Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибилов, О точечной эквивалентности функций на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 19–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:35:00

О точечной эквивалентности функций на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$

© 2014. П. В. БИБИКОВ

В статье рассматривается действие псевдогруппы точечных преобразований на множестве гладких функций, заданных на контактном пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$. Найден дифференциальные инварианты этого действия, а также решена проблема локальной точечной эквивалентности регулярных гладких функций.

1. Введение. Целью данной работы является решение проблемы локальной эквивалентности гладких функций, заданных на контактном пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$, относительно действия псевдогруппы точечных преобразований (продолженных до контактных преобразований пространства $J^1\mathbb{R}$).

Изучение действия псевдогруппы точечных преобразований на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$ и на пространстве $C^\infty(J^1\mathbb{R})$ гладких функций на нем представляет значительный интерес в связи с приложениями к теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и контактных векторных полей (см. [1]). В данной работе делается первый шаг в этом направлении: классифицируются гладкие функции на пространстве 1-джетов.

2. Описание действия псевдогруппы точечных преобразований. Напомним, что *псевдогруппой точечных преобразований* называется псевдогруппа $G := \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ диффеоморфизмов плоскости (базы) $J^0\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$. Действие псевдогруппы G продолжается до действия на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, p) следующим образом (см. [1]):

$$x \mapsto \alpha(x, y), \quad y \mapsto \beta(x, y), \quad p \mapsto \frac{\beta_x + \beta_y p}{\alpha_x + \alpha_y p}. \quad (1)$$

Мы будем обозначать псевдогруппу таких продолженных преобразований пространства $J^1\mathbb{R}$ через $\hat{G}$.

Таким образом, задача о точечной классификации функций на пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}$ формулируется следующим образом: *описать орбиты действия псевдогруппы $\hat{G}$ на пространстве функций $f = f(x, y, p) \in C^\infty(J^1\mathbb{R})$.*

Замечание 1. Каждую гладкую функцию $f \in C^\infty(J^1\mathbb{R})$ можно мыслить (см. [1]) как нелинейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\Delta_f: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad \Delta_f(\varphi) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x)).$$

Поэтому точечная классификация функций на $J^1\mathbb{R}$ влечет за собой точечную классификацию нелинейных дифференциальных операторов $\Delta_f: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ первого порядка.

Для решения этой задачи мы воспользуемся аппаратом теории дифференциальных инвариантов. Прежде всего введем необходимые обозначения и напомним известные теоретические сведения (подробности см. в [1]).

Пусть $f: J^1\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция. Введем пространство k -джетов таких функций (где $k \geq 0$). Чтобы отличать его от пространства $J^1\mathbb{R}$, мы обозначим его через $\mathbf{J}^k$. Координаты в нем мы обозначим через $(x, y, p, u, u_x, u_y, u_p, \dots, u_\sigma)$, где $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_p)$ и $|\sigma| = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_p \leq k$.

Введем также пространство бесконечных джетов $\mathbf{J}^\infty := \varprojlim \mathbf{J}^k$.

Псевдогруппа $\hat{G}$ действует на пространстве 0-джетов $\mathbf{J}^0$. Это действие канонически продолжается до действия на всех пространствах k -джетов $\mathbf{J}^k$ (см. [1]).

Напомним следующее

Определение (см. также [3]). 1. *Дифференциальным инвариантом порядка k* называется рациональная функция I на пространстве $\mathbf{J}^k$, такая, что $\hat{g} \circ I = I$ для всех $\hat{g} \in \hat{G}$.

2. *Инвариантным дифференцированием* называется рациональная комбинация полных производных ∇ , такая, что $\hat{g} \circ \nabla = \nabla \circ \hat{g}$ для всех $\hat{g} \in \hat{G}$.

Замечание 2. Согласно глобальной теореме Ли–Трессе (см. [3]), все поле дифференциальных инвариантов является конечно порожденным, т. е. любой дифференциальный инвариант является рациональной функцией от инвариантных производных, взятых от конечного числа базисных инвариантов.

Нашей ближайшей целью является нахождение нескольких дифференциальных инвариантов и базиса из инвариантных дифференцирований.

3. Дифференциальные инварианты и инвариантные дифференцирования. Начнем со следующего предложения.

