Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Махлин, Характеры подпространств
Фейгина–Стойновского и теорема Бриона, *Функц.
анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 18–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:08:35

Характеры подпространств Фейгина–Стойновского и теорема Бриона

© 2015. И. Ю. МАХЛИН

При помощи теоремы Бриона о выпуклых многогранниках мы даем альтернативное доказательство центральной теоремы статьи [1]. Теорема представляет собой формулу для характера подпространства Фейгина–Стойновского интегрируемого представления аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$. Наш подход состоит в том, чтобы сопоставить векторам, образующим мономиальный базис подпространства, целые точки некоторого политопа. После этого характер вычисляется при помощи теоремы Бриона.

§1. Введение

Начнем с введения обозначений, необходимых для формулировки основного результата.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Фиксируем разложение Картана $L = N^- \oplus H \oplus N^+$, а также набор простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in H^*$, упорядоченных стандартным образом. Для каждого положительного корня α алгебры L определены образующие корневых подпространств e_α, f_α (с весами α и $-\alpha$ соответственно).

Далее перейдем к соответствующей аффинной алгебре Ли

$$\widehat{L} = \widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}) = L \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

где элемент c — центральный элемент, а d — «оператор степени». Используемая нами теория аффинных алгебр Ли и их представлений изложена, например, в книге [6].

Для $x \in L$ будем обозначать $x \otimes t^m \in \widehat{L}$ через $x(m)$.

Рассматривается неприводимое интегрируемое представление $L(\lambda)$ алгебры $\widehat{L}$ со старшим весом λ . Пусть вес λ имеет координаты

$$(a_0, \dots, a_{n-1})$$

при разложении по базису, состоящему из фундаментальных весов. Другими словами, $\lambda(h_{\alpha_i}(0)) = a_i$ для всех $1 \leq i \leq n-1$ и, кроме того,

$$\lambda(c) = k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

(k — уровень представления). Так как вес λ целочисленный доминантный, все a_i — целые неотрицательные числа.

Интерес представляет подпространство модуля $L(\lambda)$, называемое подпространством Фейгина–Стойновского. Для его определения рассмотрим последовательность корней алгебры L , задаваемую формулой

$$\gamma_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i$$

с $1 \leq i \leq n-1$, и положим $f_i = f_{\gamma_i}$. Пусть P — подалгебра в $\hat{L}$, порожденная элементами $f_i(m)$ для всех $1 \leq i \leq n-1$ и $m \leq 0$. Легко убедиться в том, что это абелева подалгебра. Интересующее нас пространство есть $V = \mathcal{U}(P)(v_0)$, где v_0 — старший вектор модуля $L(\lambda)$.

(Отметим, что изучение этих пространств было начато в работах [2] и [3] Фейгина и Стояновского.)

В [1] построен мономиальный базис в V . Для описания этого базиса заметим, что мономы в $\mathcal{U}(P)$ соответствуют бесконечным последовательностям целых неотрицательных чисел с конечным носителем. Для монома p и любых целых $q \geq 0$ и $1 \leq r \leq n-1$ член $x(p)_{q(n-1)+r}$ соответствующей последовательности $(x(p)_i)_{i \geq 1}$ равен показателю степени, в которой $f_r(-q)$ содержится в мономе p . Другими словами, члены последовательности — это просто степени монома при упорядочивании символов $f_i(m)$ в первую очередь по m (по убыванию), а внутри каждого m — по i .

Теперь определим множество мономов $\Pi \subset \mathcal{U}(P)$. Для этого введем последовательность функционалов $\{\psi_i, i \geq 1\}$ на пространстве последовательностей с конечным носителем. Для $i < n$ положим $\psi_i(x) = x_1 + \dots + x_i$, а для $i \geq n$ положим $\psi_i(x) = x_{i-n+1} + \dots + x_i$. Множество Π состоит из таких мономов p , что соответствующая последовательность $x(p)$ удовлетворяет следующему набору неравенств.

A. $\psi_i(x(p)) \leq a_1 + \dots + a_i =: b_i$ для $1 \leq i \leq n-1$.

B. $\psi_i(x(p)) \leq k =: b_i$ для любого $i \geq n$.

Теорема 1.1. Векторы $\{pv_0, p \in \Pi\}$ образуют базис пространства V .

Пусть $S \subset \mathcal{U}(P)$ — линейная оболочка множества мономов $p \in \Pi$. Тогда $p \rightarrow pv_0$ задает линейное отображение $\varphi: S \rightarrow V$. В [1] показано, что, во-первых, отображение φ сюръективно, а во-вторых, $\text{char } V = \exp \lambda \text{ char } S$. Из совокупности этих двух утверждений непосредственно вытекает теорема 1.1.

Для доказательства второго из упомянутых утверждений характер $\text{char } S$ вычисляется явно. Это вычисление и составляет центральную часть работы [1]. Именно оно и будет другими средствами проведено нами здесь. Введем терминологию, необходимую для формулировки результата этого вычисления. Выделим в множестве последовательностей $y = (y_i)$ с конечным носителем, каждый член которых есть 0 или 1, подмножество Θ хороших последовательностей. Хорошей будем называть такую последовательность y , что для любого i , если $y_i = 0$, то $y_{i+n-1} = 0$. Для каждой хорошей последовательности $y = (y_i)$ определяется элемент F_y пространства характеров алгебры Ли $\hat{L}$. Через эти элементы и выражается характер пространства S .

