Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кужель, Об элементах нестационарной теории рассеяния
для одного класса дифференциально-операторных уравнений, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 77–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:39:14

Рассмотрим невырожденную проекцию ориентированного узла на плоскость. Пронумеруем n двойных точек проекции и $n + 2$ областей (связные компоненты дополнения). Определим $n \times (n + 2)$ -матрицу, строки которой отвечают вершинам, а столбцы — областям. Элемент этой матрицы, отвечающий паре вершина–область, не равен нулю, только если область примыкает к вершине. Назовем этот элемент весом вершины в области и определим его по правилу

$$\begin{array}{c} \swarrow -1 \searrow \\ t \quad 1 \\ \swarrow -t \searrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} \swarrow t \searrow \\ -t \quad -1 \\ \swarrow 1 \searrow \end{array}$$

Результат Александра состоит в том, что $n \times n$ -минор этой матрицы, полученный вычеркиванием любой пары столбцов, отвечающих соседним областям, с точностью до множителя $\pm t^m$ не зависит от вычеркнутой пары столбцов и является инвариантом узла.

Фиксируем пару соседних областей (будем считать, что они имеют номера $n + 1$ и $n + 2$) и назовем оставшиеся области допустимыми. Определим «критическую точку функции Морса» как выбор в каждой вершине одной из примыкающих к ней допустимых областей, причем каждая допустимая область должна быть выбрана. Весом «критической точки» назовем произведение весов всех вершин в выбранных областях и знака перестановки, сопоставляющей номеру каждой вершины номер выбранной в этой вершине области. Определим индекс «критической точки» как число вершин, для которых вес выбранной области равен $\pm t$. Тогда из формулы стандартного разложения минора в сумму по перестановкам, очевидно, следует, что каждый коэффициент полинома Александра равен сумме весов всех «критических точек» соответствующего индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Наука, М., 1984.
2. Ильюта Г. Г. УМН, **42**, вып. 2, 227–228 (1987).
3. Хованский А. Г. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 1, 50–61 (1986).
4. A'Campo N. Comm. Math. Helv., **50**, No. 2, 233–248 (1975).
5. Alexander J. W. Trans. Amer. Math. Soc., **30**, 275–306 (1928).
6. Hibi T. Sugaku Expositions, **8**, No. 2, 145–163 (1995).
7. Solomon L. J. Algebra, **168**, 521–524 (1994).

Независимый московский университет

Поступило в редакцию
15 декабря 1998 г.

УДК 517.432

Об элементах нестационарной теории рассеяния для одного класса дифференциально-операторных уравнений*

© 2000. С. А. Кужель

1. Введение. Принципиальным моментом в развитии нестационарной теории рассеяния для дифференциально-операторного уравнения

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

*Эта работа частично поддержана CRDF, грант UM1-2090.

где L — самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, является определение множества «невозмущенных» операторов L , задающих в (1) *a priori* свободную эволюцию. Сформулируем определение таких операторов в форме, обеспечивающей возможность применения изложенных ниже абстрактных результатов для изучения возмущений в ограниченной области классического волнового уравнения $u_{tt} = \Delta u$.

Пусть B — простой максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда B^2 — плотно определенный в $\mathfrak{H}$ симметрический оператор с индексом дефекта $\langle m, m \rangle$, где $m \leq \infty$ — ненулевое дефектное число оператора B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Самосопряженное расширение L оператора B^2 будем называть *невозмущенным*, если при всех $u \in D(L)$ справедливо равенство $(Lu, u) = \|B^*u\|^2$.

Множество всех невозмущенных расширений при фиксированном операторе B обозначим через $\mathfrak{M}_B$. Это множество содержит по крайней мере два элемента: расширения Фридрихса $L_\mu = B^*B$ и Крейна $L_M = BB^*$. Его полное описание можно найти в [1, 2].

