Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Неравенство Хинчина на множествах малой меры, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 4, 1–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:58:36

Неравенство Хинчина на множествах малой меры*

© 2014. С. В. АСТАШКИН

В статье доказан следующий результат. Пусть r_i — функции Радемахера, т. е. $r_i(t) := \text{sign} \sin(2^i \pi t)$, $t \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$. Если множество $E \subset [0, 1]$ таково, что $m(E \cap (a, b)) > 0$ для каждого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$, то для некоторой константы $\gamma = \gamma(E) > 0$, зависящей только от E , и всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$ выполнено неравенство

$$\int_E \left| \sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t) \right| dt \geq \gamma \left(\sum_{i=1}^\infty a_i^2 \right)^{1/2}.$$

В качестве следствия получен вариант весового неравенства Хинчина.

§1. Введение

Согласно классическому неравенству Хинчина [1], для каждого $p > 0$ существуют такие константы $k_p > 0$ и $K_p > 0$, что для любой последовательности $a = (a_i)_{i=1}^\infty \in \ell^2$

$$k_p \|a\|_2 \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq K_p \|a\|_2, \quad (1)$$

где $\|a\|_2 := (\sum_{i=1}^\infty a_i^2)^{1/2}$, а r_i — функции Радемахера, т. е. $r_i(t) := \text{sign} \sin(2^i \pi t)$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots$. Мы покажем здесь, что неравенство (1) остается верным при интегрировании по произвольному множеству $E \subset [0, 1]$, такому, что $m(E \cap (a, b)) > 0$ для каждого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$. Легко видеть, что для этого достаточно доказать следующую нижнюю L_p -оценку: для каждого $p > 0$ и любого множества $E \subset [0, 1]$ с указанным свойством существует константа $\gamma = \gamma(E, p) > 0$, такая, что для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$

$$\left(\int_E \left| \sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \geq \gamma \|a\|_2. \quad (2)$$

Так как нетривиальные суммы Радемахера могут обращаться в нуль на множествах положительной меры, неравенство (2) может выполняться лишь в том случае, когда E удовлетворяет определенным условиям. Из результатов работы [2], в частности, следует, что (2) имеет место, если $m(E) > 1/2$. При этом константа $1/2$ точна, так как для функции $g = r_1 + r_2$ имеем $m(\text{supp}(g)) = 1/2$ (через $\text{supp}(f)$ будет обозначаться носитель измеримой функции f). Заметим, что по теореме Стечкина и Ульянова [3], если $g = \sum_{i=1}^\infty a_i r_i$ и $m(\text{supp}(g)) < 1/2$, то $a_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Таким образом, если речь идет об условиях на меру множества E , неравенство $m(E) > 1/2$ является не только достаточным, но и необходимым для выполнения неравенства (2). В то же время в [2] был

*Работа частично поддержана РФФИ, грант 12-01-00198.

выявлен факт существования множеств сколь угодно малой меры, для которых по-прежнему справедлива эта оценка. Вместе с тем представленная там конструкция имеет весьма специальный характер; в частности, от множеств требуется симметричное расположение внутри двоичных интервалов некоторого фиксированного ранга (см. определение семейства $\mathcal{E}$ в конце работы).

Заключительная часть статьи посвящена обсуждению весового неравенства Хинчина. Сформулировано утверждение, усиливающее основной результат из [2] в случае L_p -пространств. Многочисленные применения неравенства Хинчина и различных его вариантов дают основание надеяться, что оценки, полученные в теоремах 1 и 2 этой работы и интересные, на наш взгляд, сами по себе, будут также востребованы.

Теорема 1 содержит ответ на вопрос С. В. Конягина, которому автор выражает свою благодарность.

Всюду далее m — мера Лебега, $\text{card } B$ — число элементов конечного множества B , а Δ_k^n — двоичные интервалы из $[0, 1]$, т. е. $\Delta_k^n = [(k-1)/2^n, k/2^n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, 2^n$.

