Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Бюи Ван Бинх, В. В. Шехтман, Инвариантные функционалы и интеграл Замолодчиковых, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 71–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:19:16

Инвариантные функционалы и интеграл Замолодчиковых

© 2015. Бюи Ван Бинх, В. Шехтман

Рассмотрим тройной комплексный интеграл

$$I(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \int_{\mathbb{C}^3} (1 + |z_1|^2)^{-2\sigma_1} (1 + |z_2|^2)^{-2\sigma_2} (1 + |z_3|^2)^{-2\sigma_3} \\ \times |z_1 - z_2|^{2\nu_3-2} |z_2 - z_3|^{2\nu_1-2} |z_3 - z_1|^{2\nu_2-2} dz_1 dz_2 dz_3. \quad (1)$$

Он появился в замечательной работе [6] в связи с моделью Лиувилля двумерной конформной теории поля. Здесь $\sigma_i \in \mathbb{C}$,

$$\nu_i = \sigma_{i+1} + \sigma_{i+2} - \sigma_i, \quad i \bmod 3, \quad (2)$$

и $dz := dx dy$, $z = x + iy$, обозначает стандартную меру Лебега на $\mathbb{C}$. Интеграл сходится, если $\operatorname{Re} \sigma_i > 1/2$, $\operatorname{Re} \nu_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Целью этой заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.

$$I(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \pi^3 \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 1) \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3)}{\Gamma(2\sigma_1) \Gamma(2\sigma_2) \Gamma(2\sigma_3)}. \quad (3)$$

Эта формула была приведена без доказательства в [6]. Доказательство предложено в [4]; оно использует замысловатую замену переменных. Другое доказательство (а также вычисление аналогичных p -адических и q -деформированных интегралов), использующее тождества для постоянного члена типа Макдональда, можно найти в [2]. В настоящей заметке мы предлагаем еще одно доказательство формулы (3), использующее элегантный метод Бернштейна и Резникова [1], вычисливших аналогичный вещественный интеграл. Их метод основан на использовании феномена однократности и позволяет свести (3) к аналогичному гауссовскому интегралу, ср. теорему 2 ниже; этот последний интеграл представляет, возможно, самостоятельный интерес.

Обозначения. Для гладкого многообразия Y через $C(Y)$ будем обозначать пространство гладких функций $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$.

Основная серия. Пусть $G := SL_2(\mathbb{C}) \supset K := SU(2)$ и $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ пусть $C_\lambda(X) \subset C(X)$ обозначает подпространство таких f , что $f(ax) = |a|^{2\lambda} f(x)$ для всех $a \in \mathbb{C}^*$. Группа G действует на $C_\lambda(X)$ по правилу $(gf)(x) = f(xg)$, $g \in G$; обозначим это представление через V_λ .

Реализация в функциях на прямой, ср. [3]. Отображение $f \mapsto f(x, 1)$ индуцирует изоморфизм $\phi: V_\lambda \xrightarrow{\sim} V'_\lambda$, где V'_λ — подпространство в $C(\mathbb{C})$, зависящее от λ .

Индуктированное действие группы G на V'_λ задается формулой

$$(gf)(x) = |bx + d|^{2\lambda} f((ax + c)/(bx + d)), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Размерность пространства $\text{Hom}_K(V_\lambda, \mathbb{C})$ непрерывных K -инвариантных линейных отображений $V_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ равна 1.*

Доказательство. Пусть $\ell \in \text{Hom}_K(V_\lambda, \mathbb{C})$. Выберем меру Хаара на K , такую, что $\int_K dk = 1$. Поскольку ℓ непрерывно и K -инвариантно, для всех $f \in V_\lambda$ имеет место равенство $\ell(f) = \ell(\bar{f})$, где $\bar{f}(x) = \int_K f(kx) dk$. Но $\bar{f}$ однородна и K -инвариантна, а такая функция единственна с точностью до мультипликативной константы. $\square$

Лемма 2. (i) *Функционал $\ell'_\lambda: V'_{\lambda-2} \rightarrow \mathbb{C}$, заданный формулой*

$$\ell'_\lambda(f) = \int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2)^{-\lambda} f(z) dz,$$

K -инвариантен; интеграл сходится для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in V'_{\lambda-2}$. Этот функционал G -инвариантен тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$.