Предложение. *Функции*

$$U := u, \quad S := \frac{2u_p u_{ppp} - 3u_{pp}^2}{u_p^4}$$

являются дифференциальными инвариантами порядков 0 и 3 соответственно.

Дифференцирование

$$\nabla_1 := \frac{1}{u_p} \frac{d}{dp}$$

является инвариантным (здесь d/dp — полная производная по переменной p ; см. [1]).

Доказательство. Инвариантность функции U очевидна. Функция S является «подкрученной» производной Шварца (см. [2]), поэтому она инвариантна относительно дробно-линейных преобразований переменной p , а значит, и относительно действия всей псевдогруппы $\hat{G}$.

Инвариантность дифференцирования ∇_1 проверяется прямыми вычислениями. $\square$

Теперь мы построим еще три инвариантных дифференцирования. Для этого мы рассмотрим дифференциальные инварианты U , S и $S_1 := \nabla_1 S$ и построим производные Трессе

$$\nabla_2 := \frac{D}{DS_1}, \quad \nabla_3 := \frac{D}{DS}, \quad \nabla_4 := \frac{D}{DU}.$$

Напомним, что эти производные определяются следующим образом (см. [4]). Рассмотрим полные дифференциалы $\widehat{d}U$, $\widehat{d}S$ и $\widehat{d}S_1$ (см. [1]). Очевидно, что эти формы независимы в точках общего положения, поэтому для каждой функции $F \in C^\infty(\mathbf{J}^\infty)$ полный дифференциал $\widehat{d}F$ может быть представлен в виде линейной комбинации:

$$\widehat{d}F = \lambda_U \widehat{d}U + \lambda_S \widehat{d}S + \lambda_{S_1} \widehat{d}S_1.$$

Коэффициенты λ_U , λ_S , λ_{S_1} называются *производными Трессе функции F* и обозначаются через DF/DU , DF/DS , DF/DS_1 соответственно. Координатное представление производных Трессе дается следующей формулой:

$$\left(\frac{D}{DU}, \frac{D}{DS}, \frac{D}{DS_1} \right) = \begin{pmatrix} U_x & U_y & U_p \\ S_x & S_y & S_p \\ S_{1,x} & S_{1,y} & S_{1,p} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dp} \right)$$

(здесь d/dx , d/dy , d/dp — операторы полных производных, а индексы x , y , p обозначают полные производные по соответствующим переменным).

С помощью прямых вычислений легко убедиться, что дифференцирования $\nabla_1, \dots, \nabla_4$ связаны линейным соотношением

$$\nabla_1 = S_{11} \nabla_2 + S_1 \nabla_3 + \nabla_4,$$

где $S_{11} := \nabla_1^2 S$ — дифференциальный инвариант порядка 5. Поэтому достаточно рассматривать базис $\{\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3\}$.

Замечание 3. Координатное представление дифференцирования ∇_4 наиболее громоздкое, поэтому мы рассматриваем набор $\{\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3\}$ инвариантных дифференцирований.

Теперь построим еще один дифференциальный инвариант порядка 5. Для этого рассмотрим контактную форму $\omega := dy - p dx$ на пространстве $J^1\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Эта форма является относительным инвариантом действия псевдогруппы $\widehat{G}$ (так как преобразования вида (1) сохраняют нули контактной формы ω). Поэтому функция

$$I := \frac{\omega(\nabla_3)}{\omega(\nabla_2)}$$

является дифференциальным инвариантом действия псевдогруппы $\widehat{G}$.

Замечание 4. Как легко видеть, $\omega(\nabla_1) = 0$, поэтому построить таким же способом второй дифференциальный инвариант, поделив $\omega(\nabla_3)$ на $\omega(\nabla_1)$, не получится.

