Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Рекуррентные формулы для A_n -
и B_n -решений уравнения WDVV, *Функци. анализ и
его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa318>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:47:04

2. Используя [10], теоремы 1–3 можно обобщить на случай, когда возмущенный оператор имеет конечный дискретный спектр на отрицательной полуоси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuzhel A. V., Kuzhel S. A. Regular extensions of Hermitian operators. VSP, Utrecht (1998).
2. Кужель С. А. Укр. матем. ж., **50**, № 12, 1615–1629 (1998).
3. Кужель С. А. Функци. анализ и его прил., **30**, вып. 1, 70–73 (1996).
4. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. Мир, М. (1971).
5. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **29**, № 6, 1389–1416 (1965).
6. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Наукова думка, Киев (1984).
7. Адамьян В. М., Аров Д. З. ДАН СССР, **160**, № 1, 9–12 (1965).
8. Наймарк М. А. Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 3, 277–309 (1940).
9. Штраус А. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **18**, № 1, 51–86 (1954).
10. Кужель С. А. Матем. сб., **187**, № 10, 87–108 (1996).

Институт Математики НАН Украины
e-mail: kuzhel@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
18 декабря 1998 г.

УДК 517.98

Рекуррентные формулы для A_n - и B_n -решений уравнения WDVV*

© 2000. С. М. НАТАНЗОН

1. В начале 90-х годов в работах [5, 8] была построена система дифференциальных уравнений (называемая сейчас WDVV), описывающая древесное приближение 2-мерных топологических теорий поля при нулевых константах гравитационного спаривания. Дубровин [3] обнаружил, что решения этой системы описывают замечательную дифференциально-геометрическую структуру Фробениуса–Дубровина, связывающую самые, казалось бы, далекие разделы математики: алгебраическую геометрию, дискретные группы, квантовые когомологии, теорию особенностей, интегрируемые системы и др.

Простейшими нетривиальными решениями WDVV являются так называемые A_n - и B_n -потенциалы [5–7, 9], описывающие, как оказалось впоследствии, метрику К. Сайто на пространстве версальных деформаций особенностей A_n и B_n .

A_{n-1} -потенциалы $F_A(x_1, \dots, x_{n-1})$ и B_{n-1} -потенциалы $F_B(x_1, \dots, x_{n-1})$ определяются как функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial x_{n-\gamma} \partial x_\eta \partial x_\xi} = \sum_{\gamma=1}^{n-1} \frac{\partial^3 F}{\partial x_\xi \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial x_{n-\gamma} \partial x_\eta \partial x_\alpha},$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1 \partial x_\alpha \partial x_\beta} = \delta_{\alpha+\beta, n}, \quad \sum_{j=1}^{n-1} d_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF,$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (98-01-00612) и INTAS.

где $F \in \{F_A, F_B\}$, причем $d_i = 1 + (1 - i)/n$, $d = 2 + 2/n$ для $F = F_A$ и $d_i = 1 + (1 - i)/(n - 1)$, $d = 2 + 1/(n - 1)$ для $F = F_B$. На множествах A_{n-1} - и B_{n-1} -потенциалов транзитивно действует группа $F(x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \frac{1}{\beta} F(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_{n-1} x_{n-1})$, где $\alpha_i = \text{const}$, $\alpha_1 \alpha_i \alpha_{n-i} = \beta \neq 0$ ($i = 1, \dots, n - 1$).

Функции F_A и F_B известны лишь для $n \leq 4$ [3, 4]. В настоящей работе представлены рекуррентные формулы, позволяющие найти F_A и F_B для всех n . Формулы основаны на найденной в [7] взаимосвязи A_n -потенциалов с бездисперсионной n -иерархией Гельфанда–Дикого (n -КдФ-иерархией) и на найденном в [1, 2] явном описании иерархии КП.

2. Согласно [6, 9], один из A_{n-1} -потенциалов является производящей функцией для чисел пересечений классов Мамфорда–Мориты–Мюллера пространств модулей спинорных расслоений над сферами с проколами. Именно этот потенциал F_A мы и будем искать. Нам понадобятся комбинаторные коэффициенты $P_s(i_1, \dots, i_m)$, где $s, i_j \geq 1$, вычисляемые по следующим рекуррентным правилам:

$$P_s(i) = s, \quad P_s(i_1, \dots, i_m) = C_s^m - \sum_{q=1}^{m-1} P_s(i_1, \dots, i_q) C_{s-q-(i_1+\dots+i_q)}^{m-q},$$

где $C_p^t = 0$ при $t > p$, $t < 0$ или $p < 0$.

