Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Мешкова, Т. А. Суслина, Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем, *Функци. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 88–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:04:07

УДК 517.956.4

Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем*

© 2015. Ю. М. МЕШКОВА, Т. А. СУСЛИНА

В работе изучается усреднение (гомогенизация) решений параболических систем с периодическими коэффициентами. Этой задаче много внимания уделяется в книгах по теории усреднений (см., например, [1]–[3]). *Операторные оценки погрешности* для таких задач в $\mathbb{R}^d$ изучались в [4]–[10]. В настоящей работе представлены результаты по усреднению решений начально-краевых задач для параболических систем в ограниченной области. При этом мы опираемся на недавние результаты по усреднению эллиптических краевых задач ([11]–[14]).

1. Класс операторов. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω — элементарная ячейка этой решетки. Для всякой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Пусть $g(\mathbf{x})$ есть Γ -периодическая эрмитова матрица-функция размера $m \times m$. Предполагается, что $g(\mathbf{x})$ положительно определена и $g, g^{-1} \in L_\infty$. Пусть $b(\mathbf{D})$ есть $(m \times n)$ -матричный дифференциальный оператор вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные матрицы. Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geq n$ и

$$\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Это равносильно выполнению неравенств $\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n$ при $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ с некоторыми $\alpha_0, \alpha_1 > 0$.

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с краевым условием Дирихле. Строго говоря, $A_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор, порожденный замкнутой и положительно определенной квадратичной формой $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Здесь $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ по норме пространства $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

В случае условия Неймана наложим более сильное ограничение, чем (1):

$$\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \quad (2)$$

Как показано в [15], условие (2) необходимо и достаточно для коэрцитивности формы $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2$: существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$, такие, что

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + c_2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \geq c_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (3)$$

Тогда форма $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, замкнута и неотрицательна. Порожденный ею оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ обозначим через $A_{N,\varepsilon}$. Формально он задан выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с краевым условием Неймана $\partial_\nu^\varepsilon \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (здесь $\partial_\nu^\varepsilon \mathbf{u}$ означает соответствующую конормальную производную).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00760). Первый автор поддержан Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026, и ОАО «Газпром нефть».

Чтобы избежать дублирования формулировок, используем значок $\flat = D, N$. Ниже, если $\flat = D$, предполагается выполненным условие (1), а в случае $\flat = N$ — условие (2).

Нас интересует поведение операторной экспоненты $e^{-A_{\flat,\varepsilon}t}$, $t > 0$, при малом ε . Выясняется, что при фиксированном $t > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор $e^{-A_{\flat,\varepsilon}t}$ сходится по операторной норме в L_2 к экспоненте $e^{-A_{\flat}^0 t}$ от эффективного оператора.

2. Эффективный оператор. Пусть $(n \times m)$ -матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является (слабым) Γ -периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

(Отметим, что Λ принадлежит $H_{\text{per}}^1(\Omega)$, но в общем случае может не быть ограниченной.) Эффективная матрица g^0 размера $m \times m$ определена выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{где } \tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m).$$

Матрица g^0 положительно. Эффективный оператор A_D^0 задается выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Эффективный оператор A_N^0 задается выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на функциях из $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, удовлетворяющих условию $\partial_{\nu}^0 \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (здесь $\partial_{\nu}^0 \mathbf{u}$ означает кономальную производную, отвечающую оператору $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$).

3. Основные результаты. Операторы $A_{D,\varepsilon}$ и A_D^0 положительно определены. Число $c_D^{\circ} = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_{\infty}}^{-1} (\text{diam } \mathcal{O})^{-2}$ является их общей нижней гранью. Положим $c_D = c_D^{\circ}/2$.