(ii) *Функционал $\ell_\lambda: V_{\lambda-2} \rightarrow \mathbb{C}$, заданный формулой*

$$\ell_\lambda(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}^2} f(z_1, z_2) e^{-|z_1|^2 - |z_2|^2} dz_1 dz_2,$$

K -инвариантен; интеграл сходится для $\text{Re } \lambda > 0$. $\square$

Из леммы 1 следует, что $\ell_\lambda = c_\lambda \ell'_\lambda \circ \phi$ для некоторого $c_\lambda \in \mathbb{C}$.

Лемма 3. $c_\lambda = \Gamma(\lambda) \pi^{-1}$. $\square$

Более общо, если даны n комплексных чисел $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, определим G -модуль

$$V_{\bar{\lambda}} = \left\{ f \in C(X^n) \mid f(a_1 x_1, \dots, a_n x_n) = \prod_{i=1}^n |a_i|^{2\lambda_i} f(x_1, \dots, x_n) \right\}$$

с диагональным действием группы G .

Отображение $f \mapsto f((x_1, 1), \dots, (x_n, 1))$ индуцирует изоморфизм G -модулей

$$\phi: V_{\bar{\lambda}} \xrightarrow{\sim} V'_{\bar{\lambda}} \subset C(\mathbb{C}^n),$$

где действие группы G на $V'_{\bar{\lambda}}$ задано формулой

$$(gf)(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n |bx_i + d|^{-2\lambda_i} f\left(\frac{ax_1 + c}{bx_1 + d}, \dots, \frac{ax_n + c}{bx_n + d}\right), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Мы имеем K -инвариантные функционалы $\ell'_\lambda: V'_{\lambda_1-2, \dots, \lambda_n-2} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\ell'_\lambda(f) = \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{i=1}^n (1 + |z_i|^2)^{-\lambda_i} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_n$$

(интеграл сходится для всех λ_i), и $\ell_{\bar{\lambda}}: V_{\lambda_1-2, \dots, \lambda_n-2} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\ell_{\bar{\lambda}}(f) = \int_{(\mathbb{C}^2)^n} f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) e^{-\sum_{i=1}^n (|x_i|^2 + |y_i|^2)} dx_1 dy_1 \cdots dx_n dy_n$$

(интеграл сходится, если $\text{Re } \lambda_i > 0$ для всех i).

Следствие 1.

$$\ell_{\bar{\lambda}} = \pi^{-n} \prod_{i=1}^n \Gamma(\lambda_i) \cdot \ell'_\lambda \circ \phi.$$

Действительно, факторизуемые функции $\prod f_i(x_i)$, $f_i \in V_{\lambda_i}$, плотны в $V_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, и к ним можно применить теорему Фубини.

Для функции $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$, где $Y \subset \mathbb{C}^n$ имеет дополнение меры 0, положим

$$\mathcal{G}(f) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{C}^n} f(z_1, \dots, z_n) e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2} dz_1 \dots dz_n$$

(когда интеграл сходится). Следующее предложение описывает комплексные аналоги свойств гауссовых интегралов из [1].

Предложение 1. (i) Положим $r(z) = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$. Тогда $\mathcal{G}(r^s) = \Gamma(s/2 + n)/\Gamma(n)$.

(ii) Если $h(z) = \sum c_i z_i$, то $\mathcal{G}(|h|^s) = \Gamma(s/2 + 1) \|h\|^s$, где $\|h\| = (\sum_{i=1}^n |c_i|^2)^{1/2}$.

(iii) Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^2)^2$ и определитель

$$d(w_1, w_2) = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, \quad w_i = (z_{1i}, z_{2i}).$$

Тогда $\mathcal{G}(|d|^s) = \Gamma(s/2 + 1)\Gamma(s/2 + 2)$. □

Теперь рассмотрим пространство $L = (\mathbb{C}^2)^3$, элементы которого мы будем обозначать через (w_1, w_2, w_3) , $w_i \in \mathbb{C}^2$, и следующую функцию на нем:

$$K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}(w_1, w_2, w_3) = |d(w_1, w_2)|^{2\nu_3-2} |d(w_1, w_3)|^{2\nu_2-2} |d(w_2, w_3)|^{2\nu_1-2}.$$

Теорема 2.

$$\mathcal{G}(K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}) = \Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 1) \Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2) \Gamma(\nu_3).$$

Доказательство можно получить тем же методом, что в [1], где вычислены аналогичные вещественные гауссовы интегралы.