§2. Нижняя оценка L_p -норм сумм Радемахера на множествах малой меры

Теорема 1. *Предположим, что множество $E \subset [0, 1]$ обладает тем свойством, что $m(E \cap (a, b)) > 0$ для каждого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$. Тогда для каждого $p > 0$ существует константа $\gamma = \gamma(E, p) > 0$, такая, что для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$ выполнено неравенство (2).*

Для доказательства нам понадобится следующая оценка снизу для распределений сумм Радемахера.

Лемма 1. *Для произвольного $0 \leq b \leq 1/\sqrt{2}$ и всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$*

$$m\left(\left\{t \in [0, 1] : \left|\sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t)\right| \geq b\|a\|_2\right\}\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - b\right)^2. \quad (3)$$

Доказательство. Хорошо известно [4], что оптимальное значение константы k_1 в неравенстве (1) равно $1/\sqrt{2}$. Таким образом, для каждой последовательности $a = (a_i) \in \ell^2$

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^\infty a_i r_i(t)\right| dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|a\|_2. \quad (4)$$

Напомним также следующий вариант неравенства Пэли–Зигмунда (см. [5, лемма V.8.26] или [6, лемма 1]): для произвольных $d \geq b \geq 0$ и любой неотрицательной случайной величины f на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{P})$, такой, что $\int_\Omega f d\mathbb{P} \geq d$ и $\int_\Omega f^2 d\mathbb{P} = 1$, имеет место неравенство

$$\mathbb{P}(\{f \geq b\}) \geq (d - b)^2.$$

Ввиду (4) это утверждение можно применить к функции $f := |\sum_{i=1}^\infty a_i r_i|/\|a\|_2$ на $[0, 1]$ и $d = 1/\sqrt{2}$. В итоге для каждого $0 \leq b \leq 1/\sqrt{2}$ получим неравенство (3). $\square$

Доказательство теоремы 1. Почти все точки множества положительной меры — его точки плотности. Поэтому для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $k_0 = k_0(n)$, что

$$m(E \cap \Delta_{k_0}^n) > \frac{5}{6} \cdot 2^{-n}. \quad (5)$$

Зафиксировав одно из таких n , через $\delta = \delta(E)$ обозначим $\min_{k=1, \dots, 2^n} 2^n m(E \cap \Delta_k^n)$. Так как по условию $\delta > 0$, можно положить $A := 2^{3+6/p} \delta^{-1/p}$. Наконец, пусть $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i$, где $a = (a_i) \in \ell^2$, и

$$Q_{E,b} := \{t \in E : |g(t)| \geq b \|a\|_2\} \quad (b > 0).$$

Мы рассмотрим два случая в зависимости от того, где находится основная «масса» нормы $\|a\|_2$ данной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$. Если в «хвосте», то наши аргументы будут основаны на том, что большая часть отрезка $\Delta_{k_0}^n$ (по мере) лежит в множестве E (см. неравенство (5)). В противоположном случае, когда норма $\|a\|_2$ сосредоточена в начале, будет использоваться тот факт, что определенная часть множества E находится в каждом из отрезков Δ_k^n , $k = 1, \dots, 2^n$, т. е. что $\delta > 0$.

Итак, предположим сначала, что

$$\|a\|_2 \leq A \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Тогда, так как сумма $\sum_{i=1}^n a_i r_i$ постоянна на интервале $\Delta_{k_0}^n$ (и, скажем, равна a_0), то

$$\begin{aligned} m(Q_{E,b}) &\geq m\left(\left\{t \in E : |g(t)| \geq Ab \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}\right\}\right) \\ &\geq m\left(\left\{t \in E \cap \Delta_{k_0}^n : \left|a_0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq Ab \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}\right\}\right). \end{aligned}$$

