Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Александров, Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 1–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:43:09

Индекс дифференциальных форм на полных пересечениях

© 2015. А. Г. АЛЕКСАНДРОВ

Статья посвящена развитию гомологического подхода к задаче вычисления локального топологического индекса голоморфных дифференциальных 1-форм, заданных на комплексном пространстве. При исследовании случая полных пересечений описанный метод опирается на конструкцию резольвент Лебелта и Кузена, а также на простейшие свойства обобщенного и обычного комплексов Кошуля, регулярных мероморфных дифференциальных форм и отображения вычета. В частности, показано, что индекс дифференциальной формы с изолированной особенностью равен размерности аналитической алгебры нульмерного ростка, который задается идеалом, порожденным внутренним произведением этой формы и гамильтоновых векторных полей, заданных на полном пересечении. При этом в квазиоднородном случае индекс можно явно выразить в терминах значений классических симметрических функций. Кроме того, обсуждаются и некоторые другие способы вычисления гомологического индекса 1-форм, заданных на аналитических пространствах с особенностями самых разных типов.

Введение

В заметке [4] описывается элементарный метод вычисления *гомологического* индекса векторных полей на квазиоднородных полных пересечениях с изолированными особенностями, основанный на одном из вариантов обобщенной леммы де Рама [12], а также на свойствах χ_y -характеристики Хирцебруха и рядов Пуанкаре модулей регулярных дифференциальных форм, полученных автором в [1], [2].

В настоящей статье этот метод применяется для вычисления локального топологического индекса дифференциальных 1-форм на таких особенностях в терминах показателей типа квазиоднородности. Кроме того, с помощью резольвент Лебелта для внешних степеней модулей с гомологической размерностью, не превосходящей единицы [17], и простейших свойств классического комплекса Кошуля [6] исследуется и общий неградуированный случай. В частности, приводится новое доказательство формулы [9] для вычисления локального индекса в терминах идеала, порожденного минорами максимального порядка матрицы, состоящей из якобиевой матрицы отображения, задающего полное пересечение, и дополнительной строки, элементы которой — коэффициенты дифференциальной формы. В заключение обсуждаются дальнейшие обобщения и приложения полученных результатов, а также некоторые другие способы вычисления гомологического индекса 1-форм, заданных на аналитических пространствах с особенностями различных типов.

§1. Топологический и гомологический индексы

Пусть $(X, \mathfrak{o})$ — росток комплексного пространства. Выберем какой-нибудь его представитель, вложенный в открытую окрестность U точки 0 в $\mathbb{C}^m$ с

координатами $z_1, \dots, z_m$, и обозначим его через X . Тогда X задается идеалом $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$, который порожден последовательностью голоморфных функций $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_U$. Обозначим через Ω_X^p , $p \geq 0$, пучки ростков регулярных *голоморфных* дифференциальных p -форм на X , заданные ограничением на X соответствующих фактормодулей,

$$\Omega_U^p / ((f_1, \dots, f_k) \Omega_U^p + df_1 \wedge \Omega_U^{p-1} + \dots + df_k \wedge \Omega_U^{p-1})|_X,$$

так что $\Omega_X^p = 0$ при $p < 0$ и $p > m$. Тогда обычный дифференциал d наделяет все это семейство пучков структурой *возрастающего* комплекса, который называется *комплексом де Рама* на X и обозначается через $(\Omega_X^\bullet, d)$; его группы когомологий часто обозначаются через $H_{DR}^*(\Omega_X^\bullet)$.

Пусть теперь $\text{Der}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ есть $\mathcal{O}_X$ -модуль регулярных векторных полей на X . Тогда для любого элемента $\mathcal{V} \in \text{Der}(X)$ внутреннее произведение (стягивание) векторных полей и дифференциальных форм индуцирует гомоморфизм $\mathcal{O}_X$ -модулей $\iota_{\mathcal{V}}: \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^{p-1}$, а также структуру убывающего комплекса на $\Omega_X^\bullet$, который называется *стягиваемым* комплексом де Рама и обозначается через $(\Omega_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$ (см. [4]). Группы $\iota_{\mathcal{V}}$ -гомологий этого комплекса обозначаются через $H_*(\Omega_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$. Настоящая статья посвящена изучению аналогичной конструкции, связанной с голоморфной дифференциальной формой $\omega \in \Omega_X^1$. А именно, *внешнее* умножение на такую форму наделяет $\Omega_X^\bullet$ структурой *возрастающего* комплекса. Обозначим этот комплекс через $(\Omega_X^\bullet, \wedge \omega)$, а его группы *когомологий* — через $H^*(\Omega_X^\bullet, \wedge \omega)$.

Далее для упрощения записи любой росток $(X, \mathfrak{o})$ комплексного пространства, равно как и его подходящий представитель, будем называть *особенностью* (даже если отмеченная точка $\mathfrak{o}$ неособая) и обозначать через X .

Определение 1. Пусть $\mathcal{V}$ — векторное поле, заданное на n -мерной особенности X . Обозначим через $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$ *усеченный* стягиваемый комплекс де Рама

$$0 \longrightarrow \Omega_X^n \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \Omega_X^{n-1} \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \Omega_X^{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_X^1 \xrightarrow{\iota_{\mathcal{V}}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Предположим, что все группы гомологий этого *убывающего* комплекса — конечномерные векторные пространства. Тогда характеристика Эйлера–Пуанкаре

$$\chi(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_k H_i(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$$

называется *гомологическим* индексом векторного поля в отмеченной точке $\mathfrak{o} \in X$ и обозначается через $\text{Ind}_{\text{hom}, X, \mathfrak{o}}(\mathcal{V})$ или через $\text{Ind}_{\text{hom}, \mathfrak{o}}(\mathcal{V})$, если из контекста ясно, какой росток имеется в виду.

Замечание. Понятие гомологического индекса векторного поля было введено в работе [11] для полей, заданных на *приведенном* комплексном аналитическом пространстве X чистой размерности $n \geq 1$ с конечномерными группами гомологий $H_i(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$. В *неособых* точках этого пространства гомологический индекс совпадает с локальным *топологическим* индексом векторного поля, или с *локальным* индексом Пуанкаре–Хопфа (см. [11]).

Определение 2. Пусть $\omega \in \Omega_X^1$ — голоморфная дифференциальная форма на n -мерной особенности X . Обозначим через $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega)$ *усеченный возрастающий*

щий комплекс

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\wedge\omega} \Omega_X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_X^{n-2} \xrightarrow{\wedge\omega} \Omega_X^{n-1} \xrightarrow{\wedge\omega} \Omega_X^n \longrightarrow 0. \quad (2)$$

Если все его группы когомологий — конечномерные векторные пространства, то, следуя [10], будем называть альтернированную сумму

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \dim_k H^i(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge\omega)$$

гомологическим индексом дифференциальной 1-формы в отмеченной точке $\mathfrak{o} \in X$ и обозначать его через $\text{Ind}_{\text{hom}, X, \mathfrak{o}}(\omega)$ или $\text{Ind}_{\text{hom}, \mathfrak{o}}(\omega)$. Очевидно, что $(-1)^n \text{Ind}_{\text{hom}, \mathfrak{o}}(\omega)$ совпадает с обычной эйлеровой характеристикой комплекса $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge\omega)$.