Теперь мы легко сможем вывести теорему 1. Функция K_{ν_1, ν_2, ν_3} лежит в пространстве $V_{2\sigma_1-2, 2\sigma_2-2, 2\sigma_3-2}$, где σ_i определяются из (2). Мы имеем

$$\mathcal{G}(K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}) = \ell_{2\sigma_1, 2\sigma_2, 2\sigma_3}(K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}).$$

С другой стороны, в силу следствия 1

$$I(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \ell'_{2\sigma_1, 2\sigma_2, 2\sigma_3}(K'_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}) = \pi^3 \prod_{i=1}^3 \Gamma(2\sigma_i)^{-1} \ell_{2\sigma_1, 2\sigma_2, 2\sigma_3}(K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}),$$

где $K'_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} = \phi(K_{\nu_1, \nu_2, \nu_3})$. Это вместе с теоремой 2 влечет за собой теорему 1. □

Функционал $\ell: V_{-2\sigma_1, -2\sigma_2, -2\sigma_3} \rightarrow \mathbb{C}$, $\ell(f) = \int_{\mathbb{C}^3} f K'_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} dz_1 dz_2 dz_3$, G -инвариантен. Аналогично вещественному случаю, рассмотренному в [1], пространство таких G -инвариантных функционалов одномерно, ср. [5]. В этом состоит «метафизическая» причина того, что интеграл (1) (значение этого функционала на сферическом векторе) вычисляется в виде произведения значений гамма-функции.

Мы благодарим А. Резникова за обсуждения и за заметки А. Иомдина о p -адическом варианте метода Бернштейна–Резникова, которые были нам очень полезны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. H. Bernstein, A. Reznikov, Moscow Math. J., **4**:1 (2004), 19–37. [2] V. B. Bui, V. Schechtman, Moscow Math. J., **13**:1 (2013), 585–600. [3] И. М. Гельфанд, И. М. Граев,

И. И. Пятацкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции, Обобщенные функции*, вып. 6, Наука, М., 1966. [4] D. Harlow, J. Maltz, E. Witten, J. High Energy Phys., no. 12 (2011), 071; <http://arxiv.org/abs/1108.4417>. [5] H. Loke, Pacific J. Math., **197** (2001), 119–144. [6] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, Nucl. Phys., **B477:2** (1996), 577–605.

Department of Mathematics,
Faculty of Information Technology
National University of Civil Engineering, Hanoi, Vietnam
e-mail: buivanbinhdhxd@gmail.com
Institut de Mathématiques de Toulouse,
Université P. Sabatier, Toulouse, France
e-mail: vadim.schechtman@math.univ-toulouse.fr

Поступила в редакцию
19 января 2013 г.

УДК 517.988.6

О множестве решений одного класса уравнений с сюръективными операторами*

© 2015. Б. Д. ГЕЛЬМАН

Введение. Данная заметка посвящена изучению уравнений вида $A(x) = f(x)$ в случае, когда A является замкнутым линейным сюръективным оператором, а отображение f является уплотняющим относительно оператора A . Ранее разрешимость уравнений такого вида изучалась в работе [1]. В настоящей заметке не только доказываются теоремы существования, но и дается оценка топологической размерности множества решений этого уравнения. В заключение полученные теоремы применяются для изучения множества глобальных решений одного класса уравнений нейтрального типа.

1. (A, ψ) -уплотняющие отображения. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства; в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $\Gamma(A) \subset E_1 \times E_2$ — график оператора A . Обозначим через A^{-1} многозначное отображение, обратное к оператору A .

Определение 1. Число

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y \in (E_2 \setminus \{0\})} \left(\frac{\inf\{\|x\| : x \in E_1, A(x) = y\}}{\|y\|} \right)$$

называется *нормой* многозначного отображения A^{-1} .

В работе [5] были рассмотрены некоторые примеры вычисления нормы $\|A^{-1}\|$.

Пример 1. Пусть $C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве E и $A: D(A) \subset C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$, где $D(A)$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций, — оператор дифференцирования. В этом случае $\|A^{-1}\| = (b - a)/2$.

Рассмотрим ситуацию, которая часто возникает при изучении краевых задач.

*Это исследование поддержано РФФИ, грант №14-01-00468-а.