Уравнение (1) с произвольным невозмущенным оператором L в правой части будем называть *абстрактным волновым уравнением*. В [3] указан вид оператора B в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, для которого свободный Лапласиан $-\Delta$, $D(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$, является невозмущенным, а в [1] показано, что с точки зрения подхода Лакса–Филлипса [4] в теории рассеяния абстрактное волновое уравнение и классическое невозмущенное волновое уравнение имеют похожие свойства. Поэтому естественно считать, что абстрактное волновое уравнение определяет свободную эволюцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $\tilde{L}$, действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$, будем называть *возмущенным*, если $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ и $\tilde{L}$ является положительным самосопряженным расширением оператора B^2 . Возмущенный оператор $\tilde{L}$ называется *0-возмущенным*, если $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$.

Определим возмущенную эволюцию при помощи уравнения (1) с возмущенным оператором $\tilde{L}$ в правой части. Выбирая оператор B в различных функциональных пространствах, мы получаем [1, 2] конкретные реализации как абстрактного волнового уравнения (парциальное волновое уравнение, волновое уравнение в $\mathbb{R}^n$ и т. п.), так и его возмущений (препятствия, потенциалы, неоднородности). Отметим, что в случае волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ (нечетное $n > 1$) примерами такой реализации являются как локализованные в конечной области возмущения волнового уравнения, так и некоторые классы возмущений с неограниченным носителем [1].

Пусть L — произвольный невозмущенный оператор в $\mathfrak{H}$. Пополнение линейного пространства $D(L)$ по норме $\|u\|_L^2 := (Lu, u)$ обозначим через $\mathfrak{H}_L$. В энергетическом пространстве $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ абстрактное волновое уравнение естественным образом определяет унитарную группу $W_L(t)$ решений задачи Коши. Генератор этой группы имеет лебегов спектр [1, 2]. Аналогично, возмущенное уравнение (1) определяет унитарную (в энергетическом пространстве $H_{\tilde{L}} = \tilde{\mathfrak{H}}_L \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$) группу $W_{\tilde{L}}(t)$ решений задачи Коши.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из [2, 3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть операторы L и $\tilde{L}$ являются невозмущенным и возмущенным расширениями оператора B^2 соответственно. Тогда волновые операторы $\Omega_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_{\tilde{L}}(-t)W_L(t)$ существуют. Если оператор $\tilde{L}$ является 0-возмущенным, то волновые операторы $\Omega_{\pm}$ являются полными.

В [1] построено унитарное отображение F пространства H_L на $L_2(\mathbb{R}, N)$, которое задает спектральное представление для невозмущенной группы $W_L(t)$. Это представление является единственным с точностью до изоморфизма вспомогательного гильбертова пространства N , и размерность пространства N равна ненулевому дефектному числу оператора B . Оператор рассеяния в спектральном представлении $S = F\Omega_+^*\Omega_-F^{-1}$ можно записать в виде оператора умножения на функцию $S = S(\delta)$ ($\delta \in \mathbb{R}$), значениями которой являются сжимающие операторы в N . Функция $S(\delta)$ называется *матрицей рассеяния* (м.р.) для возмущенной группы $W_{\tilde{L}}(t)$. Понятно, что м.р. $S(\delta)$ определяется с точностью до изоморфизма пространства N . В дальнейшем мы будем отождествлять такие м.р. Следующее утверждение вытекает из [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Вид м.р. $S(\delta)$ для возмущенной группы $W_{\tilde{L}}$ не зависит от выбора невозмущенного расширения $L \in \mathfrak{M}_B$.

Для возмущенной группы $W_{\tilde{L}}(t)$ можно построить, в терминах оператора B , уходящее и приходящее подпространства [1, 2]. В силу теории Лакса–Филлипса [4] это означает, что м.р. $S(\delta)$ для группы $W_{\tilde{L}}(t)$ является граничным значением в смысле сильной сходимости аналитической в нижней полуплоскости сжимающей операторнозначной функции $S(z)$. Свойства функции $S(z)$ тесно связаны со свойствами возмущенного оператора $\tilde{L}$. Целью настоящей заметки является исследование этой связи.