Обозначим через F объединение подмножеств двоичных отрезков Δ_k^n , $k = 1, \dots, 2^n$, получающихся сдвигом множества $E \cap \Delta_{k_0}^n$ на числа, кратные 2^{-n} . Тогда (см. (5)) $m(F) = 2^n m(E \cap \Delta_{k_0}^n) > 5/6$ и ввиду определения функций Радемахера и предыдущего неравенства

$$m(Q_{E,b}) \geq 2^{-n} m\left(\left\{t \in F : \left|a_0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq Ab \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}\right\}\right). \quad (7)$$

С другой стороны, из (3) следует, что для $0 \leq b \leq 1/(\sqrt{2}A)$

$$m\left(\left\{t \in [0, 1] : \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t) \right| \geq Ab \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}\right\}\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - Ab\right)^2,$$

откуда, учитывая симметричность распределения сумм Радемахера на $[0, 1]$, получаем

$$m\left(\left\{t \in [0, 1] : \left|a_0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq Ab \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}\right\}\right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - Ab\right)^2.$$

Если

$$b_0 := \frac{1}{A\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad (8)$$

то $(1/\sqrt{2} - Ab_0)^2 = 2/5$, и поэтому ввиду предыдущего неравенства

$$\begin{aligned} m\left(\left\{t \in F : \left|a_0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq Ab_0 \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2\right)^{1/2}\right\}\right) &\geq m(F) \\ + m\left(\left\{t \in [0, 1] : \left|a_0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq Ab_0 \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2\right)^{1/2}\right\}\right) - 1 &> \frac{5}{6} + \frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7) следует, что $m(Q_{E,b_0}) \geq 2^{-n}/30$, и, значит,

$$\int_E |g(t)|^p dt \geq \int_{Q_{E,b_0}} |g(t)|^p dt \geq \frac{b_0^p 2^{-n}}{30} \|a\|_2^p.$$

В итоге получаем (2) с $\gamma = \gamma_1 = b_0 2^{-n/p}/30^{1/p}$, где b_0 определяется равенством (8) (и зависит только от E).

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (6) не выполнено. Так как $A \geq 2$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

откуда следует, что

$$m(Q_{E,b}) \geq m\left(\left\{t \in E : |g(t)| \geq \sqrt{2}b \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\right\}\right). \quad (9)$$

Сумма $\sum_{i=1}^n a_i r_i$ постоянна на каждом интервале Δ_k^n ($k = 1, \dots, 2^n$). Поэтому, применяя неравенство (3) еще раз, для некоторого множества индексов $I \subseteq \{1, \dots, 2^n\}$ и любого $0 \leq b \leq 1/2$ получим

$$\begin{aligned} m\left(\left\{t \in [0, 1] : \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right| \geq \sqrt{2}b \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\right\}\right) \\ = \sum_{i \in I} m(\Delta_i^n) = \text{card } I \cdot 2^{-n} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}b\right)^2, \end{aligned}$$

и, следовательно, полагая $b = 1/4$, приходим к оценке

$$\text{card } I \geq 2^{n-3}.$$

Если теперь b_k — значение суммы $\sum_{i=1}^n a_i r_i$ на интервале Δ_k^n ($k = 1, \dots, 2^n$), то $|b_k| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$ для каждого $k \in I$. Тем самым для любого $t \in \Delta_k^n$ ($k \in I$) выполнено, по крайней мере, одно из неравенств

$$\left|b_k + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \quad \text{или} \quad \left|b_k - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}.$$

Для каждого $k \in I$ рассмотрим множества

$$U_k := \left\{ t \in E \cap \Delta_k^n : \left| b_k + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \right\},$$

$$\tilde{U}_k := \left\{ t \in E \cap \Delta_k^n : \left| b_k - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t) \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

Из определения δ и предыдущих рассуждений следует, что $\max(m(U_k), m(\tilde{U}_k)) \geq \delta \cdot 2^{-n-1}$ для любого $k \in I$ и, значит, $I = I_1 \cup I_2$, где

$$I_1 := \{k \in I : m(U_k) \geq \delta \cdot 2^{-n-1}\} \quad \text{и} \quad I_2 := \{k \in I : m(\tilde{U}_k) \geq \delta \cdot 2^{-n-1}\}.$$