Прежде всего, сопоставим каждой хорошей последовательности y элемент w_y группы Вейля W алгебры $\hat{L}$. Для корня α обозначим через $s_\alpha \in W$ соответствующее отражение. Кроме того, для целых $1 \leq r \leq n-1$ и $q \geq 0$ пусть $\gamma_{q(n-1)+r}$ — корень $\gamma_r - q\delta$, где δ — мнимый корень аффинной алгебры $\hat{L}$. Тогда

$$w_y = \dots s_{\gamma_i}^{y_i} \dots s_{\gamma_1}^{y_1}.$$

В [1] указан элемент $\xi \in W$, который для всех i переводит γ_i в γ_{i+1} . Теперь можно дать следующее рекуррентное определение элементов F_y :

$$F_{(0,0,0,\dots)} = \frac{1}{\prod_{i \geq 1} (1 - \exp \gamma_i)},$$

$$F_{(y_1, y_2, \dots)} = \frac{\xi F_{(y_2, y_3, \dots)}}{1 - \exp(w_{(y_1, y_2, \dots)} \gamma_1)}, \quad (1)$$

где W действует на пространстве характеров естественным образом.

Формула для характера имеет следующий вид.

Теорема 1.2.

$$\text{char } S = \exp(-\lambda) \sum_{y \in \Theta} \exp(w_y \lambda) F_y.$$

В [1] показано, что и левая, и правая части являются единственным решением одного и того же рекуррентного уравнения. Мы же применим иной подход. Множество последовательностей $x(p)$, $p \in \Pi$, можно рассматривать как множество целых точек многогранника в пространстве последовательностей с конечным носителем — пересечения набора полупространств. Обозначим этот многогранник также через Π . Таким образом, характер пространства S есть сумма определенных экспонент целых точек из Π . Для конечномерных многогранников суммы экспонент их целых точек можно вычислять при помощи теоремы Бриона. Мы покажем, что аналогичное утверждение имеет место и для Π , что и даст возможность вычислить $\text{char } S$.

§2. Теорема Бриона

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ с фиксированным базисом. В этом пространстве выделено подмножество $\mathbb{Z}^m$ целых точек. Каждой такой точке $x = (x_1, \dots, x_m)$ соответствует ее *экспонента* — моном Лорана $\exp(x) = t_1^{x_1} \cdots t_m^{x_m}$ от формальных переменных $t_1, \dots, t_m$. Каждому подмножеству $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ соответствует его *характеристическая функция*

$$S(\Sigma) = \sum_{x \in \Sigma \cap \mathbb{Z}^m} \exp(x).$$

$S(\Sigma)$ — это формальный ряд Лорана от $t_1, \dots, t_m$.

Пусть C — рациональный многогранный конус, т. е. многогранный конус, координаты вершины и всех образующих которого рациональны. Характеристическую функцию такого множества можно, в определенном смысле, представить в виде рациональной функции. Действительно, пространство рядов Лорана можно рассматривать как модуль над кольцом полиномов Лорана $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_m^{\pm 1}]$. В рассматриваемом случае в кольце существует полином θ , такой, что $\theta S(C)$ — тоже полином Лорана, т. е. имеет конечное число ненулевых коэффициентов. Таким образом, существует рациональная функция $\theta S(C)/\theta$, не зависящая от выбора θ . Обозначим ее через $\sigma(C)$.

Нам понадобится чуть более подробное описание функции $\sigma(C)$. А именно, пусть C — симплицальный конус с вершиной v . Пусть $u_1, \dots, u_l$ — линейно независимый набор его целочисленных образующих, каждая из которых минимальна, т. е. имеет взаимно простые в совокупности координаты. Пусть Σ — *фундаментальный параллелепипед* конуса, множество точек вида

$$v + \sum_{i=1}^l \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in [0, 1).$$

Тогда

$$\sigma(C) = \frac{S(\Sigma)}{(1 - \exp u_1) \cdots (1 - \exp u_l)}. \quad (2)$$

Если же конус C несимплициален, то его можно триангулировать симплициальными конусами и найти $\sigma(C)$ по соответствующей формуле включений и исключений. Важный случай — конус, содержащий аффинную прямую, например, аффинное пространство или полупространство. Такие конусы назовем *вырожденными*. Для вырожденного рационального конуса C имеем $\sigma(C) = 0$.

Подробно эта тема обсуждается, например, в книге [7].

Далее, пусть Σ — рациональный многогранник, т. е. выпуклая оболочка конечного набора рациональных точек. Для него определено множество вершинных конусов $\{C_i\}$ — конусов с вершиной в некоторой вершине многогранника Σ и образующими, заданными его ребрами с концом в этой вершине. Отметим, что $S(\Sigma)$ в нашем случае — полином Лорана, а значит, и рациональная функция. Теперь можно сформулировать теорему.

Теорема 2.1 (Брион [4]). *В введенных обозначениях в поле рациональных функций имеет место тождество*

$$S(\Sigma) = \sum_i \sigma(C_i).$$

Сразу же сформулируем и докажем еще одно утверждение, близкое к теореме Бриона. Сначала для выпуклого политапа Σ в $\mathbb{R}^m$ (т. е. пересечения конечного набора полупространств) определим аналогично вершинным конусам конусы при гранях любых размерностей. Пусть Γ — грань, а x — ее внутренняя точка. Тогда соответствующий конус определяется как

$$C_\Gamma = \{x + \alpha(y - x), y \in \Sigma, \alpha \geq 0\}.$$

Если $\dim \Gamma > 0$, то конус C_Γ вырожденный.