Для операторов $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 точка $\lambda = 0$ является собственным значением, причем собственные подпространства совпадают: $\text{Ker } A_{N,\varepsilon} = \text{Ker } A_N^0 = Z$, где $Z := \text{Ker } b(\mathbf{D})$ — конечномерное подпространство в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Положим $H_{\perp}^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) = \{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) : (\mathbf{u}, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0 \text{ для любого } \mathbf{z} \in Z\}$. Через $\mathcal{P}_Z$ обозначим ортопроектор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ на Z . Отметим очевидное тождество $e^{-A_{N,\varepsilon}t} - e^{-A_N^0 t} = (e^{-A_{N,\varepsilon}t} - e^{-A_N^0 t})(I - \mathcal{P}_Z)$. Согласно [13], существует постоянная c_3 , такая, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq c_3 \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_{\perp}^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (4)$$

Число $c_N^{\circ} = \|g^{-1}\|_{L_{\infty}}^{-1} c_3^{-1}$ заведомо не превосходит μ_2^{ε} и μ_2^0 , где μ_2^{ε} (соответственно μ_2^0) — первое ненулевое собственное значение оператора $A_{N,\varepsilon}$ (соответственно A_N^0). Положим $c_N = c_N^{\circ}/2$.

Теорема 1. Найдется число $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\|e^{-A_{\flat,\varepsilon}t} - e^{-A_{\flat}^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C_1^{\flat} e^{-c_{\flat} t} \varepsilon (t + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t \geq 0, \quad \flat = D, N. \quad (5)$$

При аппроксимации оператора $e^{-A_{\flat,\varepsilon}t}$ по $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме необходимо учитывать корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения $R_{\mathcal{O}}: H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Требуется, чтобы $R_{\mathcal{O}}$ одновременно был непрерывным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и из $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Такой оператор существует (см., например, [16]). Через $R_{\mathcal{O}}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Корректор в случае условия Дирихле определяется выражением $K_D(t; \varepsilon) := R_{\mathcal{O}} \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-A_D^0 t}$, а в случае условия Неймана — выражением $K_N(t; \varepsilon) := R_{\mathcal{O}} \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-A_N^0 t} (I - \mathcal{P}_Z)$. В общем случае корректор $K_b(t; \varepsilon)$ содержит вспомогательный оператор S_ε , определенный равенством $(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z}$, $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Используя свойства оператора S_ε и включение $\Lambda \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$, нетрудно убедиться, что оператор $K_b(t; \varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При дополнительном условии $\Lambda \in L_\infty$ функция Λ оказывается мультипликатором в $H^1(\mathcal{O})$ (см. [11]), и тогда можно использовать обычный корректор $K_b^0(t; \varepsilon) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b^0 t}$, который в этом случае является ограниченным оператором из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Следующая теорема дает $(L_2 \rightarrow H^1)$ -аппроксимацию экспоненты $e^{-A_b, \varepsilon t}$, а также $(L_2 \rightarrow L_2)$ -аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b, \varepsilon t}$. Использованы обозначения $G_D(t; \varepsilon) := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-A_D^0 t}$, $G_N(t; \varepsilon) := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-A_N^0 t} (I - \mathcal{P}_Z)$.

Теорема 2. *Найдется число $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , такое, что при $b = D, N$ имеют место следующие утверждения.*

1°. *При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $t > 0$ справедливы оценки*

$$\|e^{-A_b, \varepsilon t} - e^{-A_b^0 t} - \varepsilon K_b(t; \varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq C_2^b e^{-c_b t} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}), \quad (6)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b, \varepsilon t} - G_b(t; \varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C_3^b e^{-c_b t} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}). \quad (7)$$

2°. *Пусть $\Lambda \in L_\infty$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $t > 0$ справедливы оценки*

$$\|e^{-A_b, \varepsilon t} - e^{-A_b^0 t} - \varepsilon K_b^0(t; \varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \tilde{C}_2^b e^{-c_b t} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}), \quad (8)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b, \varepsilon t} - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{C}_3^b e^{-c_b t} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}). \quad (9)$$

Отметим, что $\varepsilon t^{-1} \leq \varepsilon^{1/2} t^{-3/4}$ при $t \geq \varepsilon^2$. При $t < \varepsilon^2$ неравенства (6)–(9) «портятся» и приходится применять достаточно грубые оценки.