Представляется естественным вопрос о количестве независимых дифференциальных инвариантов чистого порядка k (т.е. инвариантов по модулю инвариантов порядка $k-1$). Имеет место следующая

Теорема 1. *Количество дифференциальных инвариантов чистого порядка k действия псевдогруппы $\widehat{G}$ на пространстве k -джетов $\mathbf{J}^k$ представлено в следующей таблице:*

порядок инвариантов	0	1	2	3	4	5	6	7	...	k
количество инвариантов	1	0	0	1	3	8	13	19	...	$k(k-1)/2 - 2$

Доказательство. Наши рассуждения во многом будут аналогичны рассуждениям работы [5] о точечной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ точечных преобразований базы $J^0\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) состоит из всех векторных полей на плоскости:

$$\mathfrak{g} = \{X_{a,b} = a\partial_x + b\partial_y : a = a(x, y), b = b(x, y)\}.$$

Векторные поля $X_{a,b}$ на базе $J^0\mathbb{R}$ поднимаются на $J^1\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{X}_{a,b} = a\partial_x + b\partial_y - (p^2a_y - p(b_y - a_x) - b_x)\partial_p, \quad a = a(x, y), b = b(x, y).$$

Алгебру Ли векторных полей $\hat{X}_{a,b}$ обозначим через $\hat{\mathfrak{g}}$.

Теперь рассмотрим действие алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ на пространстве 0-джетов $\mathbf{J}^0$. Это действие (так же, как и действие псевдогруппы $\hat{G}$) канонически поднимается до действия на всех пространствах k -джетов $\mathbf{J}^k$. А именно, рассмотрим произвольное векторное поле $\hat{X}_{a,b} \in \hat{\mathfrak{g}}$. Обозначим через

$$\Phi_{a,b} := -[au_x + bu_y - (p^2a_y - p(b_y - a_x) - b_x)u_p]$$

его производящую функцию (см. [1], [5]). Тогда поднятие алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ в пространство k -джетов $\mathbf{J}^k$ задается следующим образом:

$$\hat{\mathfrak{g}}^{(k)} := \left\{ \hat{X}_{a,b}^{(k)} = \left[a \frac{d}{dx} + b \frac{d}{dy} - (p^2a_y - p(b_y - a_x) - b_x) \frac{d}{dp} \right] \Big|_{\mathbf{J}^k} + \sum_{|\sigma|=1}^k (D_\sigma^k \Phi_{a,b}) \partial_{u_\sigma} \right\},$$

где $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_p)$ — мультииндекс и D_σ^k — композиция операторов полных производных d/dx , d/dy и d/dp , ограниченных на пространство $\mathbf{J}^k$.

Далее, рассмотрим слой V_k естественной проекции $\pi_{k,k-1} : \mathbf{J}^k \rightarrow \mathbf{J}^{k-1}$ над точкой θ_{k-1} . Как известно, этот слой является аффинным пространством, а ассоциированное с ним векторное пространство есть $S^k(T^*\mathbb{R}^3)$ — пространство симметрических форм на касательном пространстве к $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим последовательность джетов $\theta_k = [f]_{(0,0,0)}^k$, последовательно проектирующихся друг в друга, и соответствующие им *подалгебры изотропии* $\hat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$, состоящие из ограничений векторных полей $\hat{X}^{(k)} \in \hat{\mathfrak{g}}^{(k)}$ на слой V_k . Иначе говоря,

$$\hat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}} := \{\hat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k)} : \hat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k-1)} = 0\}$$

(здесь через $\hat{X}_{\theta_{k-1}}$ обозначено векторное поле, в котором координаты u_σ (где $|\sigma| \leq k-1$) равны соответствующим компонентам джета θ_{k-1}). Ясно, что векторные поля вида $\hat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k)}$ зависят от k -джета функции a и $(k+1)$ -джета функции b в точке $(0, 0)$.

Подалгебра изотропии $\hat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ действует на слое V_k аффинными преобразованиями. Легко видеть, что количество дифференциальных инвариантов чистого порядка k равно коразмерности орбиты общего положения этого действия.

Прямыми вычислениями (впрочем, довольно громоздкими) можно убедиться, что существует в точности один инвариант порядка 0, инвариантов порядка 1 и 2 не существует, а также есть один инвариант порядка 3 (это найденная нами «подкрученная» производная Шварца) и три инварианта порядка 4.

Пусть теперь $k \geq 5$. Чтобы вычислить коразмерность орбиты общего положения, рассмотрим условие $\widehat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k-1)} = 0$ как систему линейных уравнений относительно производных функций a и b в точке $(0, 0)$. Назовем джет θ_{k-1} *джетом общего положения*, если ранг нашей системы $\widehat{X}_{\theta_{k-1}}^{(k-1)} = 0$ максимален.