Замечание. Для дифференциальной 1-формы с изолированными особенностями индекс $\text{Ind}_{\text{hom}, \mathfrak{o}}(\omega)$ в неособой точке пространства X совпадает с локальным топологическим индексом этой формы (см. [10, теорема 3.2]).

§2. Градуированные модули и производящая функция

Коммутативное кольцо A называется (положительно) градуированным, если оно разлагается в прямую сумму $A = \bigoplus_{\nu \geq 0} A_\nu$ абелевых групп A_ν , таких, что $A_\nu A_\lambda \subseteq A_{\nu+\lambda}$ при всех целых $\nu, \lambda \geq 0$. Элементы группы A_ν называются однородными степени ν . Будем предполагать, что $A_0 = k$ — поле, а градуированная k -алгебра A является конечно порожденной. Обозначим через $\mathfrak{m} = A_+ = \bigoplus_{\nu > 0} A_\nu$ единственный максимальный градуированный идеал кольца A , так что $A/\mathfrak{m} \cong k$ — поле вычетов кольца A . Любой градуированный A -модуль M представляется в виде прямой суммы своих подгрупп (однородных составляющих), так что $M = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} M_\nu$ и $A_\nu M_\lambda \subseteq M_{\nu+\lambda}$ для всех $\nu, \lambda \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $M(\lambda)$ градуированный A -модуль, полученный из M сдвигом градуировки влево на $\lambda \in \mathbb{Z}$, т.е. $[M(\lambda)]_\nu = M_{\nu+\lambda}$. (Однородный) гомоморфизм степени λ градуированных A -модулей M и N — это A -линейное отображение $f: M \rightarrow N$, такое, что $f(M_\nu) \subseteq N_{\nu+\lambda} = [N(\lambda)]_\nu$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Гомоморфизмы всевозможных степеней, в свою очередь, образуют градуированный A -модуль $\text{Hom}_A(M, N) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(M, N)_\nu$, где $\text{Hom}_A(M, N)_\lambda = \text{Hom}_A(M, N(\lambda))_0$ состоит из гомоморфизмов модуля M в N степени λ . В дальнейшем будем говорить просто «гомоморфизм», «изоморфизм» и т.д., если речь идет об однородном гомоморфизме или изоморфизме степени нуля.

Пусть $M = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} M_\nu$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированный A -модуль с однородными компонентами конечной длины, т.е. $\ell_A(M_\nu) < \infty$. Тогда его рядом Пуанкаре называется формальный ряд Лорана $P(M; x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \ell_A(M_\nu) x^\nu$. Если и длина самого модуля M конечна, то $P(M; x)$ обычно называют *полиномом* Пуанкаре. Вот несколько простейших свойств рядов Пуанкаре:

- (i) $P(M; 1) = \ell_A(M)$, если длина M конечна;
- (ii) $P(M(\lambda); x) = x^{-\lambda} P(M; x)$;
- (iii) для точной последовательности $\mathbb{Z}$ -градуированных A -модулей

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0,$$

все гомоморфизмы в которой имеют степень нуль, справедливо тождество $\sum_{i=0}^n (-1)^i P(M_i; x) = 0$.

Напомним, что если A — *локальное* кольцо, в котором содержится подкольцо, изоморфное k — полю вычетов кольца A , то для любого A -модуля M имеем

$$\ell_A(M) = \ell_k(M) = \dim_k(M),$$

так что при сделанных предположениях M можно рассматривать как векторное пространство над полем k , а $P(M; x)$ — как ряд Пуанкаре этого векторного пространства. Всюду далее для простоты будем предполагать, что A — локальная аналитическая алгебра с полем вычетов $k \cong \mathbb{C}$.

Следуя [2] или [4], рассмотрим теперь *убывающий* комплекс градуированных A -модулей

$$(\mathcal{C}_\bullet, \partial): 0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0, \quad (3)$$

у которого все однородные компоненты групп гомологий — *конечномерные* векторные пространства.

Определение 2. *Производящая функция* гомологий убывающего комплекса $(\mathcal{C}_\bullet, \partial)$ задается следующим образом:

$$GH_P(\mathcal{C}_\bullet; x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P(H_i(\mathcal{C}_\bullet); x) y^i.$$

Если все группы гомологий *конечномерны*, то значение производящей функции при $x = y = 1$ равно *характеристике Эйлера–Пуанкаре* комплекса $\mathcal{C}_\bullet$, т. е. $GH_P(\mathcal{C}_\bullet; 1, 1) = \chi(\mathcal{C}_\bullet)$.

При аналогичных предположениях можно рассмотреть *возрастающий* комплекс

$$(\mathcal{C}^\bullet, \partial): 0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow 0,$$

для которого точно так же определяется производящая функция когомологий:

$$GH_P(\mathcal{C}^\bullet; x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P(H^i(\mathcal{C}^\bullet); x) y^i.$$

Заметим, кроме того, что оба типа производящих функций можно рассматривать как варианты χ_y -характеристики, рассмотренной Ф. Хирцебрухом в сходном контексте (см. [14] или [2, введение]).

В доказательстве следующего утверждения используются простейшие свойства χ_y -характеристики и упрощенная процедура «развинчивания», описанные в [1] и [2, (3.3)], где вычисляются группы локальных когомологий комплекса де Рама на квазиоднородной изолированной особенности полного пересечения.

Предложение 1. *Предположим, что все однородные компоненты убывающего комплекса (3) градуированных A -модулей — конечномерные векторные пространства, а дифференциалы этого комплекса — однородные гомоморфизмы одинаковой степени $v \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$GH_P(\mathcal{C}_\bullet; x, x^v) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^{iv} P(C_i; x).$$

Доказательство. Пусть $K_i = \text{Ker}(\partial: C_i \rightarrow C_{i-1})$. Тогда для всех $1 \leq i < n$ существуют короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow C_i \xrightarrow{\partial} \partial(C_i) \longrightarrow 0$$

и следующие соотношения для рядов Пуанкаре:

$$\begin{aligned} P(K_i; x) &= P(C_i; x) - x^{-v} P(\partial(C_i); x), \\ P(H_i(\mathcal{C}_\bullet); x) &= P(C_i; x) - x^{-v} P(\partial(C_i); x) - P(\partial(C_{i+1}); x). \end{aligned}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P(H_0(\mathcal{C}_\bullet); x) &= P(C_0; x) - P(\partial(C_1); x), \\ P(\partial(C_n); x) &= x^v P(C_n; x) - x^v P(H_n(\mathcal{C}_\bullet); x). \end{aligned}$$

Теперь преобразуем сумму, содержащую первые n слагаемых при $i = 0, \dots, n-1$ производящей функции GH_P при $y = x^v$, следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^{iv} P(H_i(\mathcal{C}_\bullet); x) \\ &= (P(C_0; x) - P(\partial(C_1); x)) - (x^v P(C_1; x) - P(\partial(C_1); x) - x^v P(\partial(C_2); x)) \\ & \quad + (x^{2v} P(C_2; x) - x^v P(\partial(C_2); x) - x^{2v} P(\partial(C_3); x)) - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x^{iv} P(C_i; x) + (-1)^n x^{(n-1)v} P(\partial(C_n); x) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i x^{iv} P(C_i; x) + (-1)^{n+1} x^{nv} P(H_n(\mathcal{C}_\bullet); x). \end{aligned}$$

Добавляя к левой и правой частям этих тождеств ряд Пуанкаре для группы гомотопий старшей размерности n с соответствующим знаком, получаем нужную формулу. $\square$