Предложение 3. *При $t > 0$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедливы оценки*

$$\|e^{-A_b, \varepsilon t} - e^{-A_b^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq C_4^b t^{-1/2} e^{-c_b t}, \quad b = D, N, \quad (10)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-A_b, \varepsilon t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C_5^b t^{-1/2} e^{-c_b t}, \quad b = D, N. \quad (11)$$

Замечание 4. (i) Постоянные C_j^D из неравенств (5)–(7), (10), (11) (с $b = D$) зависят от $d, m, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$, а постоянные $\tilde{C}_j^D$ из неравенств (8), (9) (с $b = D$) зависят от тех же величин и еще от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. (ii) Постоянные C_j^N из неравенств (5)–(7), (10), (11) (с $b = N$) зависят от $d, n, m, \dim Z, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$, от параметров решетки Γ , от области $\mathcal{O}$, а также от постоянных c_1, c_2, c_3 из неравенств (3), (4). Постоянные $\tilde{C}_j^N$ из неравенств (8), (9) (с $b = N$) зависят от перечисленных величин и еще от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. (iii) Пусть $\delta > 0$ — произвольное достаточно малое число. Если считать ε достаточно малым, то в оценках (5)–(11) с $b = D$ можно принять $c_D = \lambda_1^0 - \delta$, где λ_1^0 — первое собственное значение оператора A_D^0 , а в оценках (5)–(11) с $b = N$ можно принять $c_N = \mu_2^0 - \delta$. Тогда константы в оценках (5)–(11) будут зависеть еще и от δ .

Отметим, что порядок $\varepsilon(t + \varepsilon^2)^{-1/2}$ оценки (5) получился таким же, как для задачи в $\mathbb{R}^d$ (ср. [4], [5]). Разница лишь в множителе $e^{-c_b t}$ (для задачи в $\mathbb{R}^d$ он отсутствует, поскольку точка нуль является краем непрерывного спектра). Порядок оценки $O(\varepsilon)$ при фиксированном t точный. Что касается оценок из теоремы 2, то при фиксированном $t \geq \varepsilon^2$ они имеют порядок $O(\varepsilon^{1/2})$, в то время как в $\mathbb{R}^d$ был порядок $O(\varepsilon)$ (ср. [7]). Это связано с влиянием границы и согласуется с результатами для эллиптических краевых задач ([11]–[14]).

Для доказательства теорем 1, 2 применяются представления операторов $e^{-A_{b,\varepsilon}t}$, $e^{-A_b^0 t}$ в виде интегралов от соответствующих резольвент по подходящему контуру в комплексной плоскости и результаты работы [14] об аппроксимации резольвенты $(A_{b,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$.

4. Применение к усреднению решений начально-краевых задач.

Пусть $\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ — обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, 0 < t < T, \\ \mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_{D,\varepsilon}(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \quad \text{либо} \quad \partial_{\nu}^\varepsilon \mathbf{u}_{N,\varepsilon}(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, & 0 < t < T, \end{cases}$$

где $\phi \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_p(T) := L_p((0, T); L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n))$, $0 < T \leq \infty$, при некотором $1 < p \leq \infty$. Тогда справедливо представление

$$\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) = e^{-A_{b,\varepsilon}t} \phi + \int_0^t e^{-A_{b,\varepsilon}(t-\tilde{t})} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (12)$$

Пусть $\mathbf{u}_{b,0}(\mathbf{x}, t)$ — решение эффективной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_{b,0}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{b,0}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, 0 < t < T, \\ \mathbf{u}_{b,0}(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_{D,0}(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \quad \text{либо} \quad \partial_{\nu}^0 \mathbf{u}_{N,0}(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \quad (13)$$

Аналогично (12) имеем $\mathbf{u}_{b,0}(\cdot, t) = e^{-A_b^0 t} \phi + \int_0^t e^{-A_b^0(t-\tilde{t})} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{t}) d\tilde{t}$.

