Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:32:16

Monographs in Math., Springer-Verlag, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2012.
 [16] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

Санкт-Петербургский государственный университет,
 Лаборатория им. П. Л. Чебышева
 e-mail: juliavmeshke@yandex.ru

Поступила в редакцию
 7 февраля 2014 г.

Санкт-Петербургский государственный университет,
 физический факультет
 e-mail: suslina@list.ru

УДК 517.958+621.372.8

О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла*

© 2015. Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ, А. С. ПОРЕЦКИЙ, О. В. САРАФАНОВ

Постановка краевой задачи. Пусть G — область в $\mathbb{R}^3$, совпадающая вне большого шара с объединением непересекающихся полуцилиндров $\Pi_+^q = \{(y^q, t^q) : y^q \in \Omega^q, t^q > 0\}$, где $q = 1, \dots, \mathcal{T} < \infty$ и Ω^q — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$; граница ∂G предполагается гладкой. В области G рассматривается система Максвелла

$$\begin{aligned} i \operatorname{rot} u^2(x) - k u^1(x) &= 0, \\ -i \operatorname{div} u^2(x) &= 0, \\ -i \operatorname{rot} u^1(x) - k u^2(x) &= 0, \\ i \operatorname{div} u^1(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\nu(x) \times u^1(x) = 0, \quad \langle u^2(x), \nu(x) \rangle = 0, \quad x \in \partial G, \quad (2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$, $\cdot \times \cdot$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G . Положим $U = (u^1, u^2)$ и систему (1), (2) запишем в виде $\mathcal{M}(k)U = 0$.

Собственные функции непрерывного спектра. Если для числа k существует решение $U = (u^1, u^2)$ задачи (1), (2) с оценкой $U(x) = O(|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$, не принадлежащее $L_2(G)$, то говорят, что k — точка непрерывного спектра, а U — отвечающая числу k собственная функция непрерывного спектра. Известно [2], что непрерывный спектр задачи (1), (2) имеет вид $\{k \in \mathbb{R} : |k| \geq \mu_{\mathfrak{M}}^{1/2}\} \cup \{0\}$; здесь $\mu_{\mathfrak{M}}$ — наименьшее из положительных собственных чисел задач Неймана для оператора Лапласа $-\Delta$ в областях Ω_q , $q = 1, \dots, \mathcal{T}$. Точка $k = 0$ формально принадлежит непрерывному спектру, однако матрица рассеяния в этой точке не вводится, поэтому мы исключим ее из рассмотрения. Число k называется собственным числом задачи (1), (2), если существует решение этой задачи, лежащее в $L_2(G)$; такое решение называется

*Исследование выполнено при поддержке грантов СПбГУ №11.38.666.2013 и РФФИ-12-01-00247а.

собственной функцией. Собственные числа не сгущаются на конечном расстоянии, а собственные функции экспоненциально затухают на бесконечности. Через $\ker \mathcal{M}(k)$ обозначим собственное пространство, натянутое на собственные функции, отвечающие собственному числу k . Пространство $\mathcal{E}(k)$, натянутое на собственные функции непрерывного спектра, содержит, в частности, собственное пространство $\ker \mathcal{M}(k)$. Кратностью $\varkappa(k)$ непрерывного спектра в точке k назовем размерность факторпространства $\mathcal{E}(k)/\ker \mathcal{M}(k)$. Число $\varkappa(k)$ конечно для всех k , функция $k \rightarrow \varkappa(k)$ четная, кусочно постоянная и возрастающая с увеличением $|k|$; ее точки разрыва называются порогами. Положительные пороги образуют последовательность, возрастающую к бесконечности. На каждом интервале между двумя соседними порогами значение $\varkappa(k)$ остается постоянным. Далее мы рассматриваем k на отрезке $[k', k'']$, свободном от порогов.

Матрица рассеяния. В пространстве $\mathcal{E}(k)/\ker \mathcal{M}(k)$ существует базис с представителями $\{Y_1^+, \dots, Y_\varkappa^+\}$, такими, что

$$Y_j^+(\cdot, k) = u_j^+(\cdot, k) + \sum_{l=1}^{\varkappa} s_{jl}(k) u_l^-(\cdot, k) + O(e^{-\delta|x|}), \quad j = 1, \dots, \varkappa, \quad (3)$$

при больших $|x|$ и для всех $\delta < \delta_0$; здесь u_j^+ (u_j^-) — «приходящие (уходящие) волны». При больших $|x|$ каждая из них удовлетворяет системе (1), (2), причем на множестве Π_+^q для некоторого q и больших $|x|$

$$u_j^\pm(y^q, t^q; k) = |2\lambda_j(k)k|^{-1/2} \exp(\mp i\lambda_j(k)t^q) \Phi_j^\mp(y^q; k)$$

и $u_j^\pm(\cdot; k) = 0$ на Π_+^r при $r \neq q$. Матрица $s(k) = \|s_{jl}(k)\|$ не зависит от выбора представителей в упомянутом базисе, унитарна и называется матрицей рассеяния.

