Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Соотношения из теории Морса для диаграмм Кокстера–Дынкина, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 73–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:35:44

В работе [1] Б. М. Левитаном рассматривался случай локально суммируемого потенциала $q(x)$, т. е. потенциала, суммируемого по Лебегу на произвольном отрезке вещественной прямой. При этом фактически была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено равенство $|P_{(-\infty, \lambda]} f - P_{[0, \lambda]}^\circ f| = o(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ ¹, причем стремление к нулю равномерно внутри каждого конечного интервала вещественной прямой.*

Впоследствии В. А. Ильиным [7] рассматривался случай равномерно локально суммируемого потенциала и доказывались утверждения о равносходимости. В настоящей работе получена теорема, которая существенно улучшает один из его результатов.

ТЕОРЕМА 2. *Если $q \in L_{\text{loc}, \text{unif}}(\mathbb{R})$, то справедлива оценка $\|P_{[\lambda_0, \lambda]} - P_{[0, \lambda]}^\circ\|_{2, \infty} \lesssim \lambda^{-1/4}$.*

Обоснование этого утверждения может быть получено с помощью некоторой модификации доказательства аналогичной теоремы из работы [8]. Существенную роль при этом играет теорема 1 из первого раздела настоящей заметки.

В заключение, хочу выразить благодарность В. А. Ильину, Л. В. Крицкову и Е. И. Моисееву за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **19**, № 1, 33–58 (1955).
2. Eastham M. Bull. Lond. Math. Soc., **7**, 340–344 (1972).
3. Цикон Х., Фрезе Р., Курш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Мир, М., 1990.
4. Шенк Д., Шубин М. А. Функциональный анализ и его прил., **20**, вып. 1, 89–90 (1986).
5. Ильин В. А., Крицков Л. В. Дифференц. уравнения, **31**, № 8, 1323–1329 (1995).
6. Simon B. Proc. Amer. Math. Soc., **125**, No. 1, 203–208 (1997).
7. Ильин В. А. Дифференц. уравнения, **31**, № 12, 1957–1967 (1995).
8. Денисов С. А. Дифференц. уравнения, **34**, № 8, 1043–1048 (1998).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: saden@cs.msu.su

Поступило в редакцию
23 сентября 1998 г.

УДК 515.1

Соотношения из теории Морса для диаграмм Кокстера–Дынкина*

© 2000. Г. Г. Ильюта

Аналогии между различными понятиями и конструкциями могут стать источником новых математических утверждений и гипотез. Исходя из прямого соответствия между геометрией торического многообразия и комбинаторикой соответствующего этому многообразию веера, А. Г. Хованский объяснил известные соотношения для простых многогранников в терминах теории Морса [3]. В этой статье подобные соотношения сопоставлены любой диаграмме

¹Здесь $P_{[0, \lambda]}^\circ f$ — спектральное разложение для невозмущенного оператора, т. е. разложение в интеграл Фурье.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-98-01-00612 и INTAS-96-0713.

Кокстера–Дынкина (д.К.–Д.), в частности, с этой целью для д.К.–Д. определен аналог грани и f -вектора многогранника (аналогия, вообще говоря, формальна, т.е. д.К.–Д. и грани д.К.–Д. не отвечают какие-либо многогранники; два исключения указаны в следующем абзаце). Для f -векторов д.К.–Д. особенно формулируется гипотеза, аналогичная известным в теории простых многогранников утверждениям об аффинной оболочке f -векторов.