Теорема 2.2. *Пусть дан рациональный конус C , и для каждой его грани Γ (включая максимальную грань C) C_Γ есть определенный выше конус. Кроме того, пусть D — рациональный конус с той же вершиной, что и C , содержащий C , но отличный от всего $\mathbb{R}^m$. Тогда*

$$\sigma(C) = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \sigma(C_\Gamma \cap D).$$

Доказательство. Если конус C вырожденный, то вырожденным является и D , и все конусы $C_\Gamma \cap D$. Следовательно, левая и правая части равны нулю. В дальнейшем будем предполагать C невырожденным.

Для $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ обозначим через $\mathbb{1}_\Sigma$ характеристическую функцию множества Σ . Кроме того, пусть $\hat{C}$ — внутренность конуса, симметричного конусу C относительно его вершины. Таким образом, $\hat{C}$ есть в точности множество точек, не лежащих ни в одном из C_Γ (с $\Gamma \neq C$). Ключ к доказательству дает следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$\Phi = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbb{1}_{C_\Gamma}.$$

Функции Φ и $\mathbb{1}_C$ совпадают вне $\hat{C}$.

Доказательство. В точках вне аффинной оболочки конуса C , очевидно, обе функции равны 0, поэтому аффинной оболочкой можно считать все пространство $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим точку $x \notin \widehat{C}$ и две следующие возможности.

1. Точка x не лежит на границе открытого множества $\widehat{C}$. Нетрудно видеть, что в этом случае в силу невырожденности конуса C через x можно провести гиперплоскость, пересекающую конус C по ограниченному множеству — многограннику размерности $m - 1$. Тогда равенство $\Phi(x) = \mathbb{1}_C(x)$ есть классический результат — формула Брианшона–Грама для этого многогранника (см. [5]).

2. Если же точка x лежит на границе множества $\widehat{C}$, то обозначим через y точку, симметричную точке x относительно вершины конуса. Точка x принадлежит C_Γ тогда и только тогда, когда $y \in \Gamma$. Таким образом, $\mathbb{1}_{C_\Gamma}(x) = \mathbb{1}_{C_\Gamma}(y)$ и случай сводится к предыдущему. (Случай вершины нетрудно рассмотреть отдельно.)

Так как конус D не пересекает множество $\widehat{C}$, из леммы выводим соотношение

$$\mathbb{1}_C = \mathbb{1}_D \mathbb{1}_C = \mathbb{1}_D \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbb{1}_{C_\Gamma} = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} \mathbb{1}_{C_\Gamma \cap D}.$$

Откуда сразу следует равенство

$$S(C) = \sum_{\dim \Gamma > 0} (-1)^{\dim \Gamma + 1} S(C_\Gamma \cap D)$$

и, в свою очередь, утверждение теоремы.

Для нас наибольшее значение будет иметь частный случай, когда D является полупространством. Ясно, что в этом случае при $\dim \Gamma > 1$ конус $C_\Gamma \cap D$ является вырожденным и $\sigma(C_\Gamma \cap D) = 0$. Более того, если u — ребро, содержащееся в граничной гиперплоскости полупространства D , то $C_u \subset D$ и опять же $\sigma(C_u) = 0$.

Теорема 2.3. Пусть C — рациональный конус и для его ребер определены конусы C_u . Пусть β — гиперплоскость, содержащая вершину конуса C , но не содержащая его внутренних точек, а D — полупространство, ограниченное гиперплоскостью β и содержащее C . Тогда

$$\sigma(C) = \sum_{u \not\subset \beta} \sigma(C_u \cap D).$$

§3. Многогранник Π

В счетномерном пространстве последовательностей вещественных чисел с конечным носителем рассмотрим множество последовательностей, все члены которых неотрицательны, а также удовлетворяют условиям А и В из введения. Это и есть многогранник Π , упомянутый во введении. В этом параграфе мы сформулируем его основные свойства и затем покажем, в каком смысле в нему применима теорема Бриона.

Сначала, однако, поясним, каким образом точкам пространства последовательностей будут сопоставляться мономы (формальные экспоненты точек), а конусам — рациональные функции.

Как и в конечномерном случае, для точки $x = (x_i)$ счетномерного пространства можно рассмотреть ее экспоненту — моном $\exp x$ от счетного набора переменных $\{t_i\}$, занумерованных таким же образом, как и члены последовательности x . Применим теперь к моному подстановку $t_{j(n-1)+r} = z_r q^j$ для всех целых $j \geq 0$ и $1 \leq r \leq n-1$ и обозначим результат через $\exp^* x$. Смысл такой подстановки состоит в следующем: введя в пространстве характеров алгебры $\hat{L}$ обозначения $\exp \gamma_i = z_i$ ($1 \leq i \leq n-1$) и $\exp(-\delta) = q$, для монома $p \in \mathcal{U}(P)$ получаем $\text{char } p = \exp^* x(p)$. Этот факт позволяет отождествлять ряды Лорана от переменных $z_1, \dots, z_{n-1}, q$ с соответствующими характеристиками.

Таким образом, $S^*(\Pi) = \text{char } S$, где $S^*(\Sigma)$ — сумма экспонент $\exp^*$ целых точек множества Σ . (Ясно, что ряд $S^*(\Pi)$ определен корректно.)

Далее, пусть C — конечномерный конус в рассматриваемом счетномерном пространстве. Для некоторого целого $m > 0$ он содержится в пространстве $\{(x_i) \mid x_i = 0 \text{ при } i > m\}$. Тогда определена рациональная функция $\sigma(C)$ от переменных $\{t_i, 1 \leq i \leq m\}$, не зависящая от выбора m . Если к $\sigma(C)$ применима заданная выше подстановка, то обозначим результат через $\sigma^*(C)$.

Перейдем к описанию структуры многогранника Π .

Его гипергранями будем называть его пересечения с гиперплоскостями, задаваемыми условиями A и B и условиями $x_i = 0$. Для $i > 0$ гипергрань $\Pi \cap \{x \mid \psi_i(x) = b_i\}$ обозначим через Γ_i , а гипергрань $\Pi \cap \{(x_i) \mid x_i = 0\}$ — через Δ_i . (Так же мы будем обозначать сами гиперплоскости, содержащие эти гиперграни, и, кроме того, гиперграни других политопов (вершинных конусов), задаваемые теми же гиперплоскостями. Что именно имеется в виду, будет ясно из контекста.)

Существенно, что определенные выше множества действительно являются гипергранями многогранника Π (т.е. имеют аффинную оболочку коразмерности 1) тогда и только тогда, когда все числа a_i ненулевые. При этом предположении мы и будем работать в этом и следующем параграфах, после чего будет рассмотрен случай веса с нулевой координатой.

Под вершинами многогранника Π мы, по аналогии с конечномерным случаем, будем понимать его точки, принадлежащие максимальному по включению подмножеству гиперграней с непустым пересечением. Сформулируем основные свойства вершин.

Предложение 3.1. (а) *Вершина принадлежит одновременно и Γ_i , и Δ_i тогда и только тогда, когда она одновременно принадлежит и Γ_{i-1} , и Δ_{i-n} . (В частности, $i > n$.)*

(б) *Вершинами являются те и только те точки, которые для каждого i принадлежат хотя бы одной из граней Γ_i и Δ_i .*

(с) *Пусть задан набор граней, для каждого i содержащий Γ_i или Δ_i и при этом содержащий и Γ_i , и Δ_i тогда и только тогда, когда он содержит и Γ_{i-1} , и Δ_{i-n} . Пусть, кроме того, граней вида Γ_i в наборе конечное число. Тогда грани набора имеют единственную общую точку, являющуюся вершиной многогранника Π .*

Доказательство. (а) Если $u \in \Gamma_i \cap \Delta_i$, то $\psi_{i-1}(u) = \psi(u) + u_{i-n} = b_i + u_{i-n}$. Из $b_{i-1} \leq b_i$ выводим $u_{i-n} = 0$ (т.е. $u \in \Delta_{i-n}$) и $\psi_{i-1}(u) = b_{i-1}$ (т.е. $u \in \Gamma_{i-1}$).

(b) Пусть $u = (u_i)$ — вершина, $u \notin \Gamma_l$, $u \notin \Delta_l$. Из п. (a) видно, что существует точка из Π , принадлежащая всем граням, содержащим u , и, кроме того, грани Δ_l . Обратное утверждение следует из того, что у набора гиперплоскостей, для каждого i содержащего Γ_i или Δ_i , не более одной общей точки.

(c) Пусть A — набор, описанный в п. (c) предложения, и $B \subset A$ содержит ровно одну из граней Γ_i и Δ_i для каждого i . У граней из B есть ровно одна общая точка; обозначим ее через $u = (u_i)$. Пусть для некоторого $i > 0$ $X_i \in A$ есть Γ_i или Δ_i . Тогда индукцией по i легко показывается, что $u \in X_i$.

Ребрами многогранника Π мы будем называть его подмножества, состоящие из более чем одной точки и содержащиеся в максимальном по включению наборе граней. Каждое ребро представляет собой отрезок, концы которого — вершины многогранника Π . Рассмотрим вершину u и содержащее ее ребро e . Для такой пары определим направляющий вектор как минимальный ненулевой целочисленный вектор ε , такой, что $u + \varepsilon \in e$.

Предложение 3.2. *В введенных обозначениях верны следующие утверждения.*

(a) *Ребро одновременно содержится и в Γ_i , и в Δ_i тогда и только тогда, когда оно одновременно содержится и в Γ_{i-1} , и в Δ_{i-n} .*

(b) *Ребро e содержится хотя бы в одной из граней Γ_i и Δ_i для всех i кроме одного.*

(c) *Моном $\exp^* \varepsilon$ есть $\exp \alpha$ для некоторого корня α алгебры $\widehat{L}$.*

Доказательство. (a) Это напрямую следует из предложения 3.1(b) и того, что ребро — отрезок, соединяющий пару вершин.

(b) Пусть $l < t$ — два таких минимальных числа, что e не содержится ни в одной из граней $\Gamma_l, \Delta_l, \Gamma_t, \Delta_t$. Пусть вершина u_1 — второй конец ребра e . Ясно, что u_1 принадлежит только одной из граней Γ_t и Δ_t ; обозначим эту грань через X . Ясно, что существует отличная от u точка в Π , принадлежащая всем граням, содержащим e , и еще грани X , что противоречит свойству максимальности.

