Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Б. Затицкий, О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 70–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:38:41

4, физ. хим., 1990, № 4, 78–82. [14] М. М. Фаддеев, Функц. анализ и его прил., **26**:4 (1992), 80–83. [15] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, Зап. научн. сем. ПОМИ, **270** (2000), 336–349. [16] А. В. Киселев, М. М. Фаддеев, Функц. анализ и его прил., **34**:2 (2000), 78–81. [17] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, Матем. заметки, **72**:2 (2002), 292–302. [18] А. С. Костенко, Матем. заметки, **78**:1 (2005), 147–151.

Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo, Mexico
e-mail: anauaeh@yahoo.com

Поступило в редакцию
15 июля 2013 г.

УДК 517.987.5

О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы*

© 2014. П. Б. Затицкий

На протяжении работы все встречающиеся пространства с мерой будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега–Рохлина). Основной интерес для нас будут представлять пространства с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т. е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Говоря о вероятностном пространстве, мы позволим себе опускать обозначение сигма-алгебры.

1. Определение и свойства масштабирующей энтропийной последовательности. Напомним определение допустимой полуметрики и ее ε -энтропии (см., например, работы [11], [12]):

Определение 1. Полуметрику ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) назовем *измеримой*, если она измерима на (X^2, μ^2) как функция двух переменных, и *допустимой*, если она сепарабельна на некотором подмножестве $X_1 \subset X$ полной меры. В этих случаях тройку (X, μ, ρ) мы будем называть *полуметрической* и *допустимой полуметрической* соответственно.

Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову.

Определение 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ ε -энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ полуметрической тройки (X, μ, ρ) определяется по следующему правилу. Рассмотрим наименьшее натуральное k , для которого пространство X можно представить в виде объединения множеств $X_0, X_1, \dots, X_k$, таких, что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и при $j = 1, \dots, k$ диаметр множества X_j в полуметрике ρ меньше ε . Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log_2 k.$$

Если такого k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$. В то же время ε -энтропией называют и функцию $\varepsilon \mapsto \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$

Напомним, что измеримая полуметрика ρ на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) допустима тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ (подробности см. в работе [12]).

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026), ОАО «Газпром нефть», гранта СПбГУ 6.38.223.2014, грантов РФФИ 13-01-12422 офи_m2 и 14-01-00373_A, гранта Президента РФ МК-6133.2013.1.

Далее мы считаем преобразование T эргодическим автоморфизмом стандартного вероятностного пространства (X, μ) . Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ) . Сдвиги $T^k \rho(x, y) = \rho(T^k x, T^k y)$, очевидно, также являются измеримыми полуметриками на (X, μ) , причем для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^k \rho).$$

Определим конечные усреднения полуметрики ρ под действием оператора T формулой $T_{av}^n \rho = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \rho$.

Важным динамическим свойством полуметрик является следующее свойство.

Определение 3. Измеримая на (X, μ) полуметрика ρ называется (*двусторонней*) *порождающей* для метрической динамической системы (X, μ, T) , если ее сдвиги $T^k \rho$, $k \in \mathbb{Z}$, в совокупности разделяют точки с точностью до множества меры нуль, т.е. существует некоторое множество $X' \subset X$ полной меры, такое, что для любых различных $x, y \in X'$ найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое, что $T^k \rho(x, y) > 0$.

Отметим, что допустимая метрика является порождающей для любого автоморфизма T , так как уже она разделяет точки.

Напомним определение, данное А. М. Вершиком в работах [7], [9], [10].

Определение 4. Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система, а ρ — допустимая полуметрика на (X, μ) . Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется *масштабирующей для ρ* , если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho)}{h_n} < +\infty,$$

а при достаточно малых $\varepsilon > 0$ — неравенство

$$0 < \underline{\lim}_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho)}{h_n}.$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначим символом $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$.

Замечание 1. Если ρ — допустимая полуметрика, $h = \{h_n\} \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$, а $h' = \{h'_n\}$ — последовательность положительных чисел, то $h' \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$ тогда и только тогда, когда $0 < \underline{\lim}_n h'_n / h_n \leq \overline{\lim}_n h'_n / h_n < \infty$.

Следующая теорема подтверждает гипотезу Вершика о независимости масштабирующей последовательности от полуметрики, выдвинутую в работе [10]. Для автоморфизмов с чисто точечным спектром она была доказана в работе [12] (см. теорему 4 далее).

Теорема 1. Пусть $\rho, \tilde{\rho}$ — суммируемые допустимые порождающие полуметрики на (X, μ) . Тогда $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho) = \mathcal{H}(X, \mu, T, \tilde{\rho})$.

Теорема 1 приводит к следующему определению.