Отсюда и из (12) с помощью теоремы 1 и неравенства Гёльдера выводим следующий результат.

Теорема 5. *Найдется число $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $0 < t < T$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) - \mathbf{u}_{b,0}(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq C_1^b e^{-c_b t} \varepsilon(t + \varepsilon^2)^{-1/2} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_1^b(p) \theta_p(\varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(T)}, \quad b = D, N, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\theta_p(\varepsilon) := \begin{cases} \varepsilon^{2-2/p}, & 1 < p < 2, \\ \varepsilon(|\ln \varepsilon| + 1)^{1/2}, & p = 2, \\ \varepsilon, & 2 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Аппроксимация решений в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ получается с помощью теоремы 2 и предложения 3. При этом мы предполагаем, что $p > 2$. Осложнение возникает при аппроксимации интегрального члена в (12). Считая, что $t \geq \varepsilon^2$, мы разбиваем интеграл в (12) в сумму двух — по промежуткам $(0, t - \varepsilon^2)$ и $(t - \varepsilon^2, t)$; для первого применяем (6) или (8), а для второго — оценку (10).

Введем обозначение $\mathbf{w}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) = e^{-A_b^0 \varepsilon^2} \mathbf{u}_{b,0}(\cdot, t - \varepsilon^2)$, где $\mathbf{u}_{b,0}$ — решение задачи (13). Тогда $\mathbf{w}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) = e^{-A_b^0 t} \phi + \int_0^{t-\varepsilon^2} e^{-A_b^0(t-\tilde{t})} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{t}) d\tilde{t}$. Следующая теорема дает H^1 -аппроксимацию решения $\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)$ и L_2 -аппроксимацию потока $\mathbf{p}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)$.

Теорема 6. Пусть $p > 2$. Найдется число $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, зависящее лишь от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ , такое, что при $b = D, N$ имеют место следующие утверждения.

1°. Положим $\mathbf{v}_{D,\varepsilon} := \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} \mathbf{w}_{D,\varepsilon}$, $\mathbf{v}_{N,\varepsilon} := \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (I - \mathcal{P}_Z) \mathbf{w}_{N,\varepsilon}$, $\mathbf{q}_{D,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} \mathbf{w}_{D,\varepsilon}$, $\mathbf{q}_{N,\varepsilon} := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (I - \mathcal{P}_Z) \mathbf{w}_{N,\varepsilon}$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\varepsilon^2 \leq t < T$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) - \mathbf{u}_{b,0}(\cdot, t) - \varepsilon \mathbf{v}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ & \leq 2C_2^b e^{-c_b t} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_2^b(p) \rho_p(\varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(t)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) - \mathbf{q}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq 2C_3^b e^{-c_b t} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_3^b(p) \rho_p(\varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(t)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\rho_p(\varepsilon) := \begin{cases} \varepsilon^{1-2/p}, & 2 < p < 4, \\ \varepsilon^{1/2} (|\ln \varepsilon| + 1)^{3/4}, & p = 4, \\ \varepsilon^{1/2}, & 4 < p \leq \infty. \end{cases}$$