Положим $x_0 = 0$. Для $q > 0$ рекуррентно определим полиномы $x_{-q}(x_1, \dots, x_{n-1})$ равенствами

$$x_{-q} = -\frac{1}{n} \sum_{m=2}^{\infty} \sum P_n(s_1, \dots, s_m) x_{n-s_1} \cdots x_{n-s_m},$$

где вторая сумма берется по всем наборам $(s_1, \dots, s_m)$, таким, что $\sum_{i=1}^m s_i = q + n + 1 - m$. Представим полиномы x_q в виде

$$x_q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum B_{q i_1 \dots i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m},$$

где вторая сумма берется по наборам $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n - 1$.

Положим

$$A_{i_1 \dots i_m} = \frac{1}{i_1 p} B_{i_1 \dots i_m},$$

где p — это число таких j , что $i_j = i_1$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство*

$$F_A = \sum_{m=3}^{\infty} \sum A_{i_1 \dots i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m},$$

где вторая сумма берется по наборам $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n - 1$.

Согласно [10], отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. *Полином*

$$F_B = \sum_{m=3}^{\infty} \sum A_{2i_1-1 \dots 2i_m-1} x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

(где вторая сумма берется по наборам $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n - 1$) является B_{n-1} -потенциалом.

3. Коротко опишем схему доказательства теоремы 1. Она использует найденное в [1, 2] описание иерархии КП в виде

$$\partial_i \partial_j v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum R_{s_1 \dots s_m}^{t_1 \dots t_m}(i, j) \partial^{s_i} \partial_{t_i} v \dots \partial^{s_m} \partial_{t_m} v,$$

где $\partial_k = \partial/\partial x_k$, $\partial = \partial_1$, $i, j \geq 2$, $t_q, s_q \geq 1$ и $R_{s_1 \dots s_m}^{t_1 \dots t_m}(i, j)$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты. Вторая сумма берется по всем наборам $(t_1, s_1, \dots, t_m, s_m)$, таким, что $\sum_{q=1}^m (t_q + s_q) = i + j$.

Используя это представление, можно доказать, что бездисперсионная иерархия КП имеет вид

$$\frac{1}{r} \partial_s \partial_r v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum P_s(s_1, \dots, s_m) \frac{1}{s_1} \partial \partial_{s_1} v \dots \frac{1}{s_m} \partial \partial_{s_m} v,$$

где вторая сумма берется по всем наборам $(s_1, \dots, s_m)$, таким, что $\sum_{i=1}^m s_i = s + r - m$.

Бездисперсионная n -иерархия Гельфанда–Дикого получается из бездисперсионной иерархии КП добавлением уравнения $\partial_n v = 0$. С другой стороны, согласно [7],

$$F_A(x_1, \dots, x_{n-1}) = v\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, 0, \frac{1}{n+1}, 0, 0, \dots\right),$$

где v удовлетворяет бездисперсионной n -иерархии Гельфанда–Дикого, причем $\partial \partial_{n+s} F_A = -s \partial_s F_A$. Сопоставление этих формул и дает доказательство теоремы 1.

4. Приведем теперь найденные с помощью теорем 1 и 2 A_n - и B_n -потенциалы:

$$(A_2) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{24} x_2^4,$$

$$(A_3) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_2^2 + \frac{1}{4} x_2^2 x_3^2 + \frac{1}{60} x_3^5,$$

$$(A_4) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 + \frac{1}{6} x_2^3 + \frac{1}{12} x_3^4 + \frac{1}{2} x_2 x_3^2 x_4 + \frac{1}{4} x_2^2 x_4^2 + \frac{1}{6} x_3^2 x_4^3 + \frac{1}{120} x_4^6,$$

$$(A_5) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_5 + \frac{1}{2} x_2^2 x_3 + \frac{1}{4} x_2^2 x_5^2 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_4 + \frac{1}{6} x_2 x_4^3 + \frac{1}{2} x_1 x_3^2 + \\ + \frac{1}{2} x_3^2 x_4^2 + \frac{1}{6} x_3^3 x_5 + \frac{1}{6} x_3^2 x_5^3 + \frac{1}{2} x_3 x_4^2 x_5^2 + \frac{1}{6} x_4^4 x_5 + \frac{1}{8} x_4^2 x_5^4 + \frac{1}{210} x_5^7,$$

$$(B_2) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{60} x_2^5,$$

$$(B_3) \quad F = \frac{1}{2} x_1^2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_2^2 + \frac{1}{6} x_2^3 x_3 + \frac{1}{6} x_2^2 x_3^3 + \frac{1}{210} x_3^7.$$