Предложение 2. *Предположим, что $(\mathcal{C}_\bullet, \partial)$ — возрастающий комплекс градуированных A -модулей, дифференциал которого — однородный гомоморфизм степени $v \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$GH_P(\mathcal{C}_\bullet; x, x^{-v}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i x^{-iv} P(C^i; x).$$

Доказательство. Нужно повторить рассуждения доказательства предложения 1, изменив направление действия дифференциала комплекса. $\square$

§3. Ряды Пуанкаре и голоморфные формы на полном пересечении

Пусть X — росток n -мерной квазиоднородной особенности, заданный последовательностью квазиоднородных функций $f_1, \dots, f_k$ степеней $d_1, \dots, d_k$ относительно переменных с весами $w_1, \dots, w_m$. Другими словами, тип квазиоднородности ростка равен $(d_1, \dots, d_k; w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{Z}_+^k \times \mathbb{Z}_+^m$. Тогда в обозначениях §2 модули Ω_X^p , $p \geq 0$, и $\text{Der}(X)$ снабжаются естественной градуировкой, в которой $\deg(df_j) = d_j$, $j = 1, \dots, k$, и $\deg(dz_i) = w_i$, $i = 1, \dots, m$. Элементы однородной составляющей $\text{Der}(X)_v$ будем называть векторными полями веса v . В частности, вес элемента $\partial/\partial z_i$ равен $-w_i$, $i = 1, \dots, m$, а элемент $\mathcal{V}_0 = \sum_{i=1}^m w_i z_i \partial/\partial z_i \in \text{Der}(X)_0$ нулевого веса обычно называется векторным полем Эйлера.

Предположим теперь, что X — росток n -мерной квазиоднородной изолированной особенности *полного пересечения*, заданный *регулярной* последовательностью квазиоднородных функций $f_1, \dots, f_k$ степеней $d_1, \dots, d_k$ относительно переменных с весами $w_1, \dots, w_m$, так что $m - k = n \geq 1$. Отметим, что тип квазиоднородности полных пересечений с изолированной особенностью определен *однозначно*, за исключением случая гиперповерхности кратности 2 (см. [2, (6.4)]), а поле Эйлера порождает $\mathcal{O}_X$ -модуль $\text{Der}(X)$ по модулю *гамильтоновых* векторных полей (см. [2, теорема 6.1]).

Лемма 1 [2, лемма 3.2]. *Ряды Пуанкаре модулей голоморфных форм степени $0 \leq p \leq n$ на особенности X можно записать следующим образом:*

$$P(\Omega_X^p; x) = P(\mathcal{O}_X; x) \operatorname{res}_{t=0} t^{-p-1} \prod (1 + tx^{w_i}) / \prod (1 + tx^{d_j}),$$

где $P(\mathcal{O}_X; x) = \prod (1 - x^{d_j}) / \prod (1 - x^{w_i})$.

Замечание. Доказательство этой леммы с подробными комментариями можно найти также в [4]. Другой способ, основанный на использовании явного вида резольвент для модулей голоморфных форм на изолированной особенности полного пересечения, приведен в §5; его несложно адаптировать для вычисления индекса векторных полей на многообразиях с другими типами особенностей.

§4. Индексы полей и форм на квазиоднородных полных пересечениях

Сначала вычислим гомологический индекс *убывающего* стягиваемого комплекса де Рама (1) для изолированной особенности полного пересечения, придерживаясь схемы рассуждений из [4].

Теорема 1. *Пусть X — квазиоднородная изолированная особенность полного пересечения размерности $n \geq 1$ и $\mathcal{V}$ — векторное поле веса v . Тогда*

$$\begin{aligned} GH_P((\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}); x, x^v) \\ = (-1)^n x^{nv} P(\mathcal{O}_X; x) \operatorname{res}_{t=0} t^{-n-1} (1 + tx^{-v})^{-1} \prod (1 + tx^{w_i}) / \prod (1 + tx^{d_j}). \end{aligned}$$

Доказательство. Нужно подставить выражения для полиномов Пуанкаре из леммы 1 в формулу производящей функции для комплекса $\mathcal{C}_\bullet = (\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$ из предложения 1 и выполнить несложные преобразования. $\square$

Пользуясь формулой из теоремы 1, можно вычислить индекс векторного поля Эйлера следующим образом (ср. [19, примеры 1–2]).

Следствие 1. *Пусть X — квазиоднородная изолированная особенность полного пересечения размерности $n \geq 1$. Тогда*

$$\operatorname{Ind}_{\text{hom}, o}(\mathcal{V}_0) = 1 + (-1)^n \mu(X),$$

где $\mu(X)$ — число Милнора. Следовательно, индекс векторного поля Эйлера в отмеченной точке равен характеристике Эйлера–Пуанкаре слоя Милнора особенности.

Доказательство. Полагая $v = 0$ в формуле из теоремы 1, рассмотрим выражение

$$\varphi(t) = t^{-n-1} (1 + t)^{-1} \prod (1 + tx^{w_i}) / \prod (1 + tx^{d_j}) P(\mathcal{O}_X; x).$$

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{res}_{t=0} \varphi(t) = - \operatorname{res}_{s=\infty} s^{-2} \tilde{\varphi}(s) = \sum_{s_0 \in \mathbb{C}\{x\}} \operatorname{res}_{s=s_0} s^{-2} \tilde{\varphi}(s), \quad (4)$$

где $t = 1/s$. Так как

$$s^{-2} \tilde{\varphi}(s) = (1+s)^{-1} \prod \frac{(s+x^{w_i})}{(1-x^{w_i})} / \prod \frac{(s+x^{d_j})}{(1-x^{d_j})},$$

то вычет этой функции в точке $s_0 = -1$ равен $(-1)^n$, в то время как оставшаяся часть суммы (4) совпадает с полиномом Пуанкаре $P(x)$ из статьи [13, 3.7.b)], причем $P(1) = \mu(X)$. В результате из формулы теоремы 1 получается равенство $\operatorname{Ind}_{\operatorname{hom},0}(\mathcal{V}_0) = (-1)^n \operatorname{res}_{t=0} \varphi(t)|_{x=1}$, что и требуется. $\square$

Замечание. На самом деле утверждение следствия 1 вытекает из *ациклическости* во всех размерностях, отличных от 0 и n , усеченного стягиваемого комплекса де Рама, дифференциал которого задается стягиванием вдоль *поля Эйлера* (см. [21, лемма 2.1.1]), с учетом изоморфизма $H_n(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) \cong \operatorname{Tors} \Omega_X^n$ (см. [4, утверждение 1]).

Пример 1. Рассмотрим поверхность типа квазиоднородности $(2, 2; 1, 1, 1, 1)$ — пересечение двух гиперквадрик в $(\mathbb{C}^4, 0)$. В этом случае число Милнора μ равно 7 и

$$GH_P((\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}); x, x^v) = (1 - x^v(4x - 2x^2) + x^{2v}(6x^2 - 8x^3 + 3x^4))P(\mathcal{O}_X; x).$$

Если $v = 1$, то $GH_P((\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}); x, x) = 1 + 4x + 4x^2 - 2x^3 - 2x^4 + 4x^5 + 3x^6$, т.е. $\operatorname{Ind}_{\operatorname{hom},0}(\mathcal{V}) = \operatorname{Ind}(\hat{\Omega}_{X,0}^\bullet, \iota_{\mathcal{V}}) = 12$. В работе [7, (4.4)] соответствующее значение индекса для векторного поля веса 1, которое *не коллинеарно* полю Эйлера, получается с помощью весьма замысловатых конструкций и анализа спектральных последовательностей, а также с использованием компьютерной системы алгебраических вычислений.