Таким образом, по крайней мере, одна из величин, $\text{card } I_1$ или $\text{card } I_2$, больше, чем 2^{n-4} . В первом случае ввиду (9)

$$\begin{aligned} m(Q_{E,1/4}) &\geq \sum_{k \in I_1} m \left(\left\{ t \in E \cap \Delta_k^n : |g(t)| \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \right\} \right) \\ &= \sum_{k \in I_1} m(U_k) \geq \delta \cdot 2^{-n-1} \text{card } I_1 \geq \delta \cdot 2^{-5}. \end{aligned} \quad (10)$$

Во втором аналогичное неравенство

$$m(\tilde{Q}_{E,1/4}) > \delta \cdot 2^{-5} \quad (11)$$

точно так же справедливо для функции $\tilde{g} := \sum_{i=1}^n a_i r_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i$ и множества $\tilde{Q}_{E,1/4} := \{t \in E : |\tilde{g}(t)| \geq \frac{1}{4} \|a\|_2\}$. Если выполнено (10), сразу получаем, что

$$\int_E |g(t)|^p dt \geq \int_{Q_{E,1/4}} |g(t)|^p dt \geq 4^{-p} \|a\|_2^p m(Q_{E,1/4}) \geq \delta \cdot 2^{-5-2p} \|a\|_2^p,$$

т. е. (2) справедливо с $\gamma = \delta^{1/p} \cdot 2^{-2-5/p}$.

Пусть теперь имеет место (11). Тогда, как и ранее,

$$\int_E |\tilde{g}(t)|^p dt \geq \delta \cdot 2^{-5-2p} \|a\|_2^p.$$

Кроме того, так как (6) в рассматриваемом случае не выполняется, то

$$\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \leq A^{-1} \|a\|_2.$$

Не ограничивая общности, предположим, что $0 < p \leq 1$. Тогда из последних двух неравенств, правой части неравенства (1) с $K_p = 1$, а также определения

постоянной A следует, что

$$\begin{aligned} \int_E |g(t)|^p dt &\geq \int_E |\tilde{g}(t)|^p dt - 2^p \int_0^1 \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i r_i(t) \right|^p dt \\ &\geq \delta \cdot 2^{-5-2p} \|a\|_2^p - 2^p \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^2 \right)^{p/2} \\ &\geq (\delta \cdot 2^{-5-2p} - 2^p A^{-p}) \|a\|_2^p = \delta 2^{-6-2p} \|a\|_2^p. \end{aligned}$$

Итак, в этом случае неравенство (2) выполнено с $\gamma = \gamma_2 = \delta^{1/p} \cdot 2^{-2-6/p}$. Ввиду того, что $\gamma_1 < \gamma_2$, положим $\gamma = \gamma_1 = b_0 2^{-n/p} / 30^{1/p}$, где b_0 определяется равенством (8). Так как эта константа зависит только от E (выбор n , конечно, определяется этим множеством), теорема доказана. $\square$

Замечание 1. В доказательстве имеется определенный произвол с выбором $n \in \mathbb{N}$, от чего зависит величина константы γ . Легко видеть, что функция $\gamma(E, p, n) = b_0 2^{-n/p} / 30^{1/p}$ монотонно убывает по $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для того, чтобы получить неравенство (2) с наибольшей константой, надо взять наименьшее n , для которого (5) выполнено с некоторым $1 \leq k_0 \leq 2^n$. Тогда ее величина будет зависеть как от этого n , так и от $\delta(n)$, т. е. от того, насколько равномерно «разбросано» множество E по двоичным интервалам ранга n .