2. Прямая задача. По заданному возмущенному оператору $\tilde{L}$ построим аналитическое продолжение $S(z)$ м.р. $S(\delta)$.

В [5] показано, что для любого z из нижней полуплоскости операторы $L_z = B^{*2}|_{D(L_z)}$, $D(L_z) = P(\tilde{L} - z^2I)^{-1}\mathfrak{H}$ (P — ортопроектор в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$), корректно определены в $\mathfrak{H}$. При этом $z^2 \in \rho(L_z)$ и

$$P(\tilde{L} - z^2I)^{-1}f = (L_z - z^2I)^{-1}f \quad \forall f \in \mathfrak{H}. \quad (2)$$

Множество операторов $\{L_z \mid \text{Im } z < 0\}$ будем называть *множеством образов* возмущенного оператора $\tilde{L}$. Для описания этого множества используем понятие позитивного пространства граничных значений (ПГЗ) [6]. Положим $\mathcal{H} = \ker(B^{*2} + I)$. Тогда $D(B^{*2}) = D(L_{\mu}) \dot{+} \mathcal{H}$, где $L_{\mu} = B^*B$. Тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где операторы $\Gamma_i: D(B^{*2}) \rightarrow \mathcal{H}$ определяются формулами $\Gamma_1(u + h) = P_{\mathcal{H}}(L_{\mu} + I)u$ и $\Gamma_2(u + h) = h$ (здесь $u \in D(L_{\mu})$, $h \in \mathcal{H}$ и $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathcal{H}$), является позитивным ПГЗ оператора B^2 , построенным по расширению Фридрихса L_{μ} . В этом ПГЗ область определения оператора L_z представима в виде

$$D(L_z) = \{f = u + h \mid (f \in D(B^{*2})) \mid C_z \Gamma_1 f = \Gamma_2 f\}, \quad (3)$$

где ограниченный оператор C_z однозначно определяется в $\mathcal{H}$. Отметим, что вспомогательное пространство N из определения м.р. и $\mathcal{H}$ имеют одинаковую размерность и, следовательно, изоморфны. Поэтому можно считать, что $N = \mathcal{H}$.

Доказательство следующей теоремы проводится с помощью абстрактных методов теории расширений и базируется на известном результате В. М. Адамяна и Д. З. Арова [7] о связи между м.р. и характеристической функцией сжатия.

ТЕОРЕМА 1. *Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость м.р. $S(\delta)$ имеет вид*

$$S(z) = I - 4izC_z(I - 2(1 - iz)C_z)^{-1}, \quad (4)$$

где операторы C_z определяют множество образов оператора $\tilde{L}$ в (3). При этом точка $1/2(1 - iz)$ принадлежит резольвентному множеству оператора C_z .

3. Обратная задача. Пусть функция $S(\delta)$ — граничное значение в смысле сильной сходимости аналитической в нижней полуплоскости функции $S(z)$, значения которой являются сжимающими операторами в N , и пусть ненулевое дефектное число оператора B совпадает с размерностью пространства N . Рассмотрим следующие задачи:

1. Когда функция $S(z)$ определяет м.р. для возмущенного уравнения (1)?
2. Возможно ли по известной м.р. $S(\delta)$ определить соответствующее возмущенное расширение $\tilde{L}$ оператора B^2 ?

ТЕОРЕМА 2. *Функция $S(\delta)$ является м.р. для возмущенного уравнения (1) тогда и только тогда, когда ее аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость $S(z)$ удовлетворяет условию $S^*(z) = S(-\bar{z})$ (для любого z , $\text{Im } z < 0$). При этом функция $S(\delta)$ будет м.р. для уравнения (1) с 0-возмущенным оператором $\tilde{L}$ в правой части тогда и только тогда, когда существует точка z , $\text{Im } z < 0$, $\text{Re } z \neq 0$, для которой справедливо равенство $(\text{Re } z)(I - S^*(z)S(z)) = 2(\text{Im } z)\text{Im } S(z)$.*

Возмущенный оператор $\tilde{L}$ называется *минимальным*, если ни одно из нетривиальных подпространств пространства $\tilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ не приводит оператор $\tilde{L}$.