(c) Из пп. (a) и (b) следует такое общее описание вектора ε . Во-первых, каждая его координата есть 0 или ± 1 , причем ненулевые координаты поочередно равны 1 и -1 . Пусть теперь $i_1, \dots, i_s$ — номера ненулевых координат; тогда

$$i_3 - i_2 = i_5 - i_4 = \dots = n - 1.$$

Таким образом, $\exp^* \varepsilon$ в случае четного s есть $\exp(\pm(\gamma_{i_1} - \gamma_{i_s}))q^{\pm(s-2)/2}$, а в случае нечетного — это $\exp(\pm\gamma_{i_1})q^{\pm(s-1)/2}$. И то, и другое есть экспонента некоторого корня. $\square$

Для вершины u можно также рассмотреть вершинный конус C_u при ней. Это множество точек вида

$$u + \sum_i \alpha_i \varepsilon_i,$$

где $\{\varepsilon_i\}$ — множество направляющих векторов ребер, содержащих u , а $\alpha_i \geq 0$ для всех i . Во-первых, пусть для вершины u число m_u — номер последней ее ненулевой координаты, а l_u — максимальное число, для которого $u \in \Gamma_{l_u}$. Во-вторых, для $t \geq m_u$ обозначим через C_u^m сечение конуса C_u конечномерным пространством $\{(x_i) \mid x_i = 0 \text{ при } i > t\}$, т. е. конечномерный конус с вершиной u .

Нам будет полезен следующий факт.

Предложение 3.3. *Все функции $\sigma(C_u^m)$ представляются в виде произведения монома $\exp^* u$ и дроби, числитель и знаменатель которой суть полиномы Лорана, все мономы в которых содержат q в неотрицательной степени. При этом знаменатель есть произведение сомножителей вида $1 - \exp \alpha$, где α — корень алгебры $\hat{L}$.*

Доказательство. Рассмотрим триангуляцию конуса C_u^m и выпишем соответствующую формулу включений и исключений. Она есть сумма слагаемых вида

$$\pm \frac{\exp x}{\prod_{\varepsilon \in E} (1 - \exp \varepsilon)},$$

где E — линейно независимое подмножество направляющих векторов ребер конуса C_u^m , а x — целая точка фундаментального параллелепипеда, т.е. имеет вид $u + \sum_{\varepsilon \in E} \alpha_\varepsilon \varepsilon$, где все α_ε принадлежат $[0, 1]$.

Пусть, кроме того, $F \subset E$ — подмножество таких ε , что $\exp^* \varepsilon$ содержит q в отрицательной степени. Ясно, что степень вхождения q в $\exp^* x$ не меньше, чем в

$$\prod_{\varepsilon \in F} \exp^* \varepsilon. \quad (3)$$

Таким образом, при домножении числителя и знаменателя на произведение (3) рассматриваемое слагаемое примет нужный вид (мы пользуемся предложением 3.2(с) и тем, что ребра конуса C_u^i есть в точности содержащиеся в нем ребра конуса C_u). $\square$

Далее, рассмотрим в кольце $\mathbb{C}(z_1^{\pm 1}, \dots, z_{n-1}^{\pm 1}, q^{\pm 1})$ подкольцо T функций, которые представляются в виде отношения двух полиномов Лорана таким образом, чтобы в знаменателе стояло произведение сомножителей вида $1 - \exp \alpha$, где α — корень алгебры $\hat{L}$. Все функции $\sigma^*(C_u^i)$ лежат в T . Пусть теперь R — кольцо характеров (рядов Лорана), носитель которых содержится в объединении конечного числа нижних множеств частично упорядоченного множества весов (см. [6]). Кольцо T вкладывается в R , так как каждый сомножитель вида $1 - \exp \alpha$ — обратимый элемент в R . Обозначим характер, являющийся образом функции $\sigma^*(C_u^i)$ при этом вложении, через τ_u^i .

Теперь заметим, что для $i \geq l_u$

$$\sigma^*(C_u^{i+1}) = \frac{\sigma^*(C_u^i)}{1 - \exp \gamma_{i+1}},$$

и, следовательно, в R имеем $\tau_u^{i+1}(1 - \exp \gamma_{i+1}) = \tau_u^i$. Однако при $i \rightarrow \infty$ степень вхождения q в моном $\exp \gamma_{i+1}$ неограниченно растет и, следовательно, коэффициенты рядов τ_u^i стабилизируются. Это позволяет определить предельный ряд τ_u .

Мы, наконец, готовы доказать следующий аналог теоремы Бриона для многогранника Π .

Теорема 3.1. *В R имеет место тождество*

$$S^*(\Pi) = \sum_{u - \text{вершина из } \Pi} \tau_u. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть Π_m — сечение многогранника Π пространством $\{(x_i) \mid x_i = 0 \text{ при } i > m\}$. Вершины многогранника Π_m суть в точности вершины многогранника Π с $m_u \leq m$. Таким образом, из теоремы Бриона выводим, что

$$S^*(\Pi_m) = \sum_{\substack{u \text{ — вершина из } \Pi \\ m_u \leq m}} \sigma^*(C_u^m).$$

Отсюда сразу получаем равенство в кольце R :

$$S^*(\Pi_m) = \sum_{u \text{ — вершина из } \Pi} \tau_u^m. \quad (5)$$

(Мы полагаем $\tau_u^m = 0$ при $m < m_u$.)

Очевидно, что коэффициенты рядов в левой части формулы (5) стабилизируются к коэффициентам ряда $S^*(\Pi)$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, коэффициенты рядов τ_u^m по определению стабилизируются к коэффициентам ряда τ_u . Однако из предложения 3.3 следует, что степень вхождения q во все мономы рядов τ_u^m и τ_u не меньше $(m_u - 1)/(n - 1)$. Это означает, что для каждого монома коэффициент при нем в правой части равенства (4) такой же, как в правой части равенства (5) при достаточно больших m , так как есть лишь конечное число таких u , что соответствующий коэффициент в τ_u^m или τ_u может быть ненулевым. Отсюда и получаем в пределе равенство (4). $\square$

Для вычисления $\text{char } S$ остается вычислить вклады вершин τ_u .

§4. Вычисление вкладов вершин

Вершины разбиваются на простые и непростые в соответствии с тем, являются ли направляющие векторы ребер вершинного конуса линейно независимыми (т.е. является ли вершинный конус симплицальным). Ясно, что вершина является простой тогда и только тогда, когда она для каждого i принадлежит ровно одной из граней Γ_i и Δ_i . Вычисление $S^*(\Pi)$ посредством теоремы 3.1 возможно благодаря следующему ключевому утверждению.

Теорема 4.1. *Для непростой вершины u имеем $\tau_u = 0$.*

Доказательство. Нам удобны будут следующие два обозначения. Во-первых, для множества X гиперграней многогранника Π обозначим через X' множество граней, полученное из X заменой каждой грани Γ_i на Γ_{i-1} , а Δ_i на Δ_{i-1} . (Вхождение Γ_1 и Δ_1 в X не влияет на X' .) Кроме того, обозначим через ξ операцию «сдвига» — замену z_1 на z_2 , z_2 на $z_3, \dots, z_{n-1}$ на $z_1 q$. Эту замену можно рассматривать как действие $\xi \in W$ из введения на характерах. Перейдем к доказательству.

Достаточно показать, что $\sigma^*(C_u^{l_u}) = 0$. Для этого воспользуемся индукцией по параметру l_u .

Применим теорему 2.3 к конусу $C_u^{l_u}$ и гиперплоскости β вида $x_1 = \text{const}$, содержащей u . Эта гиперплоскость есть либо Γ_1 , либо Δ_1 и является гипергранью конуса. Обозначим множество направляющих векторов ребер конуса $C_u^{l_u}$, не лежащих в β (т.е. имеющих ненулевую первую координату), через $\{\varepsilon_j\}$. Для каждого ε_j пусть C_j обозначает конус, фигурирующий в теореме 2.3. Эта теорема показывает, что

$$\sigma^*(C_u^{l_u}) = \sum_j \sigma^*(C_j).$$

Мы утверждаем, что из предположения индукции следует, что если конус C_j не симплицальный, то $\sigma^*(C_j) = 0$. В самом деле, рассмотрим конус $D_j = C_j \cap \beta$. Так как у C_j всего одно ребро не лежит в β (ребро с направляющим вектором ε_j), достаточно показать, что $\sigma^*(D_j) = 0$.

Для этого рассмотрим множество X гиперграней, содержащих ребро, заданное вектором ε_j . Из предложений 3.2(а) и 3.1(с) видно, что множество X' есть в точности множество граней конуса $C_{u'}^{l_{u'}}$ для некоторой вершины u' , причем $l_{u'} = l_u - 1$. Однако ясно, что

$$\exp^*(-u)\sigma^*(D_j) = \xi(\exp^*(-u')\sigma^*(C_{u'}^{l_{u'}})).$$

Но конусы D_j и, следовательно, $C_{u'}^{l_{u'}}$ непростые, и по предположению индукции $\sigma^*(C_{u'}^{l_{u'}}) = 0$.

Осталось показать, что сумма $\sigma^*(C_j)$ по симплицальным конусам C_j также обращается в 0, откуда, в частности, следует база индукции. Рассмотрим такое C_j . В введенном выше множестве X' содержится ровно одна из граней Γ_i и Δ_i для каждого $1 \leq i \leq l_u - 1$. Из предложений 3.1 и 3.2 нетрудно вывести, что такое возможно лишь в том случае, если множество I индексов i , таких, что $u \in \Gamma_i \cap \Delta_i$, имеет следующий вид:

$$[l_1, r_1] \cup \dots \cup [l_s, r_s],$$

где $l_1 = n + 1$ и $l_{c+1} - r_c = n$ для всех $c < s$. При этом множество X устроено так: оно содержит грани Γ_{r_c} для всех $c < s$, одну (произвольную) из граней Γ_{r_s} и Δ_{r_s} , а для всех остальных $i \in I$ оно содержит Δ_i .

Таким образом, если симплицальные конусы C_j наличествуют, то их ровно два: C_{j_1} и C_{j_2} . Покажем, что $\sigma^*(C_{j_1}) + \sigma^*(C_{j_2}) = 0$. Обозначим через U множество граней, содержащих u . Теперь снова прибегнем к индукции по l_u ; для этого рассмотрим следующие случаи.

1. Число $r_1 - n + 1$ (номер первой ненулевой координаты вектора u) больше 2. В этом случае рассмотрим вершину u' , такую, что множество содержащих ее граней есть $U' \setminus \{\Delta_n\}$. Для нее определены аналогичные конусы C'_1 и C'_2 . При этом явное вычисление показывает, что

$$\frac{\sigma^*(C_{j_1})}{\xi(\sigma^*(C'_1))} = \frac{\sigma^*(C_{j_2})}{\xi(\sigma^*(C'_2))},$$

а это в силу предположения $\sigma^*(C'_1) = \sigma^*(C'_2)$ дает требуемое.

2. $r_1 = n + 1$, но $s > 1$. Тогда, аналогично, воспользуемся предположением индукции для вершины u' , такой, что множество содержащих ее граней есть $U^{(n)} \setminus \{\Gamma_1\}$ (здесь $^{(n)}$ означает n -кратное применения операции $'$).

3. $r_1 = n + 1$ и $s = 1$. Этот случай — база индукции, для него нужное равенство проверяется непосредственно. $\square$

Перейдем к описанию простых вершин. Простая вершина u для каждого i принадлежит ровно одной из граней Γ_i и Δ_i . Соответственно для каждого i конус C_u имеет ровно одно ребро с направляющим вектором ε_i , первая ненулевая координата которого имеет номер i . При этом можно выписать равенство

$$\tau_u = \frac{\exp^* u}{(1 - \exp^* \varepsilon_1)(1 - \exp^* \varepsilon_2) \dots}. \quad (6)$$

Теперь заметим, что, согласно предложению 3.1, если простая вершина принадлежит Δ_i (а, значит, не принадлежит Γ_i), то она принадлежит и Δ_{i+n-1} и не принадлежит Γ_{i+n-1} . Таким образом, простые вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с хорошими последовательностями нулей и единиц из введения. Обозначим через u_y вершину, соответствующую последовательности y . Покажем, что таким образом нами доказана теорема 1.2, точнее говоря, имеет место

Предложение 4.1. *Для каждой хорошей последовательности y имеет место равенство $\tau_{u_y} = \exp(w_y \lambda - \lambda) F_y$.*

Доказательство. Достаточно доказать равенство $\exp^* u_y = \exp(w_y \lambda - \lambda)$ и проверить, что выражения $\exp^*(-u_y) \tau_{u_y}$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (1). Из (6) нетрудно видеть, что для последней проверки достаточно доказать равенство $\exp^* \varepsilon_1 = \exp(w_y \gamma_1)$.

Оба нужных равенства легко проверяются прямым вычислением при помощи индукции по параметру m_{u_y} — номеру последней единицы в последовательности y . $\square$

Таким образом, полностью разобран случай веса λ , для которого все числа a_i ненулевые. Как и было обещано, объясним, каким образом оставшийся случай сводится к разобранному.

§5. Случай веса с нулевой координатой

В рамках этого параграфа нам удобно будет соглашение $a_n = a_0$.

Отличие этого случая состоит в том, что, если $a_i = 0$, то вершина многогранника Π может содержаться одновременно и в Γ_i , и в Δ_i , хотя $i \leq n$. Отметим, что множества Γ_i и Δ_i формально определяются так же (как пересечение Π с гиперплоскостью), однако могут не быть уже попарно различными и иметь коразмерность больше единицы. Тем не менее, содержание §3 с минимальными изменениями переносится на этот случай. В частности, для каждой вершины u аналогично определяется τ_u и доказывается полный аналог теоремы 3.1.

Однако простая ситуация, описанная в §4, в этом случае места не имеет. У Π появляются непростые вершины с ненулевыми вкладами. Чтобы свести случай к общему, сделаем следующее замечание.

Рассмотрим произвольный вес λ_1 , не имеющий нулевых координат, т. е. относящийся к рассмотренному выше случаю. Пусть Π_1 — соответствующий многогранник. Предложение 3.1 показывает, что для любой его вершины набор ω содержащих ее гиперграней удовлетворяет следующим трем условиям.

1. Для каждого $i > 0$ набор ω содержит хотя бы одну из граней Γ_i и Δ_i .
2. ω содержит лишь конечное число граней типа Γ .
3. Для каждого $i > 0$ набор ω содержит и Γ_i , и Δ_i тогда и только тогда, когда он содержит и Γ_{i-1} , и Δ_{i-n} .

(Речь, естественно, идет о гранях многогранника Π_1 .) Более того, ясно, что каждый набор граней, удовлетворяющий этим трем условиям, есть в точности множество граней, содержащих некоторую вершину многогранника Π_1 .

Обозначим теперь через Ω множество наборов символов Γ_i и Δ_i , удовлетворяющих этим трем условиям. Такие наборы находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами многогранника Π_1 , заданного произвольным весом

без нулевых координат. Пусть u_1 — вершина многогранника Π_1 , а τ_{u_1} — соответствующий вклад в $S(\Pi_1)$. Пусть $\omega \in \Omega$ соответствует вершине u_1 . Тогда корректно определяется

$$\tau_\omega = \exp^*(-u_1)\tau_{u_1}.$$

Перейдем теперь к весу λ . Здесь необходимо добавить четвертое условие.

4. Если $a_i = 0$, то ω содержит и Γ_i , и Δ_i тогда и только тогда, когда он содержит и Γ_{i-1} или когда $i = 1$.

Аналогично предложению 3.1 показывается, что множество наборов символов, удовлетворяющих условиям 1–4, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством вершин многогранника Π . Обозначим множество таких наборов через $\Omega_{A\lambda}$, где $A\lambda$ есть множество таких i , что $a_i = 0$. Для $\omega \in \Omega_{A\lambda}$ тоже определяется

$$\tau_\omega = \exp^*(-u)\tau_u,$$

где u — вершина многогранника Π , соответствующая ω .

Теперь аналогично определим Ω_A для любого $A \subset [1, n]$ (в частности, $\Omega = \Omega_\emptyset$) и характер τ_ω для каждого $\omega \in \Omega_A$. Мы пользуемся тем, что набор Ω_A зависит лишь от набора индексов A , а не от конкретного веса, и тем, что конусы при вершинах, соответствующих одному ω , получаются друг из друга сдвигом. Если даны два набора индексов $A \subset B \subset [1, n]$, то для каждого $\omega_A \in \Omega_A$ существует единственный набор $\omega_B \in \Omega_B$, такой, что $\omega_A \subset \omega_B$. Это ясно из того, что набор ω_A можно единственным образом дополнить так, чтобы новое, отвечающее B , условие 4 выполнялось. Более того, нетрудно видеть, что каждый $\omega_B \in \Omega_B$ соответствует таким образом некоторому $\omega_A \in \Omega_A$. Имеем сюръективное отображение

$$\varphi_{A,B}: \Omega_A \rightarrow \Omega_B.$$

В силу теоремы 3.1 для λ и теоремы 1.2 для веса λ_1 теорема 1.2 для λ сводится к следующему утверждению.

Теорема 5.1. Пусть $A = \{i_1, \dots, i_s\}$. Для каждого $\omega \in \Omega_{A\lambda}$

$$\tau_\omega = \sum_{\omega' \in \varphi_{\emptyset, A\lambda}^{-1}(\omega)} \tau_{\omega'}.$$

Доказательство. Рассмотрим набор $A = \{i_1 < \dots < i_s\}$ и $B = A \cup \{i_{s+1}\}$ с $i_{s+1} > i_s$. Достаточно индукцией по s показать, что для любого $\omega_B \in \Omega_B$ справедливо равенство

$$\tau_{\omega_B} = \sum_{\omega_A \in \varphi_{A,B}^{-1}(\omega_B)} \tau_{\omega_A}. \quad (7)$$

Рассмотрим вес λ_B с набором нулевых координат B и многогранник Π_B . Пусть u_B — вершина многогранника Π_B , отвечающая набору ω_B . Если $u_B \notin \Gamma_{i_{s+1}-1}$ (грани многогранника Π_B), то $\Gamma_{i_{s+1}-1} \notin \omega_B$ и $\omega_B \in \Omega_A$, т. е. $\varphi_{A,B}^{-1}(\omega_B) = \{\omega_B\}$.

Если же $u_B \in \Gamma_{i_{s+1}-1}$, то отметим, что $\{\Gamma_i, \Delta_i\} \subset \omega_B$, и применим к конусу C_{u_B} и гиперплоскости $\Gamma_{i_{s+1}-1}$ теорему 2.3. Точнее говоря, поскольку рассматривается конечномерный случай, ее следует применять к конечномерному сечению конуса $C_{u_B}^m$ с $m > l_{u_B}$ и соответствующей гиперплоскости. Из следующего

ниже рассуждения видно, что получаемое таким образом равенство отличается от (7) домножением обеих частей на один и тот же множитель

$$\prod_{i>m} (1 - \exp \gamma_i)^{-1}.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что если ребро конуса $C_{u_B}^m$ не лежит в $\Gamma_{i_{s+1}-1}$, то оно не лежит хотя бы в одной из граней Γ_i, Δ_i , а значит, набор содержащих это ребро граней, объединенный с $\{\Gamma_{i_{s+1}-1}\}$, имеет вид $\omega_A \in \varphi_{A,B}^{-1}(\omega_B)$ и соответствующее слагаемое есть $\exp^*(u_B)_{\tau_{\omega_A}}$. Верно и обратное: произвольный набор $\omega_A \in \varphi_{A,B}^{-1}(\omega_B)$ содержит $\Gamma_{i_{s+1}-1}$ и соответствует ребру конуса.

Заметим, что это рассуждение не покрывает случай $s = 0$ и $i_1 = 1$. Однако он сводится к случаю $s = 0$ и $i_1 = n$: $\Omega_{\{1\}}$ получается из $\Omega_{\{n\}}$ заменой каждого набора ω на набор

$$\{\Gamma_1, \Delta_1\} \cup \{\Gamma_{i+1} \mid \Gamma_i \in \omega\} \cup \{\Delta_{i+1} \mid \Delta_i \in \omega\}.$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, *Addendum to 'Bosonic formulas for (k, l) -admissible partitions'*, The Ramanujan J., **7**:4 (2003), 519–530.
- [2] B. Feigin, A. Stoyanovsky, *Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/9308079v1>.
- [3] А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин, *Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта*, Функц. анализ и его прил., **28**:1 (1994), 68–90.
- [4] M. Brion, *Points entiers dans les polyèdres convexes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **21**:4 (1988), 653–663.
- [5] C. J. Brianchon, *Théorème nouveau sur les polyèdres*, J. Ecole (Royale) Polytechnique, **15** (1837), 317–319.
- [6] R. Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [7] M. Beck, S. Robins, *Computing the Continuous Discretely. Integer-point enumeration in polyhedra*, Springer-Verlag, New York, 2007.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Международная лаборатория теории представлений
и математической физики
e-mail: imakhlin@mail.ru

Поступила в редакцию
24 февраля 2014 г.