Определение 5. Последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел называется *масштабирующей энтропийной последовательностью* метрической динамической системы (X, μ, T) , если $h \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой порождающей полуметрики ρ . Класс масштабирующих энтропийных последовательностей динамической системы обозначим через $\mathcal{H}(X, \mu, T)$.

Следствие 1. *Класс масштабирующих энтропийных последовательностей является метрическим инвариантом эргодических динамических систем.*

Автору до сих пор не известно, для любой ли динамической системы существует масштабирующая энтропийная последовательность (т.е. множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ непусто).

Класс масштабирующих энтропийных последовательностей монотонен в следующем смысле:

Следствие 2. *Пусть динамическая система (X_2, μ_2, T_2) является фактором системы (X_1, μ_1, T_1) , а $h^1 = \{h_n^1\}$, $h^2 = \{h_n^2\}$ — их масштабирующие энтропийные последовательности соответственно. Тогда $h_n^2 = O(h_n^1)$, $n \rightarrow +\infty$.*

2. Примеры. 2.1. *Связь с колмогоровской энтропией автоморфизма.* Следующая теорема проясняет связь между масштабирующими энтропийными последовательностями и энтропией Колмогорова.

Теорема 2. *Пусть T — эргодический автоморфизм пространства (X, μ) . Тогда:*

(1) *если колмогоровская энтропия $h_\mu(T)$ конечна и положительна, то последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью системы (X, μ, T) ;*

(2) *если h_n — масштабирующая энтропийная последовательность системы (X, μ, T) , то $h_\mu(T) = 0$ тогда и только тогда, когда $h_n = o(n)$, $n \rightarrow +\infty$.*

Сравнительно просто вычисляется масштабирующая энтропийная последовательность сдвига Бернулли. Пусть (A, ν) — стандартное вероятностное пространство, $X = A^{\mathbb{Z}}$ — пространство двусторонних последовательностей, $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ — произведение меры на X , а $T: X \rightarrow X$ — левый сдвиг.

Теорема 3. *Если мера ν не сосредоточена в одной точке, то последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью для сдвига Бернулли (X, μ, T) .*

Если мера ν непрерывна, то энтропия пространства (A, ν) бесконечна. При этом в соответствии с теоремой Колмогорова (см. [1]–[3]) колмогоровская энтропия $h_\mu(T)$ будет бесконечной. Таким образом, обращение утверждения (1) теоремы 2 неверно.

2.2. *Аutomорфизмы с чисто точечным спектром.* Ранее в работе [12] была доказана следующая теорема, характеризующая автоморфизмы с чисто точечным спектром в терминах масштабирующих энтропийных последовательностей.

Теорема 4. *Пусть T — эргодический автоморфизм стандартного вероятностного пространства (X, μ) . Тогда равносильны следующие утверждения:*

- (1) *спектр системы (X, μ, T) чисто точечный;*
- (2) *множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ состоит из положительных ограниченных отделенных от нуля последовательностей.*

Сравним этот результат с другим критерием энтропийного типа чистой точечности спектра, полученным Кушниренко в работе [4]. Напомним определение A -энтропии (последовательностной энтропии) эргодического автоморфизма T стандартного вероятностного пространства (X, μ) . Для возрастающей последовательности натуральных чисел $A = \{a_n\}$ и разбиения ξ пространства (X, μ) с конечной энтропией определяется число $h_A(T, \xi) = \varlimsup_n (H(\bigcap_{i=1}^n T^{a_i} \xi) / n)$, где

H — энтропия измеримого разбиения. A -энтропией автоморфизма T называется число $h_A(T) = \sup_{\xi} h_A(T, \xi)$, где супремум берется по всем измеримым разбиениям с конечной энтропией. В работе [4] доказано, что спектр автоморфизма T является чисто точечным тогда и только тогда, когда $h_A(T) = 0$ для любой последовательности A . Сравнивая этот результат с теоремой 4, получаем, что если $h_A(T) > 0$, то масштабирующая энтропийная последовательность растет. Следующая теорема дает количественную оценку этого утверждения.

Теорема 5. *Если $A = \{a_n\}$, $h_A(T) > 0$, а $h = \{h_n\}$ — масштабирующая энтропийная последовательность автоморфизма T , то $\lim(h_{a_n} / \log \log n) > 0$.*

2.3. Подстановки постоянной длины. В качестве примера продемонстрируем вычисление масштабирующих энтропийных последовательностей подстановочных динамических систем постоянной длины. Необходимые сведения из теории подстановочных динамических систем см., например, в монографии [8].