2°. Пусть $\Lambda \in L_\infty$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\varepsilon^2 \leq t < T$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) - \mathbf{u}_{b,0}(\cdot, t) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ & \leq 2\tilde{C}_2^b e^{-c_b t} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})} + \tilde{\mathcal{C}}_2^b(p) \rho_p(\varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(t)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_{b,\varepsilon}(\cdot, t) - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_{b,\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq 2\tilde{C}_3^b e^{-c_b t} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})} + \tilde{\mathcal{C}}_3^b(p) \rho_p(\varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(t)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Замечание 7. Постоянные $\mathcal{C}_j^b(p)$, $\tilde{\mathcal{C}}_j^b(p)$ из неравенств (14)–(18) зависят от тех же величин, что и C_j^b , $\tilde{C}_j^b$ соответственно (см. замечание 4), а также от p .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Math. and Appl., vol. 5, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
[2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984. [3] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993. [4] Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90. [5] Т. А. Suslina, in: Nonlinear Equations and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233. [6] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237. [7] Т. А. Suslina, Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447. [8] Е. С. Василевская, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 3–60. [9] Е. С. Василевская, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **24**:2 (2012), 1–103. [10] Ю. М. Мешкова, Алгебра и анализ, **25**:6 (2013), 125–177. [11] М. А. Пахнин, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **24**:6 (2012), 139–177. [12] Т. А. Suslina, Mathematika, **59**:2 (2013), 463–476. [13] Т. А. Suslina, SIAM J. Math. Anal., **45**:6 (2013), 3453–3493. [14] Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **48**:4 (2014), 88–94. [15] J. Nečas, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer

Monographs in Math., Springer-Verlag, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2012.
 [16] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

Санкт-Петербургский государственный университет,
 Лаборатория им. П. Л. Чебышева
 e-mail: juliavmeshke@yandex.ru

Поступила в редакцию
 7 февраля 2014 г.

Санкт-Петербургский государственный университет,
 физический факультет
 e-mail: suslina@list.ru

УДК 517.958+621.372.8

О вычислении волноводной матрицы рассеяния для системы Максвелла*

© 2015. Б. А. ПЛАМЕНЕВСКИЙ, А. С. ПОРЕЦКИЙ, О. В. САРАФАНОВ

Постановка краевой задачи. Пусть G — область в $\mathbb{R}^3$, совпадающая вне большого шара с объединением непересекающихся полуцилиндров $\Pi_+^q = \{(y^q, t^q) : y^q \in \Omega^q, t^q > 0\}$, где $q = 1, \dots, \mathcal{T} < \infty$ и Ω^q — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$; граница ∂G предполагается гладкой. В области G рассматривается система Максвелла

$$\begin{aligned} i \operatorname{rot} u^2(x) - k u^1(x) &= 0, \\ -i \operatorname{div} u^2(x) &= 0, \\ -i \operatorname{rot} u^1(x) - k u^2(x) &= 0, \\ i \operatorname{div} u^1(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\nu(x) \times u^1(x) = 0, \quad \langle u^2(x), \nu(x) \rangle = 0, \quad x \in \partial G, \quad (2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^3$, $\cdot \times \cdot$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G . Положим $U = (u^1, u^2)$ и систему (1), (2) запишем в виде $\mathcal{M}(k)U = 0$.

Собственные функции непрерывного спектра. Если для числа k существует решение $U = (u^1, u^2)$ задачи (1), (2) с оценкой $U(x) = O(|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$, не принадлежащее $L_2(G)$, то говорят, что k — точка непрерывного спектра, а U — отвечающая числу k собственная функция непрерывного спектра. Известно [2], что непрерывный спектр задачи (1), (2) имеет вид $\{k \in \mathbb{R} : |k| \geq \mu_{\mathfrak{M}}^{1/2}\} \cup \{0\}$; здесь $\mu_{\mathfrak{M}}$ — наименьшее из положительных собственных чисел задач Неймана для оператора Лапласа $-\Delta$ в областях Ω_q , $q = 1, \dots, \mathcal{T}$. Точка $k = 0$ формально принадлежит непрерывному спектру, однако матрица рассеяния в этой точке не вводится, поэтому мы исключим ее из рассмотрения. Число k называется собственным числом задачи (1), (2), если существует решение этой задачи, лежащее в $L_2(G)$; такое решение называется

*Исследование выполнено при поддержке грантов СПбГУ №11.38.666.2013 и РФФИ-12-01-00247а.