Перейдем теперь к вычислению гомологического индекса для *возрастающего* комплекса $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega)$, следуя той же схеме рассуждений, что и для убывающего комплекса $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$.

Теорема 2. Пусть X — квазиоднородная изолированная особенность полного пересечения размерности $n \geq 1$ и $\omega \in \Omega_X^1$ — дифференциальная форма веса $v \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} GH_P((\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega); x, x^{-v}) \\ = (-1)^n x^{-nv} P(\mathcal{O}_X; x) \operatorname{res}_{t=0} t^{-n-1} (1 + tx^v)^{-1} \prod (1 + tx^{w_i}) / \prod (1 + tx^{d_j}). \end{aligned}$$

Доказательство. С небольшими изменениями нужно повторить рассуждения доказательства теоремы 1 для *возрастающего* комплекса $\mathcal{C}^\bullet = (\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega)$, опираясь на формулу предложения 2. $\square$

Производящую функцию можно представить и в более явном виде. Пусть W_λ — элементарные симметрические функции степени $\lambda \geq 0$ от ℓ переменных $(y_1, \dots, y_\ell)$, заданные формулой $\prod_{i=1}^\ell (1 + y_i \zeta) = \sum_{\lambda=0}^\ell W_\lambda(y_1, \dots, y_\ell) \zeta^\lambda$. Аналогично, симметрические функции $D_\lambda(y_1, \dots, y_\ell)$ веса $\lambda \geq 0$ определяются соотношением $\prod_{i=1}^\ell (1 + y_i \zeta)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^\infty (-1)^\lambda D_\lambda(y_1, \dots, y_\ell) \zeta^\lambda$.

Следствие 2. В условиях теоремы 2

$$\begin{aligned} & GH_P((\widehat{\Omega}_X^\bullet, \wedge\omega); x, x^{-v}) \\ &= \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n} (-1)^{\lambda_2} x^{(\lambda_1 - n)v} W_{\lambda_2}(x^{w_1}, \dots, x^{w_m}) D_{\lambda_3}(x^{d_1}, \dots, x^{d_k}) P(\mathcal{O}_X; x). \end{aligned}$$

Замечание. Легко понять, что при $v = 0$ и $x = 1$ полученные формулы дают явное выражение для эйлеровой характеристики обычного комплекса де Рама $(\Omega_X^\bullet, d)$ в терминах показателей квазиоднородности особенности.

Приведенное ниже утверждение можно рассматривать как аналог следствия 1.

Следствие 3. В обозначениях доказательства леммы 1 предположим, что n -мерная особенность X — это гиперповерхностное сечение $n + 1$ -мерного ростка X' типа квазиоднородности $(d_1, \dots, d_{k-1}; w_1, \dots, w_m)$ с помощью квазиоднородной функции f_k степени d_k относительно того же набора весов $(w_1, \dots, w_m)$. Тогда $\text{Ind}_{\text{hom}, X', o}(df_k) = \mu(X) + \mu(X')$. Другими словами, этот индекс равен кратности дискриминанта версальной деформации особенности X .

Доказательство. Выпишем производящую функцию из теоремы 2 для особенности X' при $v = d_k$:

$$GH_P((\widehat{\Omega}_{X'}^\bullet, \wedge\omega); x, x^{-d_k}) = (-1)^{n+1} x^{-(n+1)d_k} \text{res}_{t=0} \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = t^{-n-2} (1 + tx^{d_k})^{-1} \prod_{i=1}^m (1 + tx^{w_i}) \Big/ \prod_{j=1}^{k-1} (1 + tx^{d_j}) P(\mathcal{O}_{X'}; x).$$

Таким образом, полученное выражение для производящей функции с точностью до множителя $(-1)^{n+1} x^{-(n+1)d_k}$ совпадает с *полиномом* Пуанкаре пространства $\Omega_f^{n+1}/f_1\Omega_f^{n+1} + \dots + f_{k-1}\Omega_f^{n+1}$ из леммы 4.5 статьи [13] при $p = n + 1 \leq m$, где $\Omega_f^p = \Omega_{\mathbb{C}^m, 0}^p / df_1 \wedge \Omega^{p-1} + \dots + df_k \wedge \Omega^{p-1}$ — пространство *относительных* регулярных p -форм на X . Следовательно, значение $GH_P((\widehat{\Omega}_{X'}^\bullet, \wedge\omega); 1, 1)$ с точностью до множителя $(-1)^{n+1}$ равно кратности дискриминанта δ отображения $f_k|_{X'}$ (т.е. кратности дискриминанта версальной деформации особенности X), а сама эта кратность $m = m(\delta)$, в свою очередь, согласно лемме 4.4 из [13], равна сумме чисел Милнора $\mu(X) + \mu(X')$, или размерности пространства $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} / \mathcal{C}_k(X)$, где критический идеал $\mathcal{C}_k(X)$ порождается последовательностью функций $f_1, \dots, f_{k-1}$ и максимальными минорами якобиевой матрицы отображения, заданного полным набором $f_1, \dots, f_k$ (см. [12, теорема 5.4]). $\square$

Замечание. Отметим, что условия в формулировке следствия 3 можно ослабить, не требуя изолированности особенности X' . В этом случае остается справедливым лишь вторая часть утверждения, поскольку корректно определена только *кратность* дискриминанта версальной деформации особенности X , но не число Милнора $\mu(X')$. Далее, как и для точных форм, индекс $\text{Ind}_{\text{hom}, X', o}(\omega)$ в общем случае можно рассматривать как кратность дискриминанта версальной деформации *слоения* на полном пересечении X' , заданного дифференциальной

формой ω . Наконец, заметим, что в работе [10] подробно обсуждаются и некоторые другие интерпретации инвариантов, использованных в доказательстве следствия 3.

Важно еще отметить, что условия двух теорем и следствий из этого параграфа не содержат требования *изолированности* особенностей векторных полей и дифференциальных форм. В связи с этим сделаем небольшое отступление, касающееся понятия изолированной особенности дифференциальной формы. Так, в контексте топологической теории индекса [10] свойство дифференциальной формы $\omega \in \Omega_X^1$ обладать изолированной особенностью на X означает, что все ее коэффициенты в соответствующем координатном представлении не могут обращаться в нуль одновременно в достаточно малой *выколотой* окрестности ростка $(X, \mathfrak{o})$.

Чтобы пояснить смысл этого условия в более инвариантной форме, удобно использовать *функториальное* определение регулярных голоморфных форм на многообразиях с особенностями, принадлежащее Грауэрту и Гротендику, которое, конечно, эквивалентно определению из §1.

Определение 3. В тех же обозначениях пусть $X' = X \setminus \text{Sing } X$ — подмножество *неособых* точек (представителя) ростка $(X, \mathfrak{o})$, $i: X' \rightarrow U$ — ограничение естественного вложения $X \hookrightarrow U$ на это подмножество и $\mathcal{N}^p \subset \Omega_U^p$ — подпучок, состоящий из ростков голоморфных форм ω на U , таких, что $i^*\omega = 0$. Тогда

$$\Omega_X^p = (\Omega_U^p / \mathcal{N}^p)|_X,$$

а дифференциал d на $\Omega_X^\bullet$ естественно индуцируется из стандартного дифференциала де Рама комплекса $\Omega_U^\bullet$, поскольку $d(\mathcal{N}^p) \subset \mathcal{N}^{p+1}$ для всех $p \geq 0$.

