Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Рабинович, Акустическая дифракция на периодических графах, *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 77–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:54:36

невозможно увеличить скорость убывания получаемых потенциалов в силу упомянутой выше теоремы Като [2].

Мы предполагаем, что при повторной итерации преобразования Мутара можно получить подобные потенциалы с положительным собственным значением более высокой кратности.

Благодарности. Данная работа была выполнена во время посещения одним из авторов (И. А. Т.) Centre de Mathématique Appliquées (Ecole Polytechnique) в июле 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. von Neumann, E. P. Wigner, Z. Phys., **30** (1929), 465–467. [2] T. Kato, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 403–425. [3] И. А. Тайманов, С. П. Царев, УМН, **62:3** (2007), 217–218. [4] И. А. Тайманов, С. П. Царев, ТМФ, **157:2** (2008), 188–207.

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique
e-mail: novikov@cmap.polytechnique.fr

Поступило в редакцию
2 августа 2013 г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Сибирский федеральный университет,
Институт космических и информационных технологий
e-mail: sptsarev@mail.ru

УДК 517.9

Акустическая дифракция на периодических графах*

© 2014. В. С. РАБИНОВИЧ

Пусть Γ — ориентированный граф, вложенный в $\mathbb{R}^2$ и периодический относительно свободного действия группы $\mathbb{Z}^n$, $n = 1, 2$. Мы рассматриваем акустическую проблему дифракции, описываемую уравнением Гельмгольца

$$\rho(x)\nabla \cdot \rho^{-1}(x)\nabla u(x) + a(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (1)$$

где ρ — плотность неоднородной среды, $a = \omega^2/c^2$, ω — частота гармонических колебаний, c — скорость звука в среде. Мы рассматриваем решения уравнения (1) в пространстве $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, удовлетворяющие дифракционным условиям (условиям трансмиссии) на Γ

$$[u]_{\Gamma \setminus \mathcal{V}} = 0, \quad (2)$$

$$\left[b \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Gamma \setminus \mathcal{V}} + du = f \in L^p(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \quad (3)$$

где $\mathcal{V}$ есть множество вершин графа Γ , b принадлежит $PC(\mathbb{R}^2, \Gamma)$, пространству ограниченных кусочно-непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$ с разрывами на Γ , d принадлежит $PC(\Gamma, \mathcal{V})$, пространству ограниченных кусочно-непрерывных

*Работа поддержана Национальной системой исследователей Мексики (SNI), а также проектом CONACYT 000000000179872.

функций на Γ с разрывами на $\mathcal{V}$, и $[\varphi]_{\Gamma \setminus \mathcal{V}}$ — скачок функции φ на $\Gamma \setminus \mathcal{V}$. (Точное определение скачка на $\Gamma \setminus \mathcal{V}$ дается ниже.)

Отметим, что дифракция на ограниченных препятствиях является классической проблемой математической физики (см., например, [1]–[3] и цитированные там работы). Дифракция на периодических структурах также представляет большой теоретический и прикладной интерес, и существует обширная литература, посвященная этой проблеме. (См., например, [7], [4] и цитированные там работы.)

В отличие от авторов упомянутых работ мы изучаем уравнение Гельмгольца с неперiodическими коэффициентами и с неперiodическими условиями трансмиссии. Мы определяем потенциалы простого и двойного слоя на Γ , связанные с уравнением Гельмгольца на $\mathbb{R}^2$, и изучаем их свойства. Посредством потенциалов мы сводим дифракционную проблему (1)–(3) к граничному уравнению на Γ . Следует отметить, что существует обширная литература, посвященная дифференциальным и псевдодифференциальным операторам на графах и их приложениям (см., например, [5], [6]). Основной целью работы является изучение фредгольмовости граничных операторов. Мы следуем здесь статье [8], где рассматривался общий класс неперiodических псевдодифференциальных операторов на периодических графах.

Применяя локальный принцип Симоненко [11], мы сводим изучение фредгольмовости граничных операторов к проблеме их локальной фредгольмовости в каждой точке $t \in \Gamma \cup \{\infty\}$. Наиболее трудной частью является изучение локальной фредгольмовости на бесконечности. Для этого мы реализуем граничные операторы на Γ как дискретные операторы на $\mathbb{Z}^n$ с операторнозначными коэффициентами, для исследования локальной фредгольмовости которых мы используем метод предельных операторов (см. [8], [10]). Этот подход позволяет получить необходимые и достаточные условия фредгольмовости в пространствах $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, граничных псевдодифференциальных операторов.

