Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 88–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:13:43

Пример. Индексы примыканий моноособности типа D_6^- в образе устойчивого лагранжева отображения даются следующей таблицей:

X	A_1^2	A_1^4	A_1^6	$A_2 A_1^2$	$A_2 A_1^4$	$A_2^2 A_1^2$	$A_3^+ A_1$	$A_3^- A_1$	$A_3^+ A_1^3$	$A_3^- A_1^3$
$J_X(D_6^-)$	0	0	3	2	16	17	2	2	8	8
$A_3^+ A_2 A_1$	$A_3^- A_2 A_1$	$(A_3^+)^2$	$A_3^+ A_3^-$	$(A_3^-)^2$	$A_4 A_1^2$	$A_5^+ A_1$	$A_5^- A_1$	D_4^-		
11	11	1	2	1	6	2	2	1		
$D_4^+ A_1^2$	$D_4^- A_1^2$	$D_4^- A_2$	$D_5^+ A_1$	$D_5^- A_1$						
1	2	2	1	1						

Все примыкания лагранжевой моноособности типа D_6^- , кроме примыканий к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$, являются простыми. Примыкания к мультиособностям типов A_1^2 , A_1^4 , $A_2 A_1^2$ являются сложными. А именно, многообразие $\Xi_{A_1^2}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно окружности, $\Xi_{A_1^4}(D_6^-)$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению двух окружностей, $\Xi_{A_2 A_1^2}(D_6^-)$ имеет четыре связные компоненты, две из которых стягиваемы, а две гомотопически эквивалентны окружности.

Замечание. Автору неизвестны аналоги теорем 3–5 для лагранжевых особенностей типов $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . Это — предмет будущих исследований.

Автор благодарен М. Э. Казаряну за полезные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
 [2] В. А. Васильев, *Лагранжевы и лежандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000. [3] В. Д. Седых, Матем. заметки, **78**:3 (2005), 413–427. [4] В. Д. Седых, Функц. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 88–91. [5] В. Д. Седых, Изв. РАН, сер. матем., **76**:2 (2012), 171–214. [6] Ю. С. Численко, Функц. анализ и его прил., **22**:4 (1988), 52–67. [7] C. McCrory, A. Parusiński, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **30**:4 (1997), 527–552. [8] V. D. Sedykh, Mosc. Math. J., **11**:3 (2011), 583–598.

Российский государственный университет
 нефти и газа им. И. М. Губкина
 email: vdsedykh@gmail.com

Поступило в редакцию
 26 октября 2012 г.

УДК 517.956.2

Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*

© 2014. Т. А. Суслина

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Укажем книги [1], [2] по теории усреднений.

1. Класс операторов в $\mathbb{R}^d$. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω — элементарная ячейка этой решетки. Используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, для

*Работа выполнена при поддержке грантов СПбГУ №11.38.63.2012 и РФФИ №14-01-00760.

всякой Γ -периодической функции. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматриваются матричные эллиптические ДО второго порядка вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (1)$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — это Γ -периодическая эрмитова матрица-функция размера $m \times m$, ограниченная и равномерно положительно определенная; $b(\mathbf{D})$ есть $(m \times n)$ -матричный ДО вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные матрицы. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geq n$ и

$$\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (2)$$

Это равносильно выполнению неравенств $\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n$ при $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ с некоторыми $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. Строгое определение оператора A_ε дается через квадратичную форму $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Задачи усреднения для операторов (1) изучались в [3], [4], где был предложен теоретико-операторный подход. Выяснено, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента оператора A_ε сходится к резольвенте эффективного оператора A^0 по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

2. Эффективный оператор. Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ есть $(n \times m)$ -матрица-функция, являющаяся (слабым) Γ -периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

(Отметим, что Λ принадлежит $H_{\text{per}}^1(\Omega)$, но в общем случае может не быть ограниченной.) Эффективная матрица g^0 размера $m \times m$ определена выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{где } \tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m).$$

Оказывается, что матрица g^0 положительно. Оператор $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ с областью определения $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ называется эффективным оператором.

3. Результаты в $\mathbb{R}^d$. Положим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ является регулярной как для A_ε , так и для A^0 . Положим $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, и введем обозначение

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin \varphi|^{-1}, & \varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Ясно, что величина $c(\varphi)$ обратна к расстоянию от точки $e^{i\varphi}$ до $\mathbb{R}_+$. Положим $R(\varepsilon; \zeta) := (A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$, $R^0(\zeta) := (A^0 - \zeta I)^{-1}$.