Утверждение 1. Пусть X — приведенный росток изолированной особенности размерности $n \geq 1$, и предположим, что дифференциальная форма $\omega \in \Omega_X^1$ имеет изолированную особенность на X . Тогда $\omega \notin \text{Tors } \Omega_X^1$, а если к тому же росток X неприводим, то

$$H^0(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega) = H^0(\Omega_X^\bullet, \wedge \omega) = 0.$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из определения 3. Далее,

$$H^0(\Omega_X^\bullet, \wedge \omega) = \text{Ker}(\wedge \omega: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1) \cong \text{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\omega) = \{g \in \mathcal{O}_X \mid g\omega = 0\}.$$

Так как росток X неприводим, то аннулятор формы ω равен нулю. □

Замечания. Здесь уместно напомнить, что для *нормальных* полных пересечений $\text{Tors } \Omega_X^1 = 0$, причем для ростков *приведенных кривых* $d\mathcal{O}_X \cap \text{Tors } \Omega_X^1 = 0$ (см. [12]). Отсюда, в частности, следует, что для полного пересечения $df \notin \text{Tors } \Omega_X^1$ для всех $f \in \mathcal{O}_X$. Таким образом, утверждение 1 проясняет смысл условий и формулы из следствия 3. Далее, если X — изолированная особенность полного пересечения и $\omega \notin \text{Tors } \Omega_X^1$, то ковекторы $\omega, df_1, \dots, df_k$ линейно *независимы* в неособых точках ростка X (см. [9]).

§5. Резольвенты Лебелта

Прежде чем перейти к вычислению индекса дифференциальных форм в неградуированном случае, обсудим в контексте полных пересечений (ср. [2]) явную конструкцию свободных резольвент для внешних степеней заданного модуля с гомологической размерностью, не превосходящей единицы, из работы [17].

Для упрощения записи будем обозначать через A локальную аналитическую алгебру ростка *нормальной* особенности полного пересечения размерности $n \geq 1$, которая задается идеалом $I = (f_1, \dots, f_k) \subset P = k\langle z_1, \dots, z_m \rangle$, так что $A = P/I$, или $A = \mathcal{O}_X$ в обозначениях §1. Пусть $c = \text{codim}(\text{Sing } X, X)$ — коразмерность подмногообразия особенностей X , так что при сделанных предположениях $c \geq 2$.

Рассмотрим теперь стандартную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \int I/I^2 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{Df} \Omega_P^1 \otimes_P A \longrightarrow \Omega_A^1 \longrightarrow 0,$$

где Ω_A^1 — модуль кэлеровых дифференциалов k -алгебры A , $\int I$ — это *примитивный* идеал, ассоциированный с I , а через $Df = \text{Jac}(f)$ обозначается якобиева матрица отображения, заданного набором функций $(f_1, \dots, f_k)$. По определению идеал $\int I \subset P$ состоит из элементов $g \in I$, таких, что $\mathcal{V}(g) \in I$ для всех $\mathcal{V} \in \text{Der}_k(P)$ (см. [23]).

Хорошо известно, что для ростков *полных пересечений* $n = t - k$ и конормальный модуль I/I^2 — свободный A -модуль ранга k . Более того, для *приведенных* полных пересечений $\int I/I^2 = 0$ (см. [23, §4, эк. (1)]). Таким образом, в этом случае для A -модуля Ω_A^1 существует *свободная* резольвента

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{Df} \Omega_P^1 \otimes_P A \longrightarrow \Omega_A^1 \longrightarrow 0, \quad (5)$$

Отсюда, в частности, следует, что гомологическая размерность A -модуля кэлеровых дифференциалов Ω_A^1 не превосходит единицы и, согласно [17, следствие 1(a)], для всех A -модулей $\Omega_A^p = \wedge^p \Omega_A^1$, $p = 0, 1, \dots, c-1$, существуют свободные резольвенты

$$(\mathcal{L}_p^k, \mathcal{D}): 0 \longrightarrow \mathcal{L}_{p,p}^k \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{L}_{p,r}^k \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{L}_{p,1}^k \longrightarrow \mathcal{L}_{p,0}^k \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_A^p \longrightarrow 0, \quad (6)$$

где

$$\mathcal{L}_{p,r}^k = S^r L_0 \otimes \wedge^{p-r} L_1, \quad r = 0, \dots, p, \quad L_0 = I/I^2, \quad L_1 = \Omega_P^1 \otimes_P A,$$

и $\varepsilon = \varepsilon_{p,0}^k$ — это проекция модуля $\mathcal{L}_{p,0}^k$ на $\text{Coker}(\mathcal{D}_{p,1}^k: \mathcal{L}_{p,1}^k \rightarrow \mathcal{L}_{p,0}^k) \cong \Omega_A^p$ для всех $p = 0, \dots, c-1$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{L}_{p,r}^k \cong (\wedge^{p-r} A^m)^{\nu(k,r)} \quad \text{для всех } 0 \leq r \leq p,$$

где $\nu(k, r) = \binom{k-1+r}{r}$ — число *однородных* мономов степени r от k переменных. Наконец, комплексы $\mathcal{L}_p^k$ для всех $c \leq p \leq n$, снабженные морфизмом пополнения $\mathcal{L}_{p,0}^k \rightarrow \wedge^{p+k} L_1$, ацикличны в ненулевых размерностях, а $H_0(\mathcal{L}_p^k) \cong \text{Tors } \Omega_A^p$ при таких p (см. [17, лемма 2]).

В качестве первого применения этой конструкции получим формулу для рядов Пуанкаре $P(\Omega_A^p; x)$ из леммы 1 другим способом. Легко видеть, что для *квазиоднородной* особенности полного пересечения типа $(d_1, \dots, d_k; w_1, \dots, w_m)$ существуют естественные изоморфизмы

$$L_0 \cong \prod A(-d_j), \quad L_1 \cong \prod A(-w_i),$$

т. е. L_0 и L_1 — свободные A -модули ранга k и m соответственно. Поэтому они снабжаются естественной градуировкой, такой, что резольвенты (5) и (6) превращаются в точные последовательности *градуированных* модулей, гомоморфизмы которых — отображения *нулевой* степени (см. [2, (3.3)]). Если особенность *изолированная*, то $c = n$. Остается использовать точность комплексов $\mathcal{L}_p^k$ при $p = 0, \dots, n-1$, ацикличность комплекса $\mathcal{L}_n^k$ в положительных размерностях, формулу для ряда Пуанкаре модуля кручения $\text{Tor}_A^n \Omega_A^n$ из работы [2] и выполнить несложные преобразования.

Определение 4. Пусть $\wedge\omega: \mathcal{L}_{p,r}^k \rightarrow \mathcal{L}_{p+1,r}^k$ — морфизм внешнего умножения на некоторую форму $\omega \in \Omega_A^1$ для всех допустимых p и r . Тогда корректно определен бикомплекс $\mathcal{L}_{\bullet\bullet}^k = (\mathcal{L}_{\bullet\bullet}^k; \mathcal{D}, \wedge\omega)$. Обозначим подкомплекс, образованный строками бикомплекса $\mathcal{L}_{\bullet\bullet}^k$ с номерами от 0 до n включительно, через $\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k$; будем называть его *усеченным бикомплексом* Лебелта, ассоциированным с отображением внешнего умножения на форму ω .

