-\pi, \pi)$. Введем обозначение

$$c_n := \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 2. Пусть K — оператор вида (7) в пространстве $L_2(0, 2\pi)$, $g(t) \equiv 1$. Пусть f задается формулой (10), причем коэффициенты c_n удовлетворяют условиям (i) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^4 < \infty$; (ii) существуют числа m_1, m_2 , такие, что $0 < m_1 < |1 + (-1)^n n c_n| < m_2, n \in \mathbb{Z}$. Тогда оператор K с указанными f, g подобен самосопряженному оператору.

Предложение 3. Пусть в формуле (7)

$$f(t) = \frac{i}{2} \Gamma^{-1}(2 - \alpha)(2\pi - t)^{1-\alpha} - \Gamma^{-1}(2 - \alpha) \int_t^{2\pi} (s - t)^{2-\alpha} F(s - \pi) e^{-is/2} ds, \\ 1 < \alpha < 3/2,$$

где F — произвольная интегрируемая по Риману нечетная функция на сегменте $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{\pi} |F(s)| ds \leq 1, \quad \int_0^{\pi} F(s) \sin \frac{s}{2} ds = 0.$$

Тогда оператор K , задаваемый формулой (7) в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ с $g(t) = \Gamma^{-1}(\alpha)t^{\alpha-1}, 1 < \alpha < 3/2$, подобен самосопряженному оператору.

Проблеме подобия самосопряженному оператору посвящено много работ, которые можно разбить на две группы. Первая группа ([6]–[8]) основана на теории характеристических функций несамосопряженных операторов, а во второй группе ([9]–[18]) применяется критерий подобия Ван Кастерена–Набоко ([9], [10]). Это деление весьма условно, поскольку в некоторых из упомянутых работ используются оба подхода. В перечисленных статьях, кроме общих теорем, доказан ряд интересных критериев подобия самосопряженному оператору конкретных операторов (несамосопряженной модели Фридрихса, треугольной модели Лившица и др.), ранг мнимой части которых конечен. Отметим, что оператор K вида (7) также имеет конечномерную мнимую часть. В заметке излагается наш подход к проблеме подобия, который основан на понятии w -возмущения вольтеррова оператора и использует теорию весов Макенхаупта.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, Функц. анализ и его прил., **42:3** (2008), 85–89. [2] Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин, Изв. РАН, сер. матем., **75:2** (2011), 69–126. [3] Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, Функц. анализ и его прил., **45:2** (2011), 86–91. [4] S. Treil, A. Volberg, J. Funct. Anal., **143:2** (1997), 269–308. [5] М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Наука, М., 1969. [6] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Acta Sci. Math., **26:2** (1965), 79–91. [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Функц. анализ и его прил., **1:1** (1967), 38–60. [8] Л. А. Сахнович, Труды ММО, **19** (1968), 211–270. [9] J. A. van Casteren, Pacific J. Math., **104:1** (1983), 241–255. [10] С. Н. Набоко, Функц. анализ и его прил., **18:1** (1984), 16–27. [11] М. М. Маламуд, Укр. матем. журн., **37:1** (1985), 49–56. [12] М. М. Маламуд, Зап. научн. сем. ПОМИ, **270** (2000), 201–241. [13] С. Н. Набоко, М. М. Фаддеев, Вестник Ленингр. ун-та, сер.

4, физ. хим., 1990, № 4, 78–82. [14] М. М. Фаддеев, Функц. анализ и его прил., **26**:4 (1992), 80–83. [15] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, Зап. научн. сем. ПОМИ, **270** (2000), 336–349. [16] А. В. Киселев, М. М. Фаддеев, Функц. анализ и его прил., **34**:2 (2000), 78–81. [17] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, Матем. заметки, **72**:2 (2002), 292–302. [18] А. С. Костенко, Матем. заметки, **78**:1 (2005), 147–151.

Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo, Mexico
e-mail: anauaeh@yahoo.com

Поступило в редакцию
15 июля 2013 г.

УДК 517.987.5

О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы*

© 2014. П. Б. Затицкий

На протяжении работы все встречающиеся пространства с мерой будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега–Рохлина). Основной интерес для нас будут представлять пространства с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т. е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Говоря о вероятностном пространстве, мы позволим себе опускать обозначение сигма-алгебры.

1. Определение и свойства масштабирующей энтропийной последовательности. Напомним определение допустимой полуметрики и ее ε -энтропии (см., например, работы [11], [12]):

Определение 1. Полуметрику ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) назовем *измеримой*, если она измерима на (X^2, μ^2) как функция двух переменных, и *допустимой*, если она сепарабельна на некотором подмножестве $X_1 \subset X$ полной меры. В этих случаях тройку (X, μ, ρ) мы будем называть *полуметрической* и *допустимой полуметрической* соответственно.

Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову.

Определение 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ ε -энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки (X, μ, ρ) определяется по следующему правилу. Рассмотрим наименьшее натуральное k , для которого пространство X можно представить в виде объединения множеств $X_0, X_1, \dots, X_k$, таких, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и при $j = 1, \dots, k$ диаметр множества X_j в полуметрике ρ меньше ε . Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log_2 k.$$

Если такого k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$. В то же время ε -энтропией называют и функцию $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$

Напомним, что измеримая полуметрика ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) допустима тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ (подробности см. в работе [12]).

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026), ОАО «Газпром нефть», гранта СПбГУ 6.38.223.2014, грантов РФФИ 13-01-12422 офи_m2 и 14-01-00373_A, гранта Президента РФ МК-6133.2013.1.