Эллиптическое расширение системы Максвелла. Введем оператор $\{\mathcal{A}(D, k), \mathcal{B}\}$ эллиптической краевой задачи в области G ,

$$\mathcal{A}(D, k)\mathcal{U} = \begin{pmatrix} i \operatorname{rot} u^2 + i \nabla a^2 - k u^1 \\ -i \operatorname{div} u^2 - k a^1 \\ -i \operatorname{rot} u^1 - i \nabla a^1 - k u^2 \\ i \operatorname{div} u^1 - k a^2 \end{pmatrix}, \quad x \in G,$$

$$\mathcal{B}\mathcal{U} = (-\langle u^1, \tau_2 \rangle, \langle u^1, \tau_1 \rangle, \langle u^2, \nu \rangle, a^2), \quad x \in \partial G,$$

где $\mathcal{U} = (u^1, a^1, u^2, a^2)$, u^j — трехкомпонентные вектор-функции и a^j — скалярные функции, $j = 1, 2$. Здесь τ_1, τ_2, ν — правая тройка ортонормированных векторов: ν — вектор внешней нормали к границе ∂G , а τ_1, τ_2 — касательные векторы. Оператор этой задачи самосопряжен относительно формулы Грина

$$(\mathcal{A}(D, k)\mathcal{U}, \mathcal{V})_G + (\mathcal{B}\mathcal{U}, \mathcal{D}\mathcal{V})_{\partial G} = (\mathcal{U}, \mathcal{A}(D, k)\mathcal{V})_G + (\mathcal{D}\mathcal{U}, \mathcal{B}\mathcal{V})_{\partial G},$$

справедливой для $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in C_c^\infty(\overline{G}; \mathbb{C}^8)$; $\mathcal{D}\mathcal{U} = -i(\langle u^2, \tau_1 \rangle, \langle u^2, \tau_2 \rangle, a^1, -\langle u^1, \nu \rangle)$, $x \in \partial G$; наконец $(\cdot, \cdot)_G$ и $(\cdot, \cdot)_{\partial G}$ — скалярные произведения в $L_2(G; \mathbb{C}^8)$ и $L_2(\partial G; \mathbb{C}^4)$ соответственно. (Далее в обозначениях пространств вектор-функций не указывается число компонент.) Отметим, что граничное условие $-\langle u^1, \tau_2 \rangle = \mathcal{G}^1$, $\langle u^1, \tau_1 \rangle = \mathcal{G}^2$ равносильно равенству $\nu \times u^1 = \mathcal{G}^1 \tau_1 + \mathcal{G}^2 \tau_2$ (см. (2)).

Для задачи $\{\mathcal{A}(D, k), \mathcal{B}\}\mathcal{U} = 0$ вводятся собственные функции непрерывного спектра, волны и матрица рассеяния [1]. На интервале $k \in [k', k'']$ кратность непрерывного спектра $\Upsilon(k)$ постоянна, матрица рассеяния $S(k)$ блочно-диагональная и один из ее блоков совпадает с $s(k)$ [2].

Вспомогательная задача в усеченной области. Положим $\Pi_+^{q,R} = \{(y^q, t^q) \in \Pi_+^q : t^q > R\}$, $G^R = G \setminus \bigcup_{q=1}^{\mathcal{T}} \Pi_+^{q,R}$ при больших R . Тогда $\partial G^R \setminus \partial G = \Gamma^R = \bigcup_{q=1}^{\mathcal{T}} \Gamma^{q,R}$, где $\Gamma^{q,R} = \{(y^q, t^q) \in \Pi_+^q : t^q = R\}$. Введем эллиптическую краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D, k)\mathcal{U}(x) &= \mathcal{F}(x), & x \in G^R, \\ \mathcal{B}(x)\mathcal{U}(x) &= \mathcal{G}(x), & x \in \partial G^R \setminus \Gamma^R, \\ (\mathcal{B}(x) + i\mathcal{Q}(x))\mathcal{U}(x) &= \mathcal{H}(x), & x \in \Gamma^R. \end{aligned} \quad (4)$$

Граница ∂G^R содержит ребра $\partial \Gamma^{q,R}$; пусть $\partial \Gamma^R = \bigcup_{q=1}^{\mathcal{T}} \partial \Gamma^{q,R}$. Пусть, кроме того, r — гладкая положительная на $\overline{G^R} \setminus \partial \Gamma^R$ функция, совпадающая вблизи $\partial \Gamma^R$ с расстоянием $\text{dist}(x, \partial \Gamma^R)$. Через $H_{\beta}^l(G^R)$, $l = 0, 1$, обозначим замыкание множества $C_c^{\infty}(\overline{G^R} \setminus \partial \Gamma^R)$ по норме

$$\|u; H_{\beta}^l(G^R)\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{G^R} r(x)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D_x^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

а через $H_{\beta}^{1/2}(\Gamma^R)$ и $H_{\beta}^{1/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R)$ пространства следов функций из $H_{\beta}^1(G^R)$ на Γ^R и $\partial G^R \setminus \Gamma^R$.