Пусть ξ — подстановка длины q на алфавите A (т.е. отображение из A в A^q , продолженное координатно до отображения конечных и бесконечных слов). Мы предполагаем, что для некоторого символа $\alpha \in A$ слово $\xi(\alpha)$ начинается с символа α . В таком случае найдется бесконечное слово $u \in A^{\mathbb{N}_0}$ (где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), начинающееся с α , такое, что $\xi(u) = u$. Пусть T — левый сдвиг на $A^{\mathbb{N}_0}$, а X_{ξ} — замыкание последовательности $T^n u$, $n \in \mathbb{N}$, в топологии произведения. Если подстановка ξ примитивна, то топологическая динамическая система (X_{ξ}, T) минимальна и, более того, обладает единственной инвариантной мерой μ^{ξ} . Таким образом, примитивной подстановке соответствует метрическая динамическая система (X_{ξ}, μ^{ξ}, T) . Оказывается, что масштабирующая энтропийная последовательность этой динамической системы может быть выражена в терминах двух комбинаторных параметров подстановки. Первый из них, высота $h(\xi)$, определяется, например, как наибольшее число k , взаимно простое с q , такое, что если $u_n = u_0$ (где v_m для слова v и числа m — символ алфавита A , стоящий в слове v на m -м месте), то $k \mid n$. Второй параметр, столбцовое число (column number) $c(\xi)$, определяется как $\min\{|\{\xi^n(a)_k : a \in A\}| : n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < q^n\}$ (отметим, что наше определение немного отличается от классического, приведенного в работах [6] и [8]).

Теорема 6. *Пусть ξ — инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A , $|A| > 1$. Тогда последовательность $h_n = 1 + (c(\xi) - h(\xi)) \log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_{ξ}, μ^{ξ}, T) .*

Идея доказательства этой теоремы заключается в изучении свойств полуметрик на алфавите A , инвариантных относительно подстановки.

Из теорем 6 и 4 вытекает

Следствие 3. *Пусть ξ — инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A , $|A| > 1$. Тогда спектр соответствующей ей динамической системы (X_{ξ}, μ^{ξ}, T) является чисто точечным в том и только том случае, когда $c(\xi) = h(\xi)$.*

Отметим, что похожий критерий впервые был получен в работах [5] и [6], однако там он сформулирован несколько иначе. Отличие заключается в том, что для подстановок, высота которых больше единицы, параметр $c(\xi)$ определяется не так, как у нас, а путем рассмотрения некоторой модифицированной

подстановки. Для случая $h(\xi) = 1$ результат следствия 3 совпадает с критерием из этих работ — спектр является чисто точечным тогда и только тогда, когда $c(\xi) = 1$. А для случая $h(\xi) > 1$ критерий из следствия 3, в отличие от критерия из этих работ, не требует перехода к модифицированной подстановке.

Автор выражает благодарность Ф. В. Петрову и А. М. Вершику за многочисленные полезные обсуждения, указания и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, **119**:5 (1958), 861–864. [2] А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, **124** (1959), 754–755. [3] Я. Г. Синай, Докл. АН СССР, **124** (1959), 768–771. [4] А. Г. Купшниренко, УМН, **22**:5(137) (1967), 57–65. [5] Т. Kamae, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 285–306. [6] F. M. Dekking, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **41**:3 (1977/78), 221–239. [7] А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, ТВП, **52**:3 (2007), 446–467. [8] M. Queffelec, *Substitution Dynamical Systems—Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010. [9] A. Vershik, Markov Processes and Related Fields, **16**:1 (2010), 169–185. [10] А. М. Вершик, Алгебра и анализ, **23**:1 (2011), 111–135. [11] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, Зап. научн. сем. ПОМИ, **390** (2011), 201–209. [12] А. М. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, Cent. Eur. J. Math., **11**:3 (2013), 379–400.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
Санкт-Петербургского государственного университета
Санкт-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: raxa239@yandex.ru

Поступило в редакцию
1 сентября 2014 г.

УДК 517.95+517.984.5

Двумерные потенциалы Вигнера–фон Неймана с кратным положительным собственным значением*

© 2014. Р. Г. Новиков, И. А. Тайманов, С. П. Царев

Пусть H — оператор Шрёдингера,

$$H = -\Delta + U,$$

с убывающим на бесконечности потенциалом $U(x)$ в $\mathbb{R}^N$. Потенциал U называется *потенциалом Вигнера–фон Неймана*, если H имеет положительное собственное значение с собственной функцией, принадлежащей $L_2(\mathbb{R}^N)$, т. е. существует точка его дискретного спектра, вложенная в абсолютно непрерывный спектр.

*Работа была частично поддержана ФЦП №14.А18.21.0866 Министерства образования и науки РФ (Р. Г. Н.), междисциплинарным проектом «Геометрические и алгебраические методы нахождения явных решений уравнений математической физики и механики сплошной среды» СО РАН (И. А. Т. и С. П. Ц.) и грантом 1431/ГФ Министерства образования и науки Республики Казахстан (И. А. Т.). Она также получила поддержку в рамках государственного задания Министерства образования и науки по Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году, задание №1.1462.2014/К (С. П. Ц.).