Минимальные возмущенные расширения $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ оператора B^2 , действующие в пространствах $\tilde{\mathfrak{H}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{H}}_2$ соответственно, называются *эквивалентными*, если существует изометрическое отображение X пространства $\tilde{\mathfrak{H}}_1$ на $\tilde{\mathfrak{H}}_2$, такое, что $\tilde{L}_2 = X\tilde{L}_1X^{-1}$ и $Xf = f$ для $f \in \mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА 3. *Аналитическое продолжение $S(z)$ м.р. $S(\delta)$ однозначно, с точностью до эквивалентности, определяет минимальное возмущенное расширение $\tilde{L}$ в (1).*

Доказательства теорем 2 и 3 основаны на следующем наблюдении: в силу равенств (2)–(4) по аналитическому продолжению $S(z)$ можно определить обобщенную резольвенту $R_\mu = (L_z - \mu I)^{-1}$ ($\mu = z^2$) симметрического оператора B^2 . Используя этот факт и результаты М. А. Наймарка (теорема 8 в [8]) и А. В. Штрауса (теорема 7 в [9]), мы завершаем доказательства этих теорем.

СЛЕДСТВИЕ 1. *М.р. $S(\delta)$ является унитарной константой тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{L}$ в (1) является невозмущенным оператором.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Доказательство теоремы 3 не дает конструктивного алгоритма восстановления возмущенного оператора $\tilde{L}$ по его множеству образов. Эта проблема остается открытой.

2. Используя [10], теоремы 1–3 можно обобщить на случай, когда возмущенный оператор имеет конечный дискретный спектр на отрицательной полуоси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuzhel A. V., Kuzhel S. A. Regular extensions of Hermitian operators. VSP, Utrecht (1998).
2. Кужель С. А. Укр. матем. ж., **50**, № 12, 1615–1629 (1998).
3. Кужель С. А. Функци. анализ и его прил., **30**, вып. 1, 70–73 (1996).
4. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Мир, М. (1971).
5. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, № 6, 1389–1416 (1965).
6. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова думка, Киев (1984).
7. Адамьян В. М., Аров Д. З. ДАН СССР, **160**, № 1, 9–12 (1965).
8. Наймарк М. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 3, 277–309 (1940).
9. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, № 1, 51–86 (1954).
10. Кужель С. А. Матем. сб., **187**, № 10, 87–108 (1996).

Институт Математики НАН Украины
e-mail: kuzhel@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
18 декабря 1998 г.

УДК 517.98

Рекуррентные формулы для A_n - и B_n -решений уравнения WDVV*

© 2000. С. М. НАТАНЗОН

1. В начале 90-х годов в работах [5, 8] была построена система дифференциальных уравнений (называемая сейчас WDVV), описывающая древесное приближение 2-мерных топологических теорий поля при нулевых константах гравитационного спаривания. Дубровин [3] обнаружил, что решения этой системы описывают замечательную дифференциально-геометрическую структуру Фробениуса–Дубровина, связывающую самые, казалось бы, далекие разделы математики: алгебраическую геометрию, дискретные группы, квантовые когомологии, теорию особенностей, интегрируемые системы и др.

Простейшими нетривиальными решениями WDVV являются так называемые A_n - и B_n -потенциалы [5–7, 9], описывающие, как оказалось впоследствии, метрику К. Сайто на пространстве версальных деформаций особенностей A_n и B_n .

A_{n-1} -потенциалы $F_A(x_1, \dots, x_{n-1})$ и B_{n-1} -потенциалы $F_B(x_1, \dots, x_{n-1})$ определяются как функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial x_{n-\gamma} \partial x_\eta \partial x_\xi} = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\xi \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial x_{n-\gamma} \partial x_\eta \partial x_\alpha},$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_\alpha \partial x_\beta} = \delta_{\alpha+\beta, n}, \quad \sum_{j=1}^{n-1} d_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF,$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (98-01-00612) и INTAS.