Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Кубрак, М. В. Финкельберг, Исчезающие циклы на пуассоновых многообразиях, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 70–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:19:08

Исчезающие циклы на пуассоновых многообразиях*

© 2015. Д. В. КУБРАК, М. В. ФИНКЕЛЬБЕРГ

Вадиму Шехтману к шестидесятилетию

Мы немного обобщаем результаты Мирковича–Эванса и «вычисляем» характеристические циклы пучков Горески–Макферсона на трансверсальных срезах в двойном аффинном грассманиане. Мы также выдвигаем гипотезу, связывающую гиперболические слои и микролокализацию в неподвижной относительно действия тора точке пуассонова многообразия.

1. Введение

1.1. Стандартная задача микролокальной геометрии состоит в том, чтобы для извращенного пучка $\mathcal{F}$ на гладком многообразии Y подсчитать характеристический цикл $CC(\mathcal{F}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S \overline{T_S^* Y}$ — положительную целочисленную комбинацию замыканий конормальных расслоений к локально замкнутым стратам $S \subset Y$. Эта задача была решена Эвансом и Мирковичем в [3] для пучков Горески–Макферсона $G[[z]]$ -орбит в аффинном грассманиане Gr_G полупростой комплексной группы G . А именно, они смогли доказать обращение в нуль всех препятствий Эйлера с помощью вычисления A -эквивариантной эйлеровой характеристики комплексных линков ($A \subset G$ — картановский тор). Для их подхода было важно, что страты S являлись орбитами действия некоторой алгебраической группы и что конормальные слои могли быть отождествлены с некоторыми алгебраическими алгебрами Ли.

Результаты из [3] наводят на мысль о существовании микролокального функтора слоя из геометрической категории Сатаке $\mathrm{Perv}_{G[[z]]}(\mathrm{Gr}_G)$ в категорию представлений двойственной по Ленглендсу группы $\check{G}$. Предполагаемый аффинный аналог грассманиана Gr_G — двойной аффинный грассманиан $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{aff}}$ — был введен в [2]. Точнее, весь $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{aff}}$ слишком бесконечномерен для доступного на данный момент математического аппарата, поэтому приходится думать о нем как о наборе (конечномерных) трансверсальных срезов. Цена, которую приходится заплатить за ущербность такого подхода, состоит в том, что страты уже не являются орбитами действия каких-либо групп.

К счастью, они все еще являются симплектическими листами для пуассоновой структуры. Это наделяет конормальные слои структурой алгебры Ли и дает возможность применить аргумент Эванса–Мирковича. Мы доказываем это в §3 после некоторой общей подготовки в §2, отвечая на вопрос Эванса.

*Исследование М. Ф. выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150). Статья подготовлена Д. К. в ходе проведения исследования с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.

Изоморфизм (возможного) микролокального функтора слоя со стандартным функтором слоя Мирковича–Вилонена дается равенством между гиперболическими слоями и микролокализацией в неподвижных относительно действия тора точках. Похоже, что оно должно выполняться и в наших более общих условиях, см. гипотезу 4.1. Если эта гипотеза верна, то она позволяет выразить классические R -матрицы в [5, §4.8] как действие микролокальной фундаментальной группы.

Есть еще один богатый класс алгебраических пуассоновых многообразий с конечным числом симплектических листов: колчаные многообразия Накаджимы. Они удовлетворяют почти всем условиям разд. 2.2 кроме одного (за исключением случая типа A , конечного или аффинного): множество точек, неподвижных относительно действия тора, не дискретно. Уже в простейших примерах клейновых особенностей типа D и E (колчаные многообразия конечно-го типа, соответствующие нулевому весу присоединенного фундаментального представления) препятствие Эйлера не обращается в нуль. Более точно, для всех клейновых особенностей типа D и E (там всего 2 страта) оно равно 1; поэтому кратность кокасательного слоя в особой точке в характеристическом цикле (постоянного) ИС-пучка равна 2. Зато для аффинных гиперторических многообразий (другой класс алгебраических пуассоновых многообразий с конечным числом симплектических листов) все наши условия выполнены, так что кратность вхождения конормального расслоения к страту в характеристический цикл ИС-пучка совпадает с размерностью тотального слоя ИС-пучка на этом страте, вычисленной в [6].

Благодарности. Эта статья является результатом терпеливых объяснений В. Гинзбурга, А. Кузнецова, Л. Рыбникова, П. Шапира и Дж. Вильямсона.

§2. Обращение в нуль препятствий Эйлера

2.1. Обзор [3]. Мы напоминаем рассуждение Эванса и Мирковича.