Назовем h -полиномом д.К.–Д. характеристический полином ее оператора Кокстера (оператора классической монодромии). В работе прослеживается аналогия между вычислением полинома Пуанкаре в теории Морса, h -полинома у А. Г. Хованского, h -полинома д.К.–Д. и полинома Александера узла. Два частных случая этого списка (допуская некоторую неточность, можно сказать, что эти частные случаи отвечают полиномам $(1+t)^n$ и $1+t+\dots+t^{n-1}+t^n$ соответственно) представлены в следующей таблице:

торическое многообразие	простой многогранник	диаграмма Кокстера–Дынкина	узел
$(\mathbb{P}^1)^n$	n -куб	nA_1	$n(2, 2)$
$\mathbb{P}^n$	n -симплекс	A_n	$(2, n+1)$

Через (p, q) обозначается торический узел, рассматриваемый как узел особенности $x^p + y^q$, т.е. он получается в малой сфере с центром в 0 при ее пересечении с линией уровня $x^p + y^q = 0$ (если p, q не взаимно просты, то имеется несколько компонент, т.е. зацепление); через $n(2, 2)$ обозначено несвязное объединение n двухкомпонентных зацеплений $(2, 2)$. Любая д.К.–Д. A_n по определению отвечает некоторому базису в системе корней A_n . Известно (см., например, [7]), что базисы в системе корней A_n взаимно однозначно соответствуют порождающим подмножествам из n транспозиций в симметрической группе S_{n+1} , которые, в свою очередь, взаимно однозначно соответствуют $(n+1)$ -деревьям с пронумерованными вершинами. Можно рассматривать $(n+1)$ -дерево как склейку n 2-деревьев, т.е. n ребер, или же как склейку д.К.–Д. A_n из n д.К.–Д. A_1 . Сопоставляя вершинам каждого из n ребер однородные координаты x, y на проективной прямой и отождествляя координаты, попадающие после склейки в одну вершину дерева, получим на $(n+1)$ -дереве $n+1$ независимых однородных координат, т.е. придем к проективному пространству $\mathbb{P}^n$. Было бы интересно получить аналогичные описания для перехода от куба к симплексу (по-видимому, нужно рассматривать камеры Вейля) и от $n(2, 2)$ к $(2, n+1)$.

Согласно результатам Н. А'Кампо ($k=2$) и П. Делиня ($k>2$) [4], в h -полиноме д.К.–Д. особенности функции, принадлежащей k -й степени максимального идеала, известны первые k коэффициентов, а именно, поскольку след i -й степени, $0 < i < k$, оператора Кокстера равен $(-1)^m$ (m — число переменных функции), из формул Ньютона, связывающих элементарные симметрические функции и степенные суммы, следует, что

$$h_1 = (-1)^m, \quad h_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^m), \quad 1 < i < k. \quad (1)$$

Известно [1], что для любой д.К.–Д.

$$h_i = h_{n-i}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2)$$

где n — число вершин в д.К.–Д. Следующая гипотеза является аналогом известных в теории выпуклых многогранников фактов: аффинная оболочка f -векторов всех многогранников данной размерности совпадает с гиперплоскостью,

задаваемой эйлеровой характеристикой; аффинная оболочка f -векторов простых многогранников выделяется в этой гиперплоскости соотношениями Дэна–Соммервиля.

ГИПОТЕЗА. Для д.К.–Д. особенностей функций из k -й степени максимального идеала все аффинные соотношения между коэффициентами f - и h -полиномов д.К.–Д. являются следствиями соотношений А'Кампо–Делиня (1) и Дэна–Соммервиля (2).

В теории выпуклых многогранников и симплициальных комплексов известны также полные характеристики f - и h -векторов различных классов объектов [6]. Интересно было бы получить аналогичные факты для д.К.–Д. особенностей.

В разд. 2 доказывается аналог формулы, выражающей коэффициенты h -полинома через коэффициенты f -полинома (определение f -полинома д.К.–Д. см. в разд. 2). Частный случай этой формулы (для коэффициента при первой степени) использовался в [2] для доказательства следующего факта: если д.К.–Д. особенности не является одной из стандартных д.К.–Д. A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , то в ней существует ребро отрицательного веса. Это следует из доказанного в [2] более общего факта, который на языке этой статьи формулируется так: при тех же условиях в д.К.–Д. особенности существует грань отрицательного веса, индекс Морса которой равен 1.

В разд. 3 прослеживается аналогия между вычислением полинома Пуанкаре в теории Морса и классическим вычислением полинома Александера узла по его проекции на плоскость [5].

