Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, В. Н. Левчук, Описание безусловных базисов из значений ядер Данкля, *Функци. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 79–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:15:32

УДК 517.518

Описание безусловных базисов из значений ядер Данкла

© 2015. Г. М. ГУБРЕЕВ, В. Н. ЛЕВЧУК

В простейшем случае вещественной прямой ядро Данкла $d_\alpha(izt)$, $\alpha > -1$, задается ([1]–[3]) с помощью целой функции экспоненциального типа

$$d_\alpha(\lambda) := 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \lambda^{-\alpha} (J_\alpha(\lambda) + iJ_{\alpha+1}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где J_α — функция Бесселя первого рода,

$$J_\alpha(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n+1+\alpha)}, \quad \alpha > -1.$$

Обозначим через $L_2^\gamma(\mathbb{R})$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_\gamma := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} |x|^\gamma dx, \quad \gamma := 2\alpha + 1.$$

В дальнейшем используется обозначение $\|f\|_\gamma = (f, f)_\gamma^{1/2}$. Ядро $d_\alpha(izt)$ задает преобразование Данкла

$$(D_\alpha f)(x) := \frac{1}{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} \int_{\mathbb{R}} d_\alpha(ixt) f(t) |t|^\gamma dt,$$

которое является унитарным оператором в пространстве $L_2^\gamma(\mathbb{R})$. Этот факт нетрудно доказать, опираясь на известные свойства преобразования Ганкеля с ядром $(xt)^{1/2} J_\alpha(xt)$, $\alpha > -1$, в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ [4].

Заметим, что при $\alpha = -1/2$ ядро $d_\alpha(izt)$ равно $\exp\{izt\}$, т. е. преобразование Данкла совпадает с преобразованием Фурье. Кстати сказать, в упомянутых работах [1]–[3] ядро Данкла определялось формулой (1) только при значении параметра $\alpha \geq -1/2$.

Обозначим через $L_2^\gamma(-a, a)$ подпространство функций из $L_2^\gamma(\mathbb{R})$ с носителями на $[-a, a]$. Заметка посвящена описанию безусловных базисов вида

$$\{d_\alpha(i\lambda_k t) : \lambda_k \in \Lambda\}, \quad \alpha > -1, \quad (2)$$

пространства $L_2^\gamma(-a, a)$, $\gamma = 2\alpha + 1$. Отметим, что при $\alpha \leq -1$ такая постановка теряет смысл, поскольку $d_\alpha(i\lambda t) \notin L_2^\gamma(-a, a)$.

1. Пусть некоторая прямая $\mathbb{R} + ic$, $c \in \mathbb{R}$, находится на положительном расстоянии от комплексной последовательности $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с единственной предельной точкой ∞ . Введем обозначения

$$\Lambda_+^c := \{\lambda_k \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda_k > c\}, \quad \Lambda_-^c := \{\lambda_k \in \Lambda : \operatorname{Im} \lambda_k < c\}$$

и рассмотрим две последовательности

$$M_+ := \{\mu_k^+ = \lambda_k - ic, \lambda_k \in \Lambda_+^c\}, \quad M_- := \{\mu_k^- = \lambda_k - ic, \lambda_k \in \Lambda_-^c\}$$

из полуплоскостей $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ соответственно. Напомним, что условие Карлесона [5], например, для последовательности M_+ означает, что

$$\inf_k \left\{ \prod_{j \neq k} |\mu_k^+ - \mu_j^+| |\mu_k^+ - \overline{\mu_j^+}|^{-1} \right\} > 0.$$

Напомним также, что $\gamma = 2\alpha + 1$ и, следовательно, $\gamma > -1$.

Сформулируем теперь основной результат заметки о базисах (2) весовых пространств $L_2^\gamma(-a, a)$. Если прямая $\mathbb{R} + ic$, $c \in \mathbb{R}$, лежит на положительном расстоянии от последовательности Λ , то можно считать, что $c \neq 0$.