Теорема 1. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|R(\varepsilon; \zeta) - R^0(\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}. \quad (3)$$

Для аппроксимации резольвенты по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме необходимо учитывать корректор $K(\varepsilon; \zeta) := \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) R^0(\zeta)$. В общем случае он включает вспомогательный сглаживающий оператор по Стеклову S_ε , определенный равенством $(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z}$, $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. Как проверено в [9],

оператор $K(\varepsilon; \zeta)$ непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При дополнительном предположении $\Lambda \in L_\infty$ можно использовать обычный корректор $K^0(\varepsilon; \zeta) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})R^0(\zeta)$, который в этом случае является ограниченным оператором из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (см. [4]). Следующая теорема дает $(L_2 \rightarrow H^1)$ -аппроксимацию резольвенты, а также $(L_2 \rightarrow L_2)$ -аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})R(\varepsilon; \zeta)$.

Теорема 2. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

1°. При $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|R(\varepsilon; \zeta) - R^0(\zeta) - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq (C_2 + C_3|\zeta|^{-1/2})c(\varphi)^2\varepsilon, \quad (4)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})R(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})R^0(\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\varphi)^2\varepsilon. \quad (5)$$

2°. Пусть $\Lambda \in L_\infty$. При $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|R(\varepsilon; \zeta) - R^0(\zeta) - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq (\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3|\zeta|^{-1/2})c(\varphi)^2\varepsilon, \quad (6)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})R(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})R^0(\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{C}_4 c(\varphi)^2\varepsilon. \quad (7)$$

Замечание 3. Постоянные C_j из неравенств (3)–(5) зависят лишь от d , m , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0 , α_1 и параметров решетки Γ , а постоянные $\tilde{C}_j$ из неравенств (6), (7) зависят от тех же величин и еще от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

В фиксированной точке $\zeta = -1$ оценка (3) была доказана в [3], а оценки (4)–(7) были установлены в [4], но с другим сглаживающим оператором вместо S_ε ; в [9] было выяснено, что можно перейти к сглаживателю S_ε . Отсюда несложно вывести теоремы 1 и 2 за счет применения подходящих тождеств для резольвент, а затем масштабного преобразования. Поясним это на примере теоремы 1. Стартуя с оценки (3) с $\zeta = -1$ и используя тождество

$$R(\varepsilon; \zeta) - R^0(\zeta) = (A_\varepsilon + I)R(\varepsilon; \zeta) (R(\varepsilon; -1) - R^0(-1)) (A^0 + I)R^0(\zeta), \quad (8)$$

сначала получаем (3) в точке $\hat{\zeta} = e^{i\varphi}$. А затем выводим (3) при произвольном $\zeta = |\zeta|\hat{\zeta}$ масштабным преобразованием.

По существу, теоремы 1 и 2 дают дупараметрические оценки (параметры ε и $|\zeta|$), равномерные относительно φ в области $\{\zeta : \varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]\}$ со сколь угодно малым φ_0 .

4. Задачи в ограниченной области. Аналоги «операторных оценок погрешности» вида (3)–(7) в фиксированной точке ζ известны и для эллиптических операторов в ограниченной области (см. [5]–[12]). Для операторов вида (1) такие результаты получены в недавних работах [8]–[12]. При этом в $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме оценка погрешности имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, а в $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме погрешность имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ (это происходит из-за влияния границы).

Наша цель — установить аналоги теорем 1 и 2 для эллиптических операторов в ограниченной области. В первую очередь нас интересуют оценки при большом $|\zeta|$. В отличие от случая $\mathbb{R}^d$ не удастся получить искомые оценки, исходя из «готовых» оценок в фиксированной точке. Точнее, некоторые оценки вывести можно (см. теорему 7 ниже), используя тождества для резольвент, но «правильной» зависимости констант в оценках от ζ (при большом $|\zeta|$) на этом пути не получить. Причина: не работает прием с масштабным преобразованием.

5. Основные результаты для операторов в ограниченной области.

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением (1) с краевым условием Дирихле. Строгое определение: $A_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор, порожденный замкнутой и положительно определенной квадратичной формой $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Здесь $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ по норме пространства $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Эффективный оператор A_D^0 задается выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

При рассмотрении оператора с условием Неймана наложим дополнительное условие (более сильное, чем (2)) на символ $b(\boldsymbol{\xi})$:

$$\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \quad (9)$$

Как показано в [13], условие (9) необходимо и достаточно для коэрцитивности формы $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2$: существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$, такие, что

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + c_2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \geq c_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (10)$$

Тогда форма $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ обозначим через $A_{N,\varepsilon}$. Формально он задан дифференциальным выражением (1) с краевым условием Неймана. Эффективный оператор A_N^0 задается выражением $A_N^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на функциях из $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, удовлетворяющих условию $\partial_\nu^0 \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (здесь $\partial_\nu^0 \mathbf{u}$ означает кономальную производную, отвечающую оператору $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$).