1. Формула для h -полинома в терминах теории Морса [3]. Пусть f_i — число i -граней многогранника, $f(t) = \sum f_i t^i$ есть f -полином этого многогранника, $f(t-1) = h(t)$ — его h -полином, α — не постоянная ни на каком ребре линейная функция на этом многограннике. Индексом вершины называется число выходящих из нее ребер, на которых α убывает. Через h_i обозначим число вершин индекса i . В [3] доказано, что $h(t) = \sum h_i t^i$. Мы будем обобщать на д.К.–Д. двухиндексную последовательность f_k^i , перечисляющую k -границ индекса i (индексом грани назовем индекс той ее вершины, на которой α достигает максимума). Из [3] вытекает, что

$$f_k^i = C_i^k h_i, \quad f_k = \sum_i C_i^k h_i = \sum_i f_k^i,$$

$$h_k = \sum_i (-1)^{i-k} C_i^k f_i = \sum_i \sum_j (-1)^{i-k} C_i^k f_i^j.$$

Аналог последней формулы для любой д.К.–Д. будет доказан в разд. 2.

2. Грани и f -полином д.К.–Д. Под д.К.–Д. будем понимать граф с n пронумерованными вершинами и весами на ребрах — ненулевыми элементами некоторого кольца. Формой Зейферта S д.К.–Д. назовем верхнетреугольную матрицу с -1 на диагонали и элементами a_{ij} , $i < j$, выше диагонали, равными весу ребра, соединяющего вершины i и j , или 0 , если ребра нет. Оператор $C = -S^{-1}S^t$ назовем оператором Кокстера д.К.–Д. Характеристический полином оператора C назовем h -полиномом д.К.–Д. Он является возвратным полиномом, поскольку

$$\det S \det(-S^{-1}S^t - tE) = \det(-S^t - tS) = \det(-tS^t - S). \quad (3)$$

Гранью д.К.–Д. назовем любой набор непересекающихся ориентированных циклов длины > 1 в диаграмме (цикл длины 2 представляет собой проход по ребру и обратно). Размерностью грани назовем число вершин в ней. Каждому ориентированному циклу диаграммы отвечает перестановка — цикл, полученный выписыванием номеров вершин при положительном обходе. Тем самым каждая грань F определяет перестановку π_F и, очевидно, определяется этой перестановкой. Отметим, что $\pi_F(i) = i$ для $i \notin F$ и эти равенства являются аналогом уравнений грани; число их, как обычно, равно коразмерности грани. Индексом грани F назовем число тех i , для которых $\pi_F(i) < i$. Перестановка π_F является аналогом функции Морса — она убывает в $\text{ind } F$ направлениях и возрастает в $\dim F - \text{ind } F$ направлениях. Переход $\pi_F \rightarrow \pi_F^{-1}$, отвечающий смене ориентации во всех циклах грани, соответствует для функции Морса f переходу $f \rightarrow -f$ и приводит к доказательству возвратности h -полинома д.К.–Д. — аналогу двойственности Пуанкаре.

Весом цикла в д.К.–Д. назовем произведение весов входящих в него ребер (в частности, весом 2-цикла будет квадрат веса соответствующего ребра). Весом грани F назовем произведение весов входящих в нее циклов и знака перестановки π_F . Компоненту f -вектора д.К.–Д. f_i^j определим как сумму весов граней размерности i и индекса j . Положим $f_0^0 = 1$; очевидно, что $f_m^0 = 0$, $m > 0$.

ТЕОРЕМА. Коэффициенты h -полинома любой д. К.–Д. с n вершинами вычисляются по формуле

$$h_k = \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} C_{n-m}^l f_m^{k-l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартное разложение среднего определителя в (3) в сумму по перестановкам. Представляя перестановку как произведение циклов, мы видим, что ненулевые слагаемые в этой сумме отвечают граням F диаграммы и равны произведению веса грани F на $(-1)^{\dim F} t^{\text{ind } F} (1+t)^{\text{codim } F}$. Остается разложить $(1+t)^{\text{codim } F}$ по степеням t и собрать слагаемые с одинаковыми степенями.