Теорема. Пусть $-1 < \gamma$ и последовательность Λ лежит на положительном расстоянии от прямой $\mathbb{R} + ic$, $c \neq 0$. Если последовательность Λ совпадает с множеством корней целой функции экспоненциального типа φ , которая удовлетворяет условиям

- (i) $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 |x|^\gamma (1+x^2)^{-1} dx < \infty$;
- (ii) $\limsup_{y \rightarrow \infty} y^{-1} \log |\varphi(iy)| = \limsup_{y \rightarrow -\infty} |y|^{-1} \log |\varphi(iy)| = a$;
- (iii) вес $W^2(x) := |x + ic|^\gamma |\varphi(x + ic)|^2$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию

$$\sup_l \left\{ \frac{1}{|l|} \int_l W^2(x) dx \frac{1}{|l|} \int_l W^{-2}(x) dx \right\} < \infty, \quad (A_2)$$

где l — интервал вещественной оси, $|l|$ — его длина;

(iv) корни функции φ простые и множества $M_\pm$ удовлетворяют условию Карлесона,

то система функций (2) образует безусловный базис пространства $L_2^\gamma(-a, a)$.

Обратно, если семейство (2) образует безусловный базис пространства $L_2^\gamma(-a, a)$ и γ не равно целому положительному нечетному числу, то Λ совпадает с множеством корней целой функции φ экспоненциального типа, которая удовлетворяет перечисленным условиям (i)–(iv).

Отметим, что справедлив следующий условный результат: если условия (i)–(iv) необходимы для безусловной базисности семейства (2) при значении параметра $\gamma = 1$, то они будут необходимыми и для всех положительных целых нечетных γ и, стало быть, для всех $\gamma > -1$. Основная трудность заключается в доказательстве необходимости условия (iii) при значении $\gamma = 1$, чего нам пока не удалось сделать.

Сформулированная теорема доказывается сначала для случая $-1 < \gamma < 1$ (трудная часть доказательства), а потом результат переносится на другие значения γ .

В основе доказательства лежит операторный подход, а также существенное развитие метода интегральных оценок норм резольвент, основы которого изложены в [6]–[7].

2. Остановимся кратко на основных этапах доказательства теоремы при $-1 < \gamma < 1$.

В пространстве $L_2^\gamma(-a, a)$ рассмотрим оператор

$$(Bh)(x) = i \int_0^x h_{\text{н}}(t) dt + i \int_0^x t^\gamma h_{\text{ч}}(t) dt x^{-\gamma}, \quad (3)$$

где $h_{\text{н}}(t) = 1/2(h(t) - h(-t))$, $h_{\text{ч}}(t) = 1/2(h(t) + h(-t))$. Оператор B ограничен в $L_2^\gamma(-a, a)$ тогда и только тогда, когда $-1 < \gamma < 1$, и в этом случае он является

вольтеровым оператором Гильберта–Шмидта. Проверяется, что имеет место равенство

$$Bd_\alpha(izt) = z^{-1}(d_\alpha(izx) - d_\alpha(0)), \quad (4)$$

справедливое при всех $\alpha > -1$, и, следовательно, $\gamma > -1$. Если семейство (2) образует безусловный базис в $L_2^\gamma(-a, a)$ и $-1 < \gamma < 1$, то существует единственная функция $f \in L_2^\gamma(-a, a)$, такая, что оператор

$$(Kh)(x) := (Bh)(x) + (h, f)_\gamma$$

обладает свойством $Kd_\alpha(i\lambda_n t) = \lambda_n^{-1}d_\alpha(i\lambda_n t)$, $\lambda_n \in \Lambda$ (предполагается, что $0 \notin \Lambda$). Простые вычисления дают

$$K(I - zK)^{-1}h = B(I - zB)^{-1}h + \varphi^{-1}(z)((I - zB)^{-1}h, f)_\gamma d_\alpha(izx), \quad (5)$$

где $\varphi(z) = 1 - z(d_\alpha(izt), f)_\gamma$. Поэтому корни целой функции φ совпадают с множеством Λ , и из свойств преобразования Данкла следует условие (i).

Спектральную структуру оператора B проясняет

Лемма 1. *Если $-1 < \gamma < 1$, то оператор B вида (3) в пространстве $L_2^\gamma(-a, a)$ подобен оператору*

$$(Jg)(x) = i \int_0^x g(t) dt$$

в пространстве $L_2(-a, a)$.

Далее, из базисности семейства (2) выводится интегральная оценка нормы резольвенты

$$\int_{\mathbb{R}+ic} \|K(I - zK)^{-1}h\|_\gamma^2 dz \leq M \|h\|_\gamma^2, \quad h \in L_2^\gamma(-a, a). \quad (6)$$

Из леммы 1, двусторонней оценки $\|d_\alpha(izx)\|_\gamma^2 \asymp |z|^{-\gamma}$ на прямой $\mathbb{R} + ic$, $c \neq 0$, и формул (5), (6) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}+ic} |z|^{-\gamma} |\varphi(z)|^{-2} |((I - zB)^{-1}h, f)_\gamma|^2 dz \leq M_1 \|h\|_\gamma^2.$$

Этот факт используется при доказательстве следующей леммы.