Замечание 2. Еще одна возможность распространения неравенства (1), теперь уже на произвольные подмножества из $[0, 1]$ положительной меры, приводит к так называемому локальному варианту неравенства Хинчина. Правда, в этом случае мы вынуждены рассматривать не полные суммы Радемахера, а только их «хвосты». Впервые подобное неравенство было получено Зигмундом для пространства $L_2[0, 1]$ [7] (см. также [5, лемма V.8.3]). Он доказал существование таких констант $A'_2 > 0$ и $B'_2 > 0$, что для каждого множества $E \subset [0, 1]$, $m(E) > 0$, найдется $N = N(E)$, для которого

$$A'_2 \left(\sum_{i=N}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{m(E)} \int_E \left| \sum_{i=N}^{\infty} a_i r_i(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq B'_2 \left(\sum_{i=N}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2},$$

где $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность из ℓ^2 . Этот результат был затем распространен на $L_p[0, 1]$, $0 < p < \infty$, в [8], а также на пространства экспоненциальной интегрируемости ([9], [10]). Наконец, в [11] локальный вариант неравенства Хинчина доказан для широкого класса симметричных пространств (их определение см., например, в [12] или [13]).

§3. Весовое неравенство Хинчина в L_p

В 2011 г. в [14] было доказано следующее обобщение неравенства (1): если w — вес на $[0, 1]$ (т. е. $w(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$), удовлетворяющий условиям (а) $w \in L_q$ для некоторого $q > p$ и (б) $m(\text{supp}(w)) > 2/3$, то существует константа $C > 0$, зависящая от p и w , такая, что для каждой последовательности $a = (a_i) \in \ell^2$

$$C^{-1} \|a\|_2 \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t) \right|^p |w(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq C \|a\|_2. \quad (12)$$

Последнее утверждение было усилено сразу в нескольких направлениях в работе [2]. Прежде всего, нетрудно заметить, что неравенство справа в (12) выполнено тогда и только тогда, когда вес w принадлежит пространству радемахеровских мультипликаторов $\Lambda(L_p)$, состоящему из всех измеримых функций f , таких, что $f \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i \in L_p[0, 1]$ для любой последовательности $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$. Если $1 \leq p < \infty$, то с нормой

$$\|f\|_{\Lambda(L_p)} := \sup \left\{ \left\| f \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i \right\|_{L_p} : \|a\|_2 \leq 1 \right\}$$

$\Lambda(L_p)$ становится банаховой решеткой на $[0, 1]$ (аналогичное определение для произвольного симметричного пространства см. в [2]). Как показано в [15, теорема 2.8 и пример 2.12], для каждого $1 \leq p < \infty$ имеет место непрерывное вложение $\Lambda(L_p) \supset L_p(\ln L)^{1/2}$, где $L_p(\ln L)^{1/2}$ — пространство Зигмунда, состоящее из таких функций f , что

$$\|f\|_{L_p(\ln L)^{1/2}} := \int_0^1 (|f(t)| \ln^{1/2}(2 + |f(t)|))^p dt < \infty.$$

В результате (см. [2]) неравенство (12) выполнено при более слабом, чем (а), условии $w \in L_p(\ln L)^{1/2}$. Кроме того, второе из условий, (b), заменено в той же работе на следующее, менее ограничительное: $m(\text{supp}(w)) > 1/2$, которое уже неумлучшаемо, если речь идет об условиях на меру носителя w (см. введение). И наконец, в [2] было показано, что (12) может выполняться для весов w с носителями сколь угодно малой меры. А именно, там был введен следующий класс множеств.

Будем говорить, что измеримое множество $E \subset [0, 1]$ принадлежит классу $\mathcal{E}$, если существуют $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 2^{-n-2})$, $\delta \in (0, 1)$ и $\gamma \in (1/2, 1)$, такие, что выполнены следующие условия:

(i) для некоторого множества $I \subset \{1, \dots, 2^n\}$, $\text{card } I > \gamma 2^n$, имеем (а) $m(E \cap \Delta_k^n) > \delta$ и (b) пересечение $E \cap \Delta_k^n$ симметрично относительно середины отрезка Δ_k^n ;

(ii) найдется k_0 , $1 \leq k_0 \leq 2^n$, такое, что $m(E \cap \Delta_{k_0}^n) > \varepsilon + 3 \cdot 2^{-n-2}$.