Предложение 3. Пусть (X, σ) — изолированная особенность полного пересечения и $\omega \in \Omega_A^1$ — дифференциальная 1-форма с изолированной особенностью на X . Тогда существуют естественные изоморфизмы групп когомологий

$$H^i(\widehat{\Omega}_A^\bullet, \wedge\omega) \cong H^i(\text{Tot}(\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k)), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $\text{Tot}(\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k)$ — полный комплекс, ассоциированный с соответствующим усеченным бикомплексом.

Доказательство. Дифференциалы резольвенты Лебелта коммутируют с умножением на $\wedge\omega$, поскольку все они являются гомоморфизмами A -модулей. Следовательно, $\mathcal{L}_{\bullet\bullet}^k$ — это бикомплекс A -модулей. Далее, все его строки с номерами от 0 до $n-1$ включительно — это свободные *резольвенты* соответствующих модулей дифференциальных форм Ω_A^p . В итоге, нужное утверждение непосредственно следует из основных свойств и стандартных соотношений для гомологий, когомологий и соответствующих гиперфункторов (см., например, [20, XI, § 7]). $\square$

Пример 2. Выпишем рассмотренные объекты для 2-мерного полного пересечения с изолированной особенностью. Тогда $m - k = n = 2$, а усеченный бикомплекс $\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k$ с морфизмом пополнения в комплекс $(\Omega_A^\bullet, \wedge\omega)$ изображается диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^{\binom{k+1}{2}} & \xrightarrow{\mathcal{D}_{2,2}^k} & (A^m)^k & \xrightarrow{\mathcal{D}_{2,2}^k} & \wedge^2 A^m & \xrightarrow{\varepsilon_{2,0}^k} & \Omega_A^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \wedge\omega & & \uparrow \wedge\omega & & \uparrow \wedge\omega & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & A^k & \xrightarrow{\mathcal{D}_{1,1}^k} & A^m & \xrightarrow{\varepsilon_{1,0}^k} & \Omega_A^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \wedge\omega & & \uparrow \wedge\omega & & \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon_{0,0}^k} & \Omega_A^0 \cong A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7}$$

в которой две нижние строки — точные последовательности. Далее, средняя строка эквивалентна точной последовательности (5), так что дифференциал $\mathcal{D}_{1,1}^k$ задается якобиевой $(k \times m)$ -матрицей набора функций $f_1, \dots, f_k$, порождающих идеал I , в то время как $\mathcal{D}_{2,1}^k(y_1, \dots, y_k) = \text{jac}(f_1) \wedge y_1 + \dots + \text{jac}(f_k) \wedge y_k$, и т. д. (см. [17, (2.12), (2.15)]).

§6. Индекс голоморфных форм и обобщенный комплекс Кошуля

Во многих работах по теории индекса убывающий стягиваемый комплекс де Рама $(\Omega_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$, как и его возрастающий аналог $(\Omega_X^\bullet, \wedge\omega)$, часто называют комплексами Кошуля, видимо, по аналогии с теорией гладких многообразий. Действительно, в последнем случае $\Omega_X^p \cong \wedge^p \Omega_X^1$ — свободные $\mathcal{O}_X$ -модули для всех $p \geq 0$, так что указанные комплексы естественно изоморфны обычному комплексу Кошуля или его двойственному аналогу соответственно. Однако (см. [3]) для стягиваемого логарифмического комплекса де Рама такой изоморфизм существует уже только для свободных дивизоров Саито [22]. На самом деле нетрудно показать, что на многообразиях с особенностями теории гомологий и когомологий обычного комплекса Кошуля и комплексов $(\Omega_X^\bullet, \iota_{\mathcal{V}})$ и $(\Omega_X^\bullet, \wedge\omega)$ существенно разнятся. Отчасти это объясняется тем, что для негладких многообразий $\mathcal{O}_X$ -модули Ω_X^p не свободны. Вообще говоря, комплексы подобного типа относятся к классу обобщенных комплексов Кошуля. Тем не менее ниже мы покажем, что когомологии возрастающего комплекса $(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge\omega)$ все-таки можно вычислить с помощью классического комплекса Кошуля и резольвент Лебелта.

Теорема 3. В условиях и обозначениях предложения 3

$$\chi(\hat{\Omega}_A^\bullet, \wedge\omega) = (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} H^n(\hat{\Omega}_A^\bullet, \wedge\omega).$$

Доказательство. По построению строки бикомплекса $\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k$ — это резольвенты модулей Ω_A^p для всех $p = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что группы когомологий полного комплекса равны нулю для указанных размерностей. Теперь рассмотрим комплексы, состоящие из столбцов бикомплекса. Начнем с его крайнего правого столбца

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet,0}^k: 0 \longrightarrow A \longrightarrow A^m \longrightarrow \bigwedge^2 A^m \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigwedge^{n-1} A^m \longrightarrow \bigwedge^n A^m. \quad (8)$$

Очевидно, что этот комплекс изоморфен начальному фрагменту обычного (дуального) комплекса Кошуля $\mathbb{K}^\bullet(\alpha; A)$, ассоциированного с образующими идеала $\alpha \subset A$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)A$, порожденного коэффициентами формы $\omega = \sum \alpha_i dz_i \in \Omega_A^1$, поскольку все морфизмы комплекса (8) задаются умножением на элемент α во внешней алгебре $\bigwedge^\bullet A^m$ (см. [6, 1.6.28] или [17, (2.11)]). По условию дифференциальная 1-форма ω имеет изолированную особенность, так что глубина идеала α не меньше размерности особенности, т. е. $\text{depth}(\alpha) \geq n$. Поэтому все группы когомологий комплекса (8) тривиальны в размерностях $i = 0, 1, \dots, n-1$ (см. [6, 1.6.29]). Аналогичное заключение верно и для остальных столбцов бикомплекса. Итак, все вертикальные когомологии бикомплекса $\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k$ (за исключением старших групп), как и все его горизонтальные гомологии, тривиальны. Это, в частности, означает, что все группы когомологий полного комплекса $\text{Tot}(\widehat{\mathcal{L}}_{\bullet\bullet}^k; \mathcal{D}, \wedge\omega)$, за исключением старшей, нулевые. Для завершения доказательства остается использовать предложение 3. $\square$

Перейдем теперь к вычислению *старшей группы когомологий* комплекса $(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega)$.

Предложение 4. Пусть X — изолированная особенность полного пересечения размерности $n \geq 1$, заданная регулярной последовательностью функций $f_1, \dots, f_k$, $n = m - k$, и $\omega \in \Omega_X^1$ — голоморфная дифференциальная форма с изолированной особенностью на X . Тогда

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n(\widehat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} / \text{Cr}(X, \omega),$$

где идеал $\text{Cr}(X, \omega)$ порождается последовательностью $f_1, \dots, f_k$ и максимальными $(k+1) \times (k+1)$ -минорами матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \partial f_1 / \partial z_1 & \dots & \partial f_1 / \partial z_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k / \partial z_1 & \dots & \partial f_k / \partial z_m \end{bmatrix}, \quad (9)$$

в которой элементы верхней строки задаются коэффициентами дифференциальной формы.