Лемма 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- (а) для всех $h \in L_2^\gamma(-a, a)$ имеет место оценка (6);
- (б) вес $W^2(x) = |x + ic|^\gamma |\varphi(x + ic)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) .

Сформулированная лемма лежит в основе доказательства двусторонней оценки

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+^c} a_k d_\alpha(i\lambda_k x) + \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-^c} b_k d_\alpha(i\lambda_k x) \right\|_\gamma^2 \\ & \asymp \int_{\mathbb{R}+ic} |z|^{-\gamma} \left| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_+^c} \frac{a_k e^{-i\lambda_k a}}{z - \lambda_k} \right|^2 dz + \int_{\mathbb{R}+ic} |z|^{-\gamma} \left| \sum_{\lambda_k \in \Lambda_-^c} \frac{b_k e^{i\lambda_k a}}{z - \lambda_k} \right|^2 dz, \end{aligned}$$

где $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ — произвольные финитные комплексные последовательности. Таким образом, в случае базисности семейства (2) системы дробей $\{(x - \mu_k^+)^{-1}, \mu_k^+ \in M_+\}$, $\{(x - \mu_k^-)^{-1}, \mu_k^- \in M_-\}$ образуют безусловные базисы в замыканиях

своих линейных оболочек в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с мерой $|x + ic|^{-\gamma} dx$. Поэтому, последовательности $M_{\pm}$ удовлетворяют условию Карлесона [6].

И, наконец, стандартными рассуждениями доказывается, что условие (ii) является необходимым для полноты в $L_2^{\gamma}(-a, a)$ системы собственных функций $d_{\alpha}(i\lambda_k x)$ оператора K . Таким образом, мы кратко объяснили происхождения всех четырех условий теоремы и наметили путь доказательства их необходимости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. F. Dunkel, Trans. Amer. Math. Soc., **311**:1 (1989), 167–183. [2] M. de Jeu, Trans. Amer. Math. Soc., **358**:10 (2006), 4225–4250. [3] N. B. Anderson, M. de Jeu, Int. Math. Res. Notices, **30** (2005), 1817–1831. [4] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966. [5] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984. [6] Г. М. Губреев, Алгебра и анализ, **12**:6 (2000), 1–97. [7] Г. М. Губреев, Изв. РАН, сер. матем, **69**:1 (2005), 17–60. [8] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

Полтавский национальный технический университет
e-mail: lentina88@mail.ru

Поступила в редакцию
21 января 2014 г.

УДК 517.91+517.43

Степенная асимптотика спектральных функций граничных задач для обобщенных дифференциальных уравнений второго порядка с граничными условиями на сингулярном конце

© 2015. И. С. Кац

1. Обобщенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Пусть $\mathcal{I}$ — промежуток вещественной оси с концами в точках a и b ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Пусть $\mathcal{M}(x)$, $x \in \mathcal{I}$, — неубывающая функция, которая может иметь интервалы постоянства, абсолютно непрерывную составляющую, непрерывную сингулярную составляющую, точки разрыва и даже всюду плотное на $\mathcal{I}$ множество таких точек. Через $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ мы обозначаем множество точек роста функции $\mathcal{M}(x)$. Пусть $\inf \mathcal{F}_{\mathcal{M}} = a_0 (\geq a)$, $\sup \mathcal{F}_{\mathcal{M}} = b_0 (\leq b)$. Пусть $\mathcal{Q}(x)$, $x \in \mathcal{I}$, — разность двух неубывающих функций. Левый конец (правый конец) промежутка $\mathcal{I}$ называем *регулярным*, если $a_0 > -\infty$ ($b_0 < +\infty$), $\inf_{x \in \mathcal{I}} \mathcal{M}(x) > -\infty$ ($\sup_{x \in \mathcal{I}} \mathcal{M}(x) < +\infty$) и $\mathcal{Q}(x)$ имеет ограниченное изменение в какой-то правой (левой) полукрестности точки a_0 (точки b_0). В противном случае этот конец называем *сингулярным*.

Еще в работе [1] была введена обобщенная дифференциальная операция $l_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}[]$, действие которой на функцию f в общих чертах выражается равенством

$$l_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}[f](x) = -\frac{d}{d\mathcal{M}(x)} \left(f^+(x) - \int_{c+0}^{x+0} f(s) d\mathcal{Q}(x) \right),$$