ПРИМЕР. Пусть д.К.–Д. Γ является деревом и все веса на ребрах равны 1. Любая грань представляет собой набор циклов длины 2. Поэтому $f_i^j = 0$, если $2j \neq i$, и $f_{2j}^j = (-1)^j p_j(\Gamma)$, где $p_j(\Gamma)$ — число способов выбрать в Γ j ребер без общих вершин. Приведем числа $p_j(\Gamma)$ для стандартных д.К.–Д. A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 :

$$p_j(A_n) = C_{n-j}^j, \quad p_j(D_n) = \frac{n-1}{j} C_{n-j-2}^{j-1}, \quad p_j(E_n) = \frac{n-2}{j} C_{n-j-2}^{j-1} + C_{n-j-1}^{j-1}.$$

Эти формулы доказываются по индукции с помощью очевидного рекуррентного соотношения: если в некотором графе Γ вершина e_1 соединена ребром только с вершиной e_2 , то

$$p_j(\Gamma) = p_j(\Gamma - \{e_1\}) + p_{j-1}(\Gamma - \{e_1, e_2\}).$$

3. Полином Александера. Полином Александера вычисляется по матрице Зейферта узла практически так же, как и h -полином д.К.–Д. в разд. 2. Мы введем формализм теории Морса для несколько другого, принадлежащего самому Александру [5], способа вычисления этого полинома.

Рассмотрим невырожденную проекцию ориентированного узла на плоскость. Пронумеруем n двойных точек проекции и $n + 2$ областей (связные компоненты дополнения). Определим $n \times (n + 2)$ -матрицу, строки которой отвечают вершинам, а столбцы — областям. Элемент этой матрицы, отвечающий паре вершина–область, не равен нулю, только если область примыкает к вершине. Назовем этот элемент весом вершины в области и определим его по правилу

$$\begin{array}{c} \swarrow -1 \nearrow \\ t \quad \quad 1 \\ \nwarrow -t \searrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} \swarrow t \nearrow \\ -t \quad \quad -1 \\ \nwarrow 1 \searrow \end{array}$$

Результат Александра состоит в том, что $n \times n$ -минор этой матрицы, полученный вычеркиванием любой пары столбцов, отвечающих соседним областям, с точностью до множителя $\pm t^m$ не зависит от вычеркнутой пары столбцов и является инвариантом узла.

Фиксируем пару соседних областей (будем считать, что они имеют номера $n + 1$ и $n + 2$) и назовем оставшиеся области допустимыми. Определим «критическую точку функции Морса» как выбор в каждой вершине одной из примыкающих к ней допустимых областей, причем каждая допустимая область должна быть выбрана. Весом «критической точки» назовем произведение весов всех вершин в выбранных областях и знака перестановки, сопоставляющей номеру каждой вершины номер выбранной в этой вершине области. Определим индекс «критической точки» как число вершин, для которых вес выбранной области равен $\pm t$. Тогда из формулы стандартного разложения минора в сумму по перестановкам, очевидно, следует, что каждый коэффициент полинома Александра равен сумме весов всех «критических точек» соответствующего индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Наука, М., 1984.
2. Ильюта Г. Г. УМН, **42**, вып. 2, 227–228 (1987).
3. Хованский А. Г. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 1, 50–61 (1986).
4. A'Campo N. Comm. Math. Helv., **50**, No. 2, 233–248 (1975).
5. Alexander J. W. Trans. Amer. Math. Soc., **30**, 275–306 (1928).
6. Hibi T. Sugaku Expositions, **8**, No. 2, 145–163 (1995).
7. Solomon L. J. Algebra, **168**, 521–524 (1994).

Независимый московский университет

Поступило в редакцию
15 декабря 1998 г.

УДК 517.432

Об элементах нестационарной теории рассеяния для одного класса дифференциально-операторных уравнений*

© 2000. С. А. Кужель

1. Введение. Принципиальным моментом в развитии нестационарной теории рассеяния для дифференциально-операторного уравнения

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

*Эта работа частично поддержана CRDF, грант UM1-2090.