Доказательство. В дальнейших рассуждениях нам понадобятся начальные сведения из теории регулярных мероморфных дифференциальных форм на многообразиях Коэна–Маколея (см. [5], [15]). Пусть теперь X — такое многообразие, n — его размерность и ω_X^n — дуализирующий модуль Гротендика на X . По определению когерентный пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей ω_X^p , $p \geq 0$, локально задается как множество ростков мероморфных дифференциальных форм ω степени p на X , таких, что $\omega \wedge \eta \in \omega_X^n$ для любой $\eta \in \Omega_X^{n-p}$. Другими словами,

$$\omega_X^p \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-p}, \omega_X^n). \quad (10)$$

Элементы из ω_X^p называются регулярными мероморфными дифференциальными формами степени p на X . В обозначениях предыдущего параграфа рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tors } \Omega_A^n & \longrightarrow & \Omega_A^n & \xrightarrow{c_A^n} & \omega_A^n & \longrightarrow & \text{Coker}(c_A^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow \wedge \omega & & \uparrow \wedge \omega & & & & \\ & & & & \Omega_A^{n-1} & \xrightarrow{c_A^{n-1}} & \omega_A^{n-1} & & & & \end{array} \quad (11)$$

в которой через c_A^n обозначается морфизм, заданный умножением на форму *фундаментального* класса многообразия X , а вертикальные стрелки соответствуют внешнему умножению на дифференциальную форму $\omega \in \Omega_A^1$. Хорошо известно, что для *полных пересечений* $\omega_A^n \cong A$ и для всех модулей ω_A^p существует естественная система образующих, которую можно записать в терминах резольвенты Кузена пространства X и символа вычета (см. [15, (1.4)]). Напомним, что для такой *изолированной* особенности $\text{Ker}(c_A^n) = \text{Tors } \Omega_A^n$, а $\text{Ker}(c_A^{n-1}) = 0$.

По определению $\omega_A^{n-1} \cong \text{Der}(A)$, и легко проверить, что при таком отождествлении образ $c_A(\Omega_A^{n-1})$ порождается *гамильтоновыми* дифференцированиями (см. [15, § 5]). Для этого сначала заметим, что канонический A -изоморфизм

$\omega_A^n \cong A(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m / df_1 \wedge \dots \wedge df_k)$ задается сопоставлением

$$\left[\frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m}{f_1 \cdots f_k} \right] \mapsto 1_A, \quad (12)$$

где выражение в квадратных скобках — это *символ вычета* дифференциальной формы, указанной сверху, относительно набора функций, стоящих снизу (см. [15, (5.2)]). Далее, согласно [15, (5.1)], этот изоморфизм, в свою очередь, индуцирует изоморфизм $\omega_A^{n-1} \cong \text{Der}(A)$, при котором элемент

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left[\frac{u_i dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_m}{f_1 \cdots f_k} \right] \in \omega_A^{n-1}$$

переводится в векторное поле $\sum_{i=1}^m u_i \partial / \partial z_i \in \text{Der}(A)$.

Наконец, пусть $I = \{i_1, \dots, i_{n-1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, $i_1 < \dots < i_{n-1}$, — произвольный упорядоченный набор индексов и $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{n-1}} \in \Omega_A^{n-1}$ — регулярная $(n-1)$ -форма. Тогда

$$c_A^{n-1}(dz_I) = \left[\frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dz_I}{f_1 \cdots f_k} \right] \in \omega_A^{n-1}.$$

Пусть теперь $J = \{j_1, \dots, j_{k+1}\} = \{1, \dots, m\} \setminus I$ — *дополнительный* упорядоченный набор и

$$H_J = \det \begin{bmatrix} \partial / \partial z_{j_1} & \dots & \partial / \partial z_{j_{k+1}} \\ \partial f_1 / \partial z_{j_1} & \dots & \partial f_1 / \partial z_{j_{k+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k / \partial z_{j_1} & \dots & \partial f_k / \partial z_{j_{k+1}} \end{bmatrix}$$

— соответствующий гамильтониан. Тогда для любого $i = 1, \dots, m$ имеется тождество

$$dz_i \wedge c_A^{n-1}(dz_I) = \pm H_J(z_i) \left[\frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m}{f_1 \cdots f_k} \right],$$

т. е. форме dz_I сопоставляется гамильтониан $\pm H_J \in \text{Der}(A)$.

Из этого следует, что элемент $\zeta = c_A^{n-1}(dz_I) \in \omega_A^{n-1}$ после внешнего умножения на форму $\omega = \sum \alpha_i dz_i \in \Omega_A^1$ превращается в элемент дуализирующего модуля ω_A^n :

$$\zeta \wedge \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i dz_i \right) \mapsto \sum_{i=1}^m \pm \alpha_i H_J(z_i) \left[\frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m}{f_1 \cdots f_k} \right].$$

В результате, учитывая соответствие (12), получаем, что образ $c_A^{n-1}(\Omega_A^{n-1}) \wedge \omega$ в структурной алгебре $A \cong \omega_A^n$ порождается максимальными минорами матрицы (9) из формулировки предложения. Таким образом, получаем естественный изоморфизм

$$\omega_A^n / c_A^{n-1}(\Omega_A^{n-1}) \wedge \omega \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} / \text{Gr}(X, \omega). \quad (13)$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $(\Omega_A^{n-1} \wedge \omega) \cap \text{Tors } \Omega_A^n = 0$, поскольку форма ω имеет *изолированную* особую точку на X (ср. [16, (4.3)]).

Далее, размерности пространств $\text{Tors } \Omega_A^n$ и $\text{Coker}(c_A^n)$ в диаграмме (11) равны, поскольку X — полное пересечение с изолированной особенностью. Следовательно, размерности пространств $\Omega_A^n / \Omega_A^{n-1} \wedge \omega$ и $\omega_A^n / c_A^{n-1}(\Omega_A^{n-1}) \wedge \omega$ также равны. $\square$

Замечание. Как видно из доказательства, изоморфизм (13) существует для произвольной формы $\omega \notin \text{Tors } \Omega_A^1$ без предположения об изолированности ее особых точек.

Следствие 4. В условиях и обозначениях теоремы 3

$$\text{Ind}_{\text{hom}, \mathcal{O}}(\omega) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} / \text{Cr}(X, \omega) = \dim_{\mathbb{C}} (A / \mathcal{C}),$$

где идеал $\mathcal{C}$ порождается элементами $\iota_{N_J}(\omega)$ для всех $J = \{j_1, \dots, j_{k+1}\} \subset \{1, \dots, m\}$.

Доказательство. Из теоремы 3 и предложения 4 следует, что

$$\chi(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega) = (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} / \text{Cr}(X, \omega).$$

С другой стороны, $(-1)^n \text{Ind}_{\text{hom}, \mathcal{O}}(\omega) = \chi(\hat{\Omega}_X^\bullet, \wedge \omega)$ по определению гомологического индекса. $\square$

Замечание. В работе [9] утверждение этого следствия получено с помощью модифицированной версии обобщенной леммы де Рама (см. [12, лемма 1.6]).