1. Обратимость операторов Гельмгольца. Мы используем следующие обозначения: $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, ограниченных вместе со всеми частными производными, $SO^\infty(\mathbb{R}^n)$ — подпространство в $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, состоящее из медленно меняющихся на бесконечности функций, т.е. таких функций a , что $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_j} a(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Мы обозначаем через $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, пространство бесселевых потенциалов, т.е. таких распределений $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что $\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \| (1 - \Delta)^{s/2} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Рассмотрим оператор Гельмгольца

$$\mathcal{G}u(x) = \rho(x) \nabla \cdot \rho^{-1}(x) \nabla u(x) + a(x)u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

при следующих предположениях:

- (i) $\rho, a \in SO^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(x) > 0$;
- (iii) $\operatorname{Im} a(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iv) $\liminf_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a(x) = \kappa > 0$ (поглощение на бесконечности).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i)–(iv). Тогда

1) оператор Гельмгольца $\mathcal{G}: H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-2,p}(\mathbb{R}^n)$ обратим для всех $s \in \mathbb{R}$ и $p \in (1, \infty)$;

- 2) $L = \mathcal{G}^{-1}$ независим от $s \in \mathbb{R}$ и $p \in (1, \infty)$ и является псевдодифференциальным оператором, принадлежащим классу Хёрмандера $OPS_{1,0}^{-2}(\mathbb{R}^n)$;
- 3) главный символ оператора L есть $|\xi|^{-2}$;
- 4) существует распределение $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, такое, что

$$L\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, x-y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и для любых α, β и $N > -2 + |\alpha| + n$ существует $C_{\alpha,\beta,N} > 0$, такое, что

$$|\partial_x^\beta \partial_z^\alpha g(x, z)| \leq C_{\alpha,\beta,N} |z|^{-N}, \quad z \neq 0.$$

(Определение класса $OPS_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ см., например, в [12].)

2. Периодические графы. Предположим, что Γ состоит из счетного множества вершин $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ и ребер $\mathcal{E} = \{e_j\}_{j \in J}$, соединяющих эти вершины. Каждое ребро e есть линейный сегмент

$$[\mu, \nu] = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - \theta)\mu + \theta\nu, \theta \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2,$$

соединяющий вершины μ, ν , и мы предполагаем, что для каждой пары вершин $\{\mu, \nu\}$ существует только одно соединяющее их ребро. Кроме того, каждое ребро снабжено ориентацией. Пусть $\mathcal{E}_v$ есть множество ребер, инцидентных вершине v (т. е. содержащих ее). Мы будем предполагать, что $\text{val}(\nu)$ (число ребер в $\mathcal{E}_v$) для любой вершины v конечно и положительно. Мы также предположим, что граф Γ является связным множеством. Это означает, что для любых точек $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$, существует путь $P(x, y) \subset \Gamma$ с конечным числом ребер, соединяющий x и y . Граф Γ является метрическим пространством с метрикой, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}^2$. Действие группы $\mathbb{Z}^n$, $n = 1, 2$, на Γ определяется как отображение $\Gamma \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$, $(x, \alpha) \rightarrow x + \alpha$, где $x + \alpha$ есть сумма в $\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что группа $\mathbb{Z}^n$ действует свободно на Γ . Более того, мы предположим, что ее действие является кокомпактным, т. е. $\Gamma/\mathbb{Z}^n$ есть компактное множество в соответствующей фактортопологии. Будем говорить, что граф Γ является периодическим относительно $\mathbb{Z}^n$, если удовлетворяются сформулированные выше условия. Пусть $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma/\mathbb{Z}^n$ — естественная проекция. Зафиксируем множество $\Gamma_0 \in \pi^{-1}(\Gamma/\mathbb{Z}^n)$, которое будем называть фундаментальной областью графа Γ относительно действия группы $\mathbb{Z}^n$. Мы обозначим через $L^p(\Gamma)$ пространство измеримых функций на Γ с нормой

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{j \in J} \int_{e_j} |u(x)|^p dl \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

где мера dl на Γ индуцируется линейной мерой Лебега на каждом ребре. Пусть $\mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ есть банахова алгебра всех ограниченных на $L^p(\Gamma)$ линейных операторов, а $\mathcal{K}(L^p(\Gamma))$ — двусторонний идеал в $\mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ всех компактных операторов. Обозначим через χ_X характеристическую функцию множества $X \subset \Gamma$ и через $\chi_X I$ оператор умножения на χ_X , действующий в $L^p(\Gamma)$.