Ниже, если речь идет об операторе с условием Дирихле, предполагается выполненным условие (2), а в случае оператора с условием Неймана предполагается выполненным (9). Чтобы избежать дублирования, используем значок $b = D, N$.

Операторы $A_{D,\varepsilon}$ и A_D^0 положительно определены, операторы $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 неотрицательны, а потому точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ регулярна для всех этих операторов. Положим $R_b(\varepsilon; \zeta) = (A_{b,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$, $R_b^0(\zeta) = (A_b^0 - \zeta I)^{-1}$. Наибольший интерес представляют оценки при $|\zeta| \geq 1$.

Теорема 4. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geq 1$. Найдется число ε_0 (зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ), такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_1^b c(\varphi)^5 (\varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2), \quad b = D, N. \quad (11)$$

Перейдем к аппроксимации резольвенты по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения $P_\mathcal{O}: H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Требуется, чтобы $P_\mathcal{O}$ одновременно был непрерывным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и из $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Такой оператор существует (см., например, [14]). Через $Q_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Введем корректор $K_b(\varepsilon; \zeta) = Q_\mathcal{O} \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} R_b^0(\zeta)$. Согласно [9], [12], оператор $K_b(\varepsilon; \zeta)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При дополнительном условии $\Lambda \in L_\infty$ можно использовать обычный корректор $K_b^0(\varepsilon; \zeta) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b^0(\zeta)$, который в этом случае является непрерывным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ (см. [9], [12]).

Теорема 5. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geq 1$. Найдется число ε_0 (зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ), такое, что при $\mathfrak{b} = D, N$ справедливы следующие утверждения.

1°. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы оценки

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta) - \varepsilon K_b(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_2^b c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_3^b c(\varphi)^4 \varepsilon, \quad (12)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_4^b c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \mathcal{C}_5^b c(\varphi)^4 \varepsilon. \quad (13)$$

2°. Пусть $\Lambda \in L_\infty$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы оценки

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta) - \varepsilon K_b^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}_2^b c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \tilde{\mathcal{C}}_3^b c(\varphi)^4 \varepsilon, \quad (14)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}_4^b c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \tilde{\mathcal{C}}_5^b c(\varphi)^4 \varepsilon. \quad (15)$$

Замечание 6. 1. Постоянные $\mathcal{C}_j^D$ из неравенств (11)–(13) ($\mathfrak{b} = D$) зависят только от $d, m, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$, а постоянные $\tilde{\mathcal{C}}_j^D$ из неравенств (14), (15) ($\mathfrak{b} = D$) зависят от тех же величин и еще от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

2. Постоянные $\mathcal{C}_j^N$ из неравенств (11)–(13) ($\mathfrak{b} = N$) зависят от $d, m, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$, от параметров решетки Γ , от области $\mathcal{O}$, а также от постоянных c_1, c_2 из неравенства (10). Постоянные $\tilde{\mathcal{C}}_j^N$ из неравенств (14), (15) ($\mathfrak{b} = N$) зависят от перечисленных величин и еще от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Теоремы 4 и 5 дают двухпараметрические оценки по ε и $|\zeta|$, равномерные относительно φ в области $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \geq 1, \varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]\}$ со сколь угодно малым φ_0 .

6. Для полноты изложения приведем еще один результат, в котором охвачены всевозможные значения параметра ζ . В формулировке сказывается различие в расположении спектров операторов. Для $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 точка $\lambda = 0$ — нижний край спектра. Операторы $A_{D,\varepsilon}$ и A_D^0 положительно определены. Пусть $c_0 > 0$ — общая нижняя грань этих операторов. Например, в качестве c_0 можно взять $c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} (\text{diam } \mathcal{O})^{-2}$.

Теорема 7. В случае $\mathfrak{b} = D$ предполагаем, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_0, \infty)$. Положим $\zeta - c_0 = |\zeta - c_0| e^{i\psi}$ и введем обозначение

$$\rho_D(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_0|^{-2}, & |\zeta - c_0| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_0| \geq 1. \end{cases}$$

В случае $\mathfrak{b} = N$ предполагаем, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Положим

$$\rho_N(\zeta) = \begin{cases} c(\varphi)^2 |\zeta|^{-2}, & |\zeta| < 1, \\ c(\varphi)^2, & |\zeta| \geq 1. \end{cases}$$

Найдется число ε_0 (зависящее от $\mathcal{O}$ и Γ), такое, что справедливы следующие утверждения:

1°. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы оценки

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_6^b \rho_b(\zeta) \varepsilon, \quad (16)$$

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta) - \varepsilon K_b(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_7^b \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad (17)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_8^b \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}. \quad (18)$$

2°. Пусть $\Lambda \in L_\infty$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы оценки

$$\|R_b(\varepsilon; \zeta) - R_b^0(\zeta) - \varepsilon K_b^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}_7^b \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad (19)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b(\varepsilon; \zeta) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) R_b^0(\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}_8^b \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}. \quad (20)$$

Замечание 8. 1. Для постоянных $\mathcal{C}_j^b$, $\tilde{\mathcal{C}}_j^b$ из неравенств (16)–(20) верно то же, что было сказано в замечании 6.