§7. Дальнейшие обобщения и приложения

Описанную схему рассуждений можно применить для вычисления индекса голоморфных форм на ростках многообразий с особенностями самых разных типов. В ряде случаев эта задача решается построением резольвент подходящего типа, с помощью которых можно описать модули Ω_A^p и когомологии комплекса $(\hat{\Omega}_A^\bullet, \wedge \omega)$. При этом совсем не обязательно, чтобы эти резольвенты были свободными или даже конечными. Например, при описании Ω_A^p для *гиперповерхностей* с произвольными особенностями удобно использовать четырехчленные точные последовательности, тесно связанные с логарифмическими дифференциальными формами, которые, вообще говоря, несвободны (см. [3]), в то время как для описания модуля дифференцирований на квазиоднородном полном пересечении хорошо подходит бесконечная резольвента, основанная на конструкции комплекса О. В. Ляшко (см. [2, (6.1)]). Другой важный пример — это ростки, у которых модуль кэлеровых дифференциалов обладает свободной P -резольвентой *конечной* длины. Тогда с ее помощью можно построить резольвенты для модулей Ω_A^p при $p > 1$ (см. [18]) и доказать аналог теоремы 3. Пользуясь соображениями такого рода, нетрудно также научиться вычислять индекс дифференциальных форм, заданных и на неполных пересечениях: на кривых Коэна–Маколея, на нормальных детерминантных и торических многообразиях и т. п.

Упомянем еще один подход к задаче вычисления гомологического индекса дифференциальных форм на многообразиях с произвольными особенностями (ср. [4, §5]). Итак, пусть $Z = \text{Sing } X$ — подмногообразие особенностей ростка X , $U = X \setminus Z$ и $j: U \rightarrow X$ — естественное вложение. Тогда для каждого $p \geq 0$ существует стандартная точная последовательность $\mathcal{O}_X$ -модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^p) \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow j_* j^* \Omega_X^p \longrightarrow \mathcal{H}_Z^1(\Omega_X^p) \longrightarrow 0.$$

В самом общем случае пучки дифференциальных p -форм $j_*j^*\Omega_X^p$, $p \geq 0$, вообще говоря, *некогерентны*. Однако всегда существует (и, как правило, даже не один) *когерентный* подпучок $\mathcal{F}_X^p \subset j_*j^*\Omega_X^p$, такой, что $\Omega_U^p \cong \mathcal{F}_X^p|_U$.

Предположим, что ограничение дифференциальной формы $\omega \in \Omega_X^1$ на Ω_U^1 можно продолжить на $\mathcal{F}_X^1$ таким образом, что внешнее умножение на эту форму будет совместимо с морфизмами индуцированной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^p) \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \mathcal{F}_X^p \longrightarrow \# \Omega_X^p \longrightarrow 0,$$

где $\# \Omega_X^p \subseteq \mathcal{H}_Z^1(\Omega_X^p)$ при $p \geq 0$. Тогда, обозначая продолжение формы ω тем же символом, легко понять, что существует аналогичная точная последовательность возрастающих комплексов и, если все группы когомологий конечномерны, то

$$\chi(\Omega_X^\bullet, \wedge \omega) = \chi(\mathcal{F}_X^\bullet, \wedge \omega) + \chi(\mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^\bullet), \wedge \omega) - \chi(\# \Omega_X^\bullet, \wedge \omega).$$

Допустим теперь, что n -мерный росток X обладает *дуализирующим* комплексом $(\omega_X^\bullet, d)$, например, X — росток Коэна–Маколея. Тогда в качестве $\mathcal{F}_X^p$ можно взять $\omega_X^p = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-p}, \omega_X^n)$ — это (когерентный) пучок ростков регулярных *мероморфных* p -форм на X , поскольку $\omega_X^p \subseteq j_*j^*\Omega_X^p$ для всех p . Хорошо известно, что для *нормальных* многообразий это вложение — равенство. Кроме того, для кривых Коэна–Маколея, квазиоднородных поверхностей Горенштейна и полных пересечений с изолированной особенностью можно доказать, что $\chi(\# \Omega_X^\bullet, \wedge \omega) = 0$. В этих случаях гомологический индекс выражается через когомологии подкомплекса *кручения* $(\mathcal{H}_Z^0(\Omega_X^\bullet), \wedge \omega)$ и дуализирующего комплекса $(\omega_X^\bullet, \wedge \omega)$ и т. д. Описание дуализирующего комплекса также хорошо известно для торических многообразий [8] и некоторых других типов нормальных особенностей.

Иногда в роли $\mathcal{F}_X^p$ удобно также использовать пучки ростков дифференциальных p -форм, продолжаемых определенным образом с регулярной части многообразия на его разрешение или нормализацию, пучки слабо голоморфных форм и пр.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Г. Александров, *О комплексе де Рама квазиоднородного полного пересечения*, Функц. анализ и его прил., **17**:1 (1983), 63–64.
- [2] А. Г. Александров, *Когомология квазиоднородного полного пересечения*, Изв. АН СССР, сер. матем., **49**:3 (1985), 467–510.
- [3] А. Г. Александров, *Индекс векторных полей и логарифмические дифференциальные формы*, Функц. анализ и его прил., **39**:4 (2005), 1–13.
- [4] A. G. Aleksandrov, *L'indice topologique des champs de vecteurs sur les intersections complètes quasi-homogènes (à la mémoire de Henri Poincaré)*, C. R. Acad. Sci., Paris. Sér. I. Math., **350**:19–20 (2012), 911–916.
- [5] D. Barlet, *Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure*, in: Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer-Verlag, Berlin, 1978, 187–204.
- [6] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advances Math., vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 1996.
- [7] H.-Ch. Graf von Bothmer, W. Ebeling, X. Gómez-Mont, *An algebraic formula for the index of a vector field on an isolated complete intersection singularity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **58**:5 (2008), 1761–1783.

- [8] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, УМН, **33:2**(200) (1978), 85–134.
- [9] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, *Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity*, Moscow Math. J., **3:2** (2003), 439–455.
- [10] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, J. Seade, *Homological index for 1-forms and a Milnor number for isolated singularities*, Internat. J. Math., **15:9** (2004), 895–905.
- [11] X. Gómez-Mont, *An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity*, J. Algebraic Geom., **7:4** (1998), 731–752.
- [12] G.-M. Greuel, *Der Gauß–Manin–Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann., **214:1** (1975), 235–266.
- [13] G.-M. Greuel, H. Hamm, *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte*, Invent. Math., **49:1** (1978), 67–86.
- [14] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973.
- [15] M. Kersken, *Reguläre Differentialformen*, Manuscripta Math., **46:1** (1984), 1–25.
- [16] O. Klehn, *Local residues of holomorphic 1-forms on an isolated surface singularity*, Manuscripta Math., **109:1** (2002), 93–108.
- [17] K. Lebelt, *Torsion äußerer Potenzen von Moduln der homologischen Dimension 1*, Math. Ann., **211:1** (1974), 183–197.
- [18] K. Lebelt, *Freie Auflösungen äußerer Potenzen*, Manuscripta Math., **21:4** (1977), 341–355.
- [19] D. Lehmann, M. Soarès, T. Suwa, *On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety*, Bol. Soc. Brasil. Mat., **26:2** (1995), 183–199.
- [20] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966.
- [21] I. Naruki, *Some remarks on isolated singularities and their application to algebraic manifolds*, Publ. RIMS, **13:1** (1977), 17–46.
- [22] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. IA Math., **27:2** (1980), 265–291.
- [23] P. Seibt, *Infinitesimal extensions of commutative algebras*, J. Pure Appl. Algebra, **16:2** (1980), 197–206.