Пусть $\mathcal{L}$ — стратификация Уитни комплексного многообразия Y , и пусть $D_{\mathcal{L}}(Y)$ обозначает производную категорию $\mathcal{L}$ -конструктивных пучков. Пусть $\mathcal{F}$ — объект категории $D_{\mathcal{L}}(Y)$. Тогда он определяет две важные конструктивные (относительно $\mathcal{L}$) функции на Y . Первая, χ , просто равна эйлеровой характеристике $\chi(\mathcal{F}_y)$ слоя пучка $\mathcal{F}$ в точке y . Так как $\mathcal{F}$ лежит в $D_{\mathcal{L}}(Y)$, χ является $\mathcal{L}$ -конструктивной, и мы обозначаем через $\chi_{\alpha}(\mathcal{F})$ ее значение на страте α . Вторая функция, $c(\mathcal{F})$, приходит из характеристического цикла

$$CC(\mathcal{F}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}} c_{\alpha}(\mathcal{F}) \cdot \overline{T_{\alpha}^*(Y)},$$

ее значение на страте α равняется величине $c_{\alpha}(\mathcal{F})$, которая называется микролокальной кратностью пучка $\mathcal{F}$ вдоль α . Здесь $T_{\alpha}^*(Y) \subset T^*(Y)$ обозначает конормальное расслоение к страту α .

Для любой пары стратов α и β препятствие Эйлера $e_{\alpha, \beta}$ определяется как $c_{\alpha}(\mathbb{C}_{\beta})$, где $\mathbb{C}_{\beta}$ — постоянный пучок на β , продолженный нулем на Y .

Ковектор $\xi \in T_{\alpha}^*(Y)$ называется не- $\mathcal{L}$ -характеристичным, если он лежит в

$$T_{\alpha}^*(Y)^r := T_{\alpha}^*(Y) - \bigcup_{\alpha \neq \beta} \overline{T_{\beta}^*(Y)}.$$

Множество не- $\mathcal{L}$ -характеристичных элементов открыто и плотно в $T_\alpha^*(Y)$, и его фундаментальная группа называется микролокальной фундаментальной группой страта α .

Следующую теорему можно найти в [4, гл. 9]:

Теорема 2.1. (а) В группе Гротендика $\mathcal{L}$ -конструктивных комплексов

$$c_\alpha = \sum_{\beta \in \mathcal{L}} e_{\alpha, \beta} \cdot \chi_\beta.$$

(b) $e_{\alpha, \alpha} = (-1)^{\dim(\alpha)}$ и $e_{\alpha, \beta} = 0$, если $\alpha \not\subset \bar{\beta}$. Если $\alpha \subset \partial \bar{\beta}$, то мы выбираем

- нормальный срез N в $(Y, \mathcal{L})$ к α в точке $y \in \alpha$,
- голоморфную функцию ϕ на N , обращающуюся в нуль в y и такую, что $d_y \phi \in T_y^*(N)$ является $\mathcal{L}$ -общим вектором,
- маленький шарик B вокруг y в Y ,
- маленькое $t \in \mathbb{C}$.

Тогда

$$e_{\alpha, \beta} = (-1)^{\dim(\alpha)+1} \chi_c(\beta \cap \phi^{-1}(t) \cap B)$$

равняется, с точностью до знака, эйлеровой характеристике когомологий с компактным носителем пересечения страта β с нормалью к α и близкой гиперплоскостью $\phi^{-1}(t)$ вблизи точки y .

Пересечение $\beta \cap \phi^{-1}(t) \cap B$ называется комплексным линком стратов α и β .

Миркович и Эванс предлагают следующее: имея действие компактного тора A^c на Y , стабилизирующее y и β , выбрать B в теореме 2.1 A^c -инвариантным и попытаться найти A^c -инвариантную функцию ϕ на N , такую, чтобы ее дифференциал был нехарактеристичным. Тогда комплексный линк будет также инвариантен относительно действия A^c , и можно применить классический результат Бореля. А именно, пусть Z — паракомпактное пространство конечной когомологической размерности с действием компактного тора A^c ; тогда $\chi_c(Z) = \chi_c(Z^{A^c})$, где Z^{A^c} обозначает множество неподвижных точек. В частности, если Z^{A^c} пусто, то мы получаем $\chi_c(Z) = 0$, или, что то же самое, $e_{\alpha, \beta} = 0$.

Поэтому главный вопрос состоит в существовании A^c -инвариантной функции с нехарактеристичным дифференциалом. В следующем разделе мы формулируем некоторые технические условия, которые ее существование гарантируют. В следующем параграфе мы проверяем эти условия для нашего основного примера.

2.2. Действующие лица. X — аффинное комплексное пуассоново многообразие с конечным числом симплектических листов X_i , $i \in L$. Во избежание путаницы мы поясним определение симплектических листов в этой ситуации. Пусть $X_{\text{sing}} \subset X$ обозначает сингулярный локус многообразия X . Тогда $X - X_{\text{sing}}$ — гладкое пуассоново многообразие, и мы требуем, чтобы оно имело конечное число пуассоновых листов. Более того, X_{sing} наследует пуассонову структуру от X , но $\dim X_{\text{sing}} < \dim X$; поэтому симплектические листы определены и на X_{sing} (индукцией по размерности). Замыкание листа X_i обозначается через $\bar{X}_i$. Скобка Пуассона на $R := \mathbb{C}[X]$ обозначается через $\{ , \}$. Редуктивная группа G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ действует на X , сохраняя скобку $\{ , \}$. Мы предполагаем существование отображения моментов $\mu: X \rightarrow \mathfrak{g}^*$, следовательно, $\mu^*: \text{