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Недавно автору удалось доказать (math. AG/0005076), что $F_A(x_1, \dots, x_{n-1})$ является ограничением на $x_n = x_{n-1} = \dots = 0$ некоторого (струнного) решения иерархии n -КдФ, а не только ее бездисперсионного предела. Это доказывает некоторые новые соотношения из гипотезы Виттена [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **52**, № 2, 267–286 (1989).
2. Натанзон С. М. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 17–26 (1992).
3. Dubrovin B. In: Lecture Notes in Math., vol. 1620, Springer-Verlag, 1996, pp. 120–348.
4. Dubrovin B. Preprint SISSA 24/98/FM.
5. Dijkgraaf R., Verlinde E., Verlinde H. Nucl. Phys. B, **352**, 59–86 (1991).
6. Dijkgraaf R., Witten E. Nucl. Phys. B, **342**, 486–522 (1990).
7. Krichever I. Comm. Math. Phys., **143**, 415–429 (1992).
8. Witten E.

Nucl. Phys. B, **340**, 281–332 (1990). **9.** *Witten E.* In: Topological methods in modern mathematics. Proceedings of the symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday, held at the State University of New York, Stony Brook, USA, June 14–June 21, 1991, Publish or Perish, Houston, TX, 1993, pp. 235–269. **10.** *Zuber J.-B.* Modern. Phys. Lett. A, **9**, 749–760 (1994).

Московский государственный университет
Независимый московский университет
natanzon@mccme.ru

Поступило в редакцию
25 февраля 1999 г.

УДК 512.77

Теория зацеплений и новые запреты для M -кривых степени 9*

© 2000. С. Ю. ОРЕВКОВ

Все известные ограничения на топологию вещественных неособых алгебраических кривых в $\mathbb{RP}^2$ нечетных степеней ≤ 9 получены комбинацией применения теоремы Безу, формулы Рохлина–Мишачева для комплексных ориентаций [1] и теоремы Фидлера [2] о чередовании ориентаций. Этим способом Виро [3] завершил изотопическую классификацию вещественных кривых степени 7. Корчагин [4] систематически применил этот метод к M -кривым степени 9, но его оказалось недостаточно. Пример нового запрета для кривых 9-й степени, приведенный автором в [5], по существу был получен тем же методом, правда, с использованием новой формулы комплексных ориентаций.

В то же время имеются довольно мощные методы получения запретов для кривых четных степеней, основанные на построении циклов на двулистном накрытии пространства $\mathbb{CP}^2$, разветвленном вдоль комплексификации кривой (гомологические методы). Их нельзя применить непосредственно к кривым нечетных степеней по той простой причине, что в этом случае двулистного накрытия не существует. Чтобы обойти эту проблему, можно рассматривать накрытия более высокой степени. Этим путем было получено неравенство Виро–Звонилова [6]. Другой путь, предложенный автором в [5], состоит в том, чтобы рассматривать форму Зейферта некоторого зацепления вместо формы пересечения на двулистном накрытии. В этом случае сигнатурные оценки принимают вид неравенства Муласуги–Тристрама.

Цель настоящей заметки — показать, что этот метод работает для проктивных кривых нечетных степеней. Мы не применяли систематически этот метод ко всем M -схемам 9-й степени, реализуемость которых пока неизвестна (их несколько сотен [4]). Доказываемые здесь запреты — это просто первые найденные нами примеры, в которых гомологический метод работает, в то время как остальные известные методы — нет.

ТЕОРЕМА 1. *Не существует M -кривых степени 9 в $\mathbb{RP}^2$ с вещественными схемами¹*

$$\langle J \sqcup \beta \sqcup 1 \langle 1 \langle \alpha \rangle \rangle \rangle, \quad \text{где } \alpha + \beta = 26, \quad (1)$$

$$\beta = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10. \quad (2)$$

*При частичной поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и РФФИ-98-01-00794.

¹Определение и обозначения вещественных и комплексных схем см. в [7].