3. Потенциалы простого и двойного слоя на периодических графах. Пусть $e = [\mu, \nu]$, $e^0 = (\mu, \nu)$ и $\mathcal{D}_e$ — область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная простой замкнутой кривой γ_e , проходящей через вершины μ, ν так, что $\mathcal{D}_e \supset e$.

Обозначим через $\mathcal{D}_e^+$ ($\mathcal{D}_e^-$) подмножество в $\mathcal{D}_e$, расположенное слева (справа) при движении вдоль ориентированного ребра e . Пусть n_t — единичный вектор внутренней нормали к e в точке $t \in e^0$ относительно $\mathcal{D}_e^+$ и $\partial_{n_t} = n_t \cdot \nabla$. Через $u_{\pm}(t) = \lim_{\mathcal{D}_e^{\pm} \ni x \rightarrow t \in e^0} u(x)$ мы обозначаем некасательный предел и через $[u(t)]_{t \in e^0} = u_+(t) - u_-(t)$ — скачок функции u в точке $t \in e^0$. Точно так же положим $\partial_{n_t}^{\pm} u(t) = \lim_{\mathcal{D}_e^{\pm} \ni x \rightarrow t \in e^0} \partial_{n_t} u(x)$.

Определим потенциал простого слоя на графе Γ формулой

$$(L_{\Gamma}\varphi)(x) = \int_{\Gamma} g(x, x - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^2, \varphi \in L^p(\Gamma),$$

где ядро $g(x, z)$ определено в теореме 1 для $n = 2$.

Предложение 1. Пусть $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Тогда $L_{\Gamma}\varphi$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$ и $L_{\Gamma}\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$.

Обозначим через T_{Γ} ограничение оператора L_{Γ} на граф Γ , т.е. оператор

$$(T_{\Gamma}\varphi)(t) = \int_{\Gamma} g(t, t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma.$$

Предложение 2. (a) $T_{\Gamma} \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$, $1 < p < \infty$.

(b) T_{Γ} есть локально компактный оператор в $L^p(\Gamma)$, т.е. $T_{\Gamma}\chi_X I, \chi_X T_{\Gamma} \in \mathcal{K}(L^p(\Gamma))$ для любого компактного множества $X \subset \Gamma$.

Потенциал двойного слоя на Γ определяется формулой

$$(M_{\Gamma}^t \varphi)(x) = \int_{\Gamma} (n_t \cdot \nabla_x) g(x, x - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

где n_t — единичный вектор внутренней нормали к ребру e в точке $t \in e^0 = \text{int } e$. Отметим, что оператор $(n_t \cdot \nabla_x) L_{\Gamma}$ принадлежит $OPS_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^2)$.

Предложение 3. (a) $(M_{\Gamma}^t \varphi)(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ для каждой функции $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$.

(b) Для почти всех точек $t \in e^0$ существуют некасательные пределы

$$\lim_{\mathcal{D}_e^{\pm} \ni x \rightarrow t \in e^0} (M_{\Gamma}^t \varphi)(x) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + (M_{\Gamma}\varphi)(t),$$

где

$$(M_{\Gamma}\varphi)(t) = \int_{\Gamma} (n_t \cdot \nabla_x) g(x, x - \tau)|_{x=t} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma \setminus \mathcal{V}.$$

(c) $M_{\Gamma} \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$, $1 < p < \infty$.

(d) M_{Γ} — локально компактный оператор на $\Gamma \setminus \mathcal{V}$, т.е. $M_{\Gamma}\chi_X I, \chi_X M_{\Gamma} \in \mathcal{K}(L^p(\Gamma))$ для любого компактного множества $X \subset \Gamma \setminus \mathcal{V}$.

4. Фредгольмовость граничных операторов. Будем искать решение проблемы дифракции (1)–(3) в форме $u(x) = (L_{\Gamma}\varphi)(x)$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, где $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Отметим, что u удовлетворяет уравнению (1) и является непрерывной функцией на $\mathbb{R}^2$. Более того, $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$. Применяя предложения 1 и 3, мы получаем следующее уравнение в $L^p(\Gamma)$, $p \in (1, \infty)$:

$$A_{\Gamma}\varphi =: (\gamma + \delta M_{\Gamma} + d T_{\Gamma})\varphi = f,$$

где $\gamma = (b^+ + b^-)/2$, $\delta = b^+ - b^-$, $b^\pm(t) = \lim_{\mathcal{D}_\varepsilon^\pm \ni x \rightarrow t \in e_0} b(x)$ и b, d — функции, взятые из условия (3). Так как $b \in PC(\mathbb{R}^2, \Gamma)$, $d \in PC(\Gamma, \mathcal{V})$, то коэффициенты γ, δ, d принадлежат $PC(\Gamma, \mathcal{V})$.

Для формулировки условий фредгольмовости оператора A_Γ в $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, мы нуждаемся в некоторых обозначениях и определениях. Пусть $v \in \mathcal{V}$, $F_v^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - v\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon\}$, $\{e_j^v\}_{j=1}^{\text{val}(v)}$ — ребра, инцидентные вершине v , и $e_j^v = F_v^\varepsilon \cap e_j^v$. Тогда

$$\varrho_j^v = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = v + (r \cos \theta_j^v, r \sin \theta_j^v), r \in [0, \varepsilon)\},$$

где $0 \leq \theta_1^v < \dots < \theta_{\text{val}(v)}^v < 2\pi$. Положим $f_j^v(r) := f(v + (r \cos \theta_j^v, r \sin \theta_j^v))$, $r \in [0, \varepsilon)$ и $f^v := (f_1^v, \dots, f_{\text{val}(v)}^v)$ для каждой функции f , определенной на $\Gamma \cap F_v^\varepsilon$. Введем следующую матрицу $s^v(\lambda) = (s_{j,k}^v(\lambda))_{j,k=1}^{\text{val}(v)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где

$$s_{j,k}^v(\lambda) := \varepsilon_k \cdot \begin{cases} \omega(2\pi + \theta_j^v - \theta_k^v, \lambda + i/p), & j < k, \\ 0, & j = k, \\ \omega(\theta_j^v - \theta_k^v, \lambda + i/p), & j > k, \end{cases}$$

причем $\omega: (0, \pi) \times (\mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ определяется формулой $\omega(\iota, \zeta) := \text{sh}(\pi - \iota)\zeta / \text{sh}(\pi\iota)$, $\iota \in (0, \pi)$, а $\varepsilon_k = 1$, если v — начальная точка ориентированного ребра e_k^v , и $\varepsilon_k = -1$, если v — его конечная точка.

Обозначим через V_h изометрический в $L^p(\Gamma)$ оператор сдвига: $V_h u(x) = u(x - h)$, $x \in \Gamma$, $h \in \mathbb{Z}^n$.

Определение 1 ([10], [8]). Пусть $A \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ и $\mathbb{Z}^n \ni h_m \rightarrow \infty$. Оператор $A^{h_m} \in \mathcal{B}(L^p(\Gamma))$ называется предельным оператором оператора A , определяемым последовательностью $\{h_m\}$, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(V_{-h_m} A V_{h_m} - A^{h_m}) \chi_X I\|_{\mathcal{B}(L^p(\Gamma))} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\chi_X (V_{-h_m} A V_{h_m} - A^{h_m})\|_{\mathcal{B}(L^p(\Gamma))} = 0$$

для любого компактного множества $X \subset \Gamma$.

Пусть $f \in PC(\Gamma, \mathcal{V})$ и $\mathbb{Z}^n \ni h_m \rightarrow \infty$. Как следует из теоремы Арцелы–Асколи и канторовского диагонального процесса, каждая последовательность $\{h_m\}$ содержит подпоследовательность $\{g_m\}$, такую, что $f|_{e_j}(x + g_m) \rightarrow f_j^g(x)$ равномерно по $x \in e_j \subset \Gamma$ для любого $j \in J$. Сопоставим последовательности $\{f_j^g\}_{j \in J}$ функцию $f^g \in PC(\Gamma, \mathcal{V})$, такую, что $f^g|_{e_j} = f_j^g$. Нетрудно убедиться, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f(x + g_m) - f^g(x)| = 0$ для каждого компактного множества $K \subset \Gamma$. Следовательно, $f^g I$ есть предельный оператор оператора fI , определяемый последовательностью $\{g_m\}$.

Теорема 2. Пусть ρ и a удовлетворяют условиям (i)–(iv), $b \in PC(\mathbb{R}^2, \Gamma)$, $d \in PC(\Gamma, \mathcal{V})$. Тогда $A_\Gamma: L^p(\Gamma) \rightarrow L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, является оператором Фредгольма в том и только том случае, когда

- (a) $\gamma(t) \neq 0$ для каждой точки $t \in \Gamma \setminus \mathcal{V}$;
- (b) для любого $t \in \mathcal{V}$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} |\det(\gamma_j^t(0) + \delta_j^t(0) s_{j,k}^t(\lambda))_{j,k=1}^{\text{val}(t)}| > 0;$$

- (c) все предельные операторы A_Γ^g оператора A_Γ обратимы в $L^p(\Gamma)$.

Наметим доказательство теоремы 2. Согласно локальному принципу Симоненко [11], $A_\Gamma: L^p(\Gamma) \rightarrow L^p(\Gamma)$ является фредгольмовым оператором, если и только если он локально фредгольмов в каждой точке $t \in \Gamma \cup \{\infty\}$ (см. определение локальной фредгольмовости в [11]). Условие (а) необходимо и достаточно для локальной фредгольмовости в точках $t \in \Gamma \setminus \mathcal{V}$. Пусть $t \in \mathcal{V}$. Введем изометрический оператор $\Phi_t: L^p(\Gamma \cap F_t^\varepsilon) \rightarrow L^p((0, \varepsilon), dr/r) \otimes \mathbb{C}^{\text{val}(t)}$ следующим образом:

$$(\Phi_t f)(r) = r^{1/p} f^t(r), \quad r \in (0, \varepsilon), \quad f \in L^p(\Gamma \cap F_t^\varepsilon),$$

и сопоставим оператору A_Γ и точке $t \in \mathcal{V}$ оператор $\Phi_t \chi_{\Gamma \cap F_t^\varepsilon} A_\Gamma \chi_{\Gamma \cap F_t^\varepsilon} \Phi_t^{-1} \in \mathcal{B}(L^p((0, \varepsilon), dr/r) \otimes \mathbb{C}^{\text{val}(t)})$. Оператор $\Phi_t \chi_{\Gamma \cap F_t^\varepsilon} A_\Gamma \chi_{\Gamma \cap F_t^\varepsilon} \Phi_t^{-1}$ локально эквивалентен (см. определение локальной эквивалентности в [11]) матричному оператору меллиновской свертки на $\mathbb{R}_+$ с символом $(\gamma_j^t(0) + \delta_j^t(0) s_{j,k}^t(\lambda))_{j,k=1}^{\text{val}(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Условие (b) является необходимым и достаточным для обратимости упомянутого оператора меллиновской свертки. Таким образом, условие (b) необходимо и достаточно для локальной фредгольмовости оператора A_Γ в точке $t \in \mathcal{V}$. Условие (c) необходимо и достаточно для локальной фредгольмовости на бесконечности [8, с. 207]. Отметим, что предельные операторы A_Γ^g имеют форму $A_\Gamma^g = \gamma^g I + \delta^g M_\Gamma^g + d^g T_\Gamma^g$, где γ^g , δ^g , d^g являются предельными функциями функций γ , δ , d , определяемыми последовательностью $\{g_m\}$, M_Γ^g , T_Γ^g — операторы потенциала двойного и простого слоя, определяемые фундаментальным решением $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{a^g}|x|)$ двумерного оператора Гельмгольца $\Delta + a^g I$ на $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$T_\Gamma^g v(t) = \frac{i}{4} \int_\Gamma H_0^{(1)}(\sqrt{a^g}|t - \tau|) v(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

$$M_\Gamma^g v(t) = \frac{i}{4} \int_\Gamma \frac{\partial H_0^{(1)}(\sqrt{a^g}|t - \tau|)}{\partial n_t} v(\tau) d\tau, \quad t \in \Gamma \setminus \mathcal{V},$$

где $a^g = \lim_{m \rightarrow \infty} a(g_m) \in \mathbb{C}$, а последовательность $\{g_m\}$ такова, что предел существует. Ветвь корня выбирается так, что $\text{Im} \sqrt{a^g} > 0$. Структура предельных операторов T_Γ^g , M_Γ^g вытекает из того факта, что предельными операторами для оператора Гельмгольца $\mathcal{G}$ с коэффициентами из $SO^\infty(\mathbb{R}^2)$ являются операторы $\Delta + a^g I$. (Структура предельных операторов для дифференциальных операторов описана в [9].)

Замечание. Пусть $f \in L^\infty(\Gamma)$. Будем говорить, что f медленно осциллирует на бесконечности и принадлежит классу $SO(\Gamma)$, если для любого $\beta \in \mathbb{Z}^n$ и $\tau \in \Gamma_0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (f(\tau + \beta + \alpha) - f(\tau + \alpha)) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что если для последовательности $\{h_m\}$, $\mathbb{Z}^n \ni h_m \rightarrow \infty$, предельная функция f^h существует, то из условия (4) следует, что f^h есть константа на каждой орбите $\Gamma^\tau = \{t \in \Gamma : t = \tau + \alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$, $\tau \in \Gamma_0$, т.е. f^h есть периодическая функция относительно $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, если γ , δ , $d \in PC(\Gamma, \mathcal{V}) \cap SO(\Gamma)$, то предельные функции γ^g , δ^g , d^g существуют и являются периодическими относительно группы $\mathbb{Z}^n$. Тогда предельные операторы A_Γ^g инвариантны относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, применение преобразования Флоке для исследования обратимости оператора A_Γ^g (см. [5], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, Функциональный анализ и его прил., **43:3** (2009), 3–25. [2] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH Verlag, Berlin etc., 1999. [3] D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983. [4] A. Kirsch, in: Inverse Problems in Math. Physics, Lect. Note in Physics, vol. 422, 1993, 87–102. [5] P. Kuchment, Waves Random Media, **14:1** (2004), 107–128. [6] P. Kuchment, J. Phys. A, **38:22** (2005), 4887–4900. [7] I. L. Garanovich, S. Longhi, A. Sukhorukov, Yu. Kivshar, Physics Reports, **518:1** (2012), 1–79. [8] V. S. Rabinovich, S. Roch, Integral Equations Operator Theory, **72:2** (2012), 197–217. [9] V. Rabinovich, S. Roch, Georgian Math. J., **15:2** (2008), 333–351. [10] V. Rabinovich, S. Roch, B. Silbermann, *Limit Operators and Their Applications in Operator Theory*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 150, Birkhäuser, Basel, 2004. [11] И. Б. Симоненко, Изв. АН СССР, сер. матем., **29:3** (1965), 567–586. [12] М. А. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, Наука, М., 1978.

Национальный политехнический институт Мексики
e-mail: vladimir.rabinovich@gmail.com

Поступило в редакцию
22 ноября 2012 г.

УДК 515.16

Топология примыканий лагранжевых особенностей типов A и D

© 2014. В. Д. СЕДЫХ*

Мы вычисляем гомотопический тип примыканий мультиособенностей в образе устойчивого лагранжева отображения с особенностями типов $A_\mu^\pm$ и $D_\mu^\pm$. Распадения вещественных особенностей изучались и в других работах, см., например, [2] и [6].

1. Особенности лагранжевых отображений. Сначала напомним основные факты теории лагранжевых особенностей; подробности см. в [1].

Пусть E — гладкое $2n$ -мерное многообразие с симплектической структурой ω . Гладкое n -мерное подмногообразие L в E называется лагранжевым, если $\omega|_L = 0$. Гладкое расслоение $\rho: E \rightarrow V$ над гладким n -мерным многообразием V называется лагранжевым, если все его слои являются лагранжевыми подмногообразиями в E .

Пусть ρ — лагранжево расслоение и L — лагранжево подмногообразие в E . Тогда отображение $f = \rho|_L: L \rightarrow V$ называется лагранжевым. Мы рассматриваем лишь собственные лагранжевы отображения.

Согласно теореме Арнольда, простые устойчивые особенности лагранжевых отображений исчерпываются списком $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_6^\pm$, E_7 , E_8 . А именно, всякий простой устойчивый росток лагранжева отображения лагранжево эквивалентен ростку в нуле лагранжева отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto (-\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})/\partial \mathbf{t}, \mathbf{q})$, где $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$, $\mathbf{q} = (q_{k+1}, \dots, q_n)$, а $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ — гладкая функция следующего

*Работа частично поддержана грантом НШ-4850.2012.1.