2. Пусть $\delta > 0$ — произвольное достаточно малое число. Если считать ε достаточно малым, то можно принять $c_0 = \lambda_1^0 - \delta$, где λ_1^0 — первое собственное значение оператора A_D^0 .

При ограниченных значениях $|\zeta|$, а также в точках ζ с малым φ или $2\pi - \varphi$ может быть предпочтительнее применять теорему 7, нежели теоремы 4 и 5.

7. Поясним, что было известно ранее. В работах [8], [9] для оператора $A_{D,\varepsilon}^{-1}$ была найдена аппроксимация в $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^{1/2})$, а в [10], [11] была установлена точная по порядку оценка $\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C\varepsilon$. Для оператора $A_{N,\varepsilon}$ аналогичные результаты получены в [12]; при этом рассматривалась резольвента $(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, но не ставилась цель найти оптимальную зависимость констант в оценках от ζ . Как уже отмечалось, извлечь теоремы 4, 5 из «готовых» оценок не удастся. Для доказательства этих теорем мы воспроизводим схему исследования из [8]–[12], тщательно отслеживая зависимость оценок от параметра ζ . Схема основана на использовании оператора продолжения, применении результатов в $\mathbb{R}^d$, введении «поправки типа пограничного слоя» и ее кропотливого анализа. Что касается теоремы 7, то она легко получается из известных оценок в точке $\zeta = -1$ применением подходящих тождеств для резольвент (ср. (8)).

В работе [15] результаты теорем 4, 5, 7 применяются к усреднению решений начально-краевых задач для параболических уравнений. Для этой цели используется представление оператора $e^{-A_{b,\varepsilon}t}$ через интеграл от резольвенты $R_b(\varepsilon; \zeta)$ по подходящему контуру.

Подробное изложение результатов работы можно найти в препринте [16].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Math. and its Applications, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978. [2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [3] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **15:5** (2003), 1–108. [4] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Алгебра и анализ*, **18:6** (2006), 1–130. [5] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Russ. J. Math. Phys.*, **12:4** (2005), 515–524. [6] G. Griso, *Anal. Appl.*, **4:1** (2006), 61–79. [7] C. E. Kenig, F. Lin, Z. Shen, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **203:3** (2012), 1009–1036. [8] М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, *Функц. анализ и его прил.*, **46:2** (2012),

92–96. [9] М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **24**:6 (2012), 139–177. [10] Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **46**:3 (2012), 91–96. [11] Т. А. Suslina, Mathematika, **59**:2 (2013), 463–476. [12] Т. А. Suslina, SIAM J. Math. Anal., **45**:6 (2013), 3453–3493. [13] J. Nečas, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2012. [14] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973. [15] Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **49**:1 (2015). [16] Т. А. Suslina, *Homogenization elliptic problems: error estimates in dependence of the spectral parameter*, <http://arxiv.org/abs/1406.7530>.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: suslina@list.ru

Поступило в редакцию
4 февраля 2014 г.

Письмо в редакцию

В моей заметке «Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для матричного оператора Штурма–Лиувилля», опубликованной в выпуске 1 за 2012 год, была найдена ошибка. Необходимы следующие исправления:

Асимптотические формулы (4) в лемме 3 следует заменить на соотношения

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2n^2}{\pi} (I^{(s)} + \varkappa_n^{(s)}), \quad \{\|\varkappa_n^{(s)}\|\}_{n \geq 1} \in l_2, \quad s = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{s=1}^p \alpha_n^{(s)} = \frac{2n^2}{\pi} \left(I_m + \frac{\varkappa_n}{n} \right), \quad \{\|\varkappa_n\|\}_{n \geq 1} \in l_2,$$

$$\{n^{-2} \|(I_m - I^{(s)})\alpha_{nq}\|\}_{n \geq 1} \in l_2, \quad s = 1, \dots, p, \quad q = m_s, \dots, m_{s+1} - 1,$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=1,\dots,m}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & j = k, \omega_j = \omega_{m_s}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 тоже может быть исправлено с учетом этих изменений (см. N. Bondarenko, An inverse problem for the non-self-adjoint matrix Sturm–Liouville operator, arXiv:1407.3581 [math.SP]).

Н. П. Бондаренко