Рассуждая по индукции, можно показать, что в подалгебре изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ над джетом θ_{k-1} общего положения компоненты $(D_{\sigma}^k \Phi_{a,b})(\theta_{k-1}) \partial_{u_{\sigma}}$ векторного поля из подалгебры изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$, соответствующие мультииндексам

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_p), \text{ где } \sigma_p \geq 3, \text{ и } \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, 2), \text{ где } \sigma_x \geq 2,$$

равны 0, а каждая из оставшихся компонент выражается через независимые производные

$$a_{0,k-1}, \quad b_{0,k-1}, \quad b_{0,k}, \quad a_{k-i,i}, \quad b_{k+1-i,i}, \quad 0 \leq i \leq k,$$

и содержит независимую производную, которая не встречается в других компонентах. Отсюда следует, что коразмерность орбиты действия подалгебры изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ на слое V_k равна

$$\dim V_k - ((k+1) + k + (1+1)) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - (2k+3) = \frac{k(k-1)}{2} - 2$$

(здесь

$(k+1)$ — количество мультииндексов $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, 0)$,

k — количество мультииндексов $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, 1)$,

$(1+1)$ — мультииндексы $(0, k-2, 2)$ и $(1, k-3, 2)$.)

Таким образом, существует ровно $k(k-1)/2 - 2$ независимых дифференциальных инвариантов чистого порядка k , что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 5. Подалгебры изотропии при $k \geq 5$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}} = & \left\{ - \sum_{i=0}^k (a_{k-i,i} f_x + b_{k+1-i,i} f_p) \partial_{u_{k-i,i,0}} + f_p \sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i,i} \partial_{u_{k-1-i,i,1}} \right. \\ & + \frac{b_{0,k-1}(f_x f_y + 2f_x f_{xp} + 2f_p f_{xx})}{f_p} \partial_{u_{2,k-2,0}} + b_{0,k-1} f_x \partial_{u_{2,k-3,1}} \\ & + \frac{a_{0,k-1}(f_x f_{xp} + f_x f_p - f_p f_{xx}) + b_{0,k-1}(f_y f_{xp} + f_y^2 + (k-1)f_x f_{yp} - k f_p f_{xy})}{f_p} \partial_{u_{1,k-1,0}} \\ & + \frac{a_{0,k-1} f_x f_p + b_{0,k-1}(f_y f_p + f_x f_{pp} - f_p f_{xp})}{f_p} \partial_{u_{1,k-2,1}} \\ & + \frac{k a_{0,k-1}(f_x f_{yp} - f_{xy} f_p) + k b_{0,k-1}(f_y f_{yp} - f_p f_{yy}) - b_{0,k} f_y f_p}{f_p} \partial_{u_{0,k,0}} \\ & + \frac{a_{0,k-1}(f_x f_{pp} - f_p f_{xp}) + b_{0,k-1}(f_y f_{pp} - f_p f_{yp}) - b_{0,k} f_p^2}{f_p} \partial_{u_{0,k-1,1}} \\ & \left. + 2f_p(b_{0,k-1} \partial_{u_{1,k-3,2}} + a_{0,k-1} \partial_{u_{0,k-2,2}}) \right\}. \end{aligned}$$

4. Классификационная теорема. Наконец, мы готовы сформулировать критерий эквивалентности двух гладких функций относительно действия псевдогруппы $\widehat{G}$. Сначала дадим следующее

Определение. Назовем функцию $f \in C^\infty(J^1\mathbb{R})$ *регулярной в окрестности* $\mathcal{O}$, если

$$\omega(\nabla_2)(f) \neq 0 \text{ и } dU(f) \wedge dS(f) \wedge dS_1(f) \neq 0 \text{ в } \mathcal{O}.$$

Для регулярной функции f существуют такие гладкие функции A и B , что

$$S_{11} = A(U, S, S_1), \quad I = B(U, S, S_1). \quad (2)$$

Теорема 2. *Две регулярные функции $f, \tilde{f} \in C^\infty(J^1\mathbb{R})$ локально точно эквивалентны, если и только если соответствующие им пары зависимостей совпадают: $(A, B) = (\tilde{A}, \tilde{B})$.*

Доказательство. Очевидно, что если функции f и $\tilde{f}$ эквивалентны, то соответствующие пары зависимостей (2) совпадают.

Докажем обратное утверждение. Для этого рассмотрим две системы координат $(U(f), S(f), S_1(f))$ и $(U(\tilde{f}), S(\tilde{f}), S_1(\tilde{f}))$ пространства $J^1\mathbb{R}$. Пусть $\varphi: J^1\mathbb{R} \rightarrow J^1\mathbb{R}$ — диффеоморфизм, переводящий первую систему координат во вторую. Очевидно, что $\varphi \circ f = \tilde{f}$.

Докажем, что $\varphi \in \hat{G}$. Для этого достаточно доказать следующие утверждения.

1. Диффеоморфизм φ сохраняет нули контактной формы ω . Пусть $\omega = \alpha \hat{d}U + \beta \hat{d}S + \gamma \hat{d}S_1$. Тогда из условий $\omega(\nabla_1) = 0$, $\omega(\nabla_3) = I \cdot \omega(\nabla_2)$ получаем

$$\alpha + \beta S_1 + \gamma S_{11} = 0, \quad \beta = \gamma \cdot I,$$

откуда следует, что

$$\omega = \gamma \cdot (-(S_{11} + IS_1) \hat{d}U + I \hat{d}S + \hat{d}S_1).$$

Так как ограничения инвариантов S_{11} и I на функции f и $\tilde{f}$ одинаково выражаются через U , S и S_1 , то координатное представление нулей контактной формы ω в системах координат $(U(f), S(f), S_1(f))$ и $(U(\tilde{f}), S(\tilde{f}), S_1(\tilde{f}))$ одинаково.

2. Диффеоморфизм φ сохраняет слои расслоения $\pi: J^1\mathbb{R} \rightarrow J^0\mathbb{R}$. Поле направлений $\langle \nabla_1 \rangle$, ограниченное на график L_f^1 функции f , является вертикальным в расслоении π , поэтому достаточно выразить его координаты (определенные с точностью до умножения на гладкую функцию из $C^\infty(J^1\mathbb{R})$) через «инвариантные» координаты $(U(f), S(f), S_1(f))$. Эти координаты являются проективным набором функций

$$(\nabla_1(U) : \nabla_1(S) : \nabla_1(S_1)) = (1 : S_1 : S_{11}),$$

ограниченных на L_f^1 . Аналогично п. 1, координаты (проективные) вертикальных полей направлений $\langle \nabla_1 \rangle|_{L_f^1}$ и $\langle \nabla_1 \rangle|_{L_{\tilde{f}}^1}$ в системах координат $(U(f), S(f), S_1(f))$ и $(U(\tilde{f}), S(\tilde{f}), S_1(\tilde{f}))$ одинаковы.

Таким образом, из пп. 1 и 2 следует, что диффеоморфизм φ сохраняет нули формы ω и слои расслоения π , т. е. $\varphi \in \hat{G}$, что и требовалось. $\square$

Из этой теоремы мы немедленно получаем

Следствие. *Базисные дифференциальные инварианты U , S , I и инвариантные дифференцирования ∇_1 , ∇_2 , ∇_3 порождают все поле дифференциальных инвариантов (т. е. любой дифференциальный инвариант является рациональной функцией от инвариантных производных базисных инвариантов).*

Это поле разделяет $\hat{G}$ -орбиты джетов общего положения.

Замечание 6. Отметим, что, согласно теореме 1, существуют три дифференциальных инварианта чистого порядка 4, в то время как мы предъявили только один такой инвариант, S_1 . Тем не менее оказывается, что оставшиеся два дифференциальных инварианта порядка 4 могут быть рационально выражены через инвариантные производные от U , S и I .

Автор благодарит А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии*, Геометрия-1, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 28, ВИНТИ, М., 1988.
- [2] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2012.
- [3] B. S. Kruglikov, V. V. Lychagin, *Global Lie–Tresse theorem*, <http://arxiv.org/abs/1111.5480v1>.
- [4] V. V. Lychagin, *Feedback differential invariants*, Acta Appl. Math., **109**:1 (2010), 211–222.
- [5] B. S. Kruglikov, *Point classification of Second Order ODEs: Tresse Classification Revisited and Beyond*, in: Proc. of the Fifth Abel Symposium (Tromsø, Norway, June 17–22), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2009; <http://arxiv.org/abs/0809.4653>.

Институт проблем управления РАН
e-mail: tsdtp4u@proc.ru

Поступило в редакцию
11 января 2013 г.