Теорема 1. *Существует число $\varepsilon > 0$, такое, что при $\beta \in (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ и*

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}\} \in H_{\beta}^0(G^R) \times H_{\beta}^{1/2}(\partial G^R \setminus \Gamma^R) \times H_{\beta}^{1/2}(\Gamma^R),$$

задача (4) имеет единственное решение $\mathcal{U} \in H_{\beta}^1(G^R)$. Если $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = 0$ и $\beta \leq 1/2$, то для решения $\mathcal{U}$ выполняется неравенство $\|\mathcal{Q}\mathcal{U}; L_2(\Gamma^R)\| \leq \|\mathcal{H}; L_2(\Gamma^R)\|$.

Функционал и теорема о сходимости. Пусть $\mathcal{U}_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, \Upsilon$, — волны задачи $\{\mathcal{A}(D, k), \mathcal{B}\}\mathcal{U} = 0$. Обозначим через $X_l^R(\cdot, k; a)$ решение задачи (4) с правой частью

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = 0, \quad \mathcal{H} = (\mathcal{B} + i\mathcal{Q}) \left(\mathcal{U}_l^+(\cdot, k) + \sum_{j=1}^{\Upsilon} a_j \mathcal{U}_j^-(\cdot, k) \right),$$

где $a = (a_1, \dots, a_{\Upsilon})$ — произвольный вектор из $\mathbb{C}^{\Upsilon}$. Введем функционал

$$\mathbb{C}^{\Upsilon} \ni a \mapsto J_l^R(a; k) = \left\| \mathcal{Q} \left(X_l^R(\cdot, k; a) - \mathcal{U}_l^+(\cdot, k) - \sum_{j=1}^{\Upsilon} a_j \mathcal{U}_j^-(\cdot, k) \right); L_2(\Gamma^R) \right\|^2. \quad (5)$$

Пусть $Z_{j,R}^{\pm}$ — решение задачи (4) при $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{H} = (\mathcal{B} + i\mathcal{Q})\mathcal{U}_j^{\pm}(\cdot, k)$. Имеем $X_l^R = Z_{l,R}^+ + \sum a_j Z_{j,R}^-$. Теперь функционал принимает вид

$$J_l^R(a; k) = \langle a E^R, a \rangle + 2 \text{Re} \langle F_l^R, a \rangle + G_l^R, \quad (6)$$

где E^R, F^R — матрицы размера $\Upsilon \times \Upsilon$ с элементами

$$E_{ij}^R = (\mathcal{Q}(Z_{i,R}^- - \mathcal{U}_i^-), \mathcal{Q}(Z_{j,R}^- - \mathcal{U}_j^-))_{\Gamma^R}, \quad F_{ij}^R = (\mathcal{Q}(Z_{i,R}^+ - \mathcal{U}_i^+), \mathcal{Q}(Z_{j,R}^- - \mathcal{U}_j^-))_{\Gamma^R},$$

вектор F_l^R — строка с номером l матрицы F^R , а $G_l^R = \|\mathcal{Q}(Z_{l,R}^+ - \mathcal{U}_l^+)\|_{\Gamma^R}^2$.

В качестве приближения для строки $(S_{1\Upsilon}, \dots, S_{l\Upsilon})$ матрицы рассеяния $S(k)$ выберем минимизатор $a^0(R, k) = (a_1^0(R, k), \dots, a_\Upsilon^0(R, k))$ функционала (5). Из (6) следует, что минимизатор $a^0(R, k)$ является решением системы

$$a^0(R, k)E^R + F_l^R = 0,$$

а приближение S^R для матрицы рассеяния, состоящее из таких строк, удовлетворяет равенству $S^R E^R + F^R = 0$.

Теорема 2. Пусть отрезок $[k', k'']$ непрерывного спектра задачи (1), (2) не содержит порогов. Тогда для всех $k \in [k', k'']$ и $R > R_0$, где R_0 — достаточно большое число, существует единственный минимизатор $a^0(R, k)$ функционала (5), причем

$$|a_j^0(R, k) - S_{lj}(k)| \leq C e^{-\delta R}, \quad j = 1, \dots, \Upsilon;$$

здесь $\delta < \delta_0$ — то же число, что и в (3), а постоянная C не зависит ни от k , ни от R .

Так как матрица $S(k)$ блочно-диагональная, приближение для матрицы $s(k)$ дается блоком матрицы S^R . Метод допускает модификацию для вычисления матрицы рассеяния в окрестности порогов; для оператора Гельмгольца такая модификация описана в [4].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991. [2] Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, *Алгебра и анализ*, **25**:1 (2013), 94–155. [3] Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:1 (2014), 61–72. [4] Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, *Алгебра и анализ*, **26**:1 (2014), 128–164.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: boris.plamen@gmail.com

Поступила в редакцию
10 октября 2014 г.

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
Faculty of Information Technology, University of Jyväskylä
e-mail: poras1990@list.ru

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет
e-mail: saraf@math.nw.ru

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 22.01.2015. Дата выхода в свет 20.02.2015. Формат 70 × 100/16
Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,7 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 158 экз. Заказ 925.

Учредитель: Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. (499) 941-01-88
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6