Через $\mathcal{F}$ обозначим семейство множеств, удовлетворяющих условиям (i)(а) и (ii) приведенного определения (условие симметричности (i)(b) может не выполняться). Ясно, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. В частности, если множество E , как в теореме 1, обладает тем свойством, что $m(E \cap (a, b)) > 0$ для каждого интервала $(a, b) \subset [0, 1]$, то $E \in \mathcal{F}$, но в то же время, конечно, может оказаться, что $E \notin \mathcal{E}$.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Для любых $w \in L_p(\ln L)^{1/2}$ и $\eta > 0$ положим

$$M_\eta(w) := \{t \in [0, 1] : |w(t)| \geq \eta \|w\|_{L_p(\ln L)^{1/2}}\}.$$

Используя те же рассуждения, что и в конце доказательства теоремы 1 (см. также доказательство второй части теоремы 1 в [2]), получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что функция $w \in L_p(\ln L)^{1/2}$ такова, что для некоторого $\eta > 0$ множество $M_\eta(w)$ содержит некоторое множество $F \in \mathcal{F}$. Тогда для каждой последовательности $a = (a_i) \in \ell^2$

справедливо весовое неравенство Хинчина

$$C_w \eta \|w\|_{L_p(\ln L)^{1/2}} \|a\|_2 \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i r_i(t) \right|^p |w(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq C_p \|w\|_{L_p(\ln L)^{1/2}} \|a\|_2,$$

где C_p зависит только от p , а C_w — от w .

Теорема 2 усиливает второе утверждение теоремы 1 из [2] для случая L_p -пространств, которое доказано там для более узкого, чем $\mathcal{F}$, семейства $\mathcal{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Khintchine, *Über dyadische Brüche*, Math. Z., **18**:1 (1923), 109–116.
- [2] S. V. Astashkin, G. P. Curbera, *A weighted Khintchine inequality*, Revista Mat. Iberoam., **30**:1 (2014), 237–246.
- [3] С. Б. Стечкин, П. Л. Ульянов, *О множествах единственности*, Изв. АН СССР, сер. матем., **26**:2 (1962), 211–222.
- [4] S. J. Szarek, *On the best constants in the Khintchin inequality*, Studia Math., **58**:2 (1976), 197–208.
- [5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды, т. I*, Мир, М., 1965.
- [6] D. L. Burkholder, *Independent sequences with the Stein property*, Ann. Math. Statist., **39**:4 (1968), 1282–1288.
- [7] A. Zygmund, *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Math., **16** (1930), 90–107.
- [8] Y. Sagher, K. Ch. Zhou, *A local version of a theorem of Khintchin*, in: Analysis and Partial Differential Equations, Lect. Notes in Pure and Applied Math., vol. 122, Dekker, New York, 1990, 327–330.
- [9] Y. Sagher, K. Zhou, *Exponential integrability of Rademacher series*, in: Convergence in Ergodic Theory and Probability, de Gruyter, Berlin, 1996, 389–395.
- [10] J. Carrillo-Alanís, *On local Khintchine inequalities for spaces of exponential integrability*, Proc. Amer. Math. Soc., **139**:8 (2011), 2753–2757.
- [11] S. V. Astashkin, G. P. Curbera, *Local Khintchine inequality in rearrangement invariant spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., DOI: 10.1007/s10231-013-0391-1.
- [12] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [13] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
- [14] M. Veraar, *On Khintchine inequalities with a weight*, Proc. Amer. Math. Soc., **138**:11 (2011), 4119–4121.
- [15] S. V. Astashkin, G. P. Curbera, *Symmetric kernel of Rademacher multiplier spaces*, J. Funct. Anal., **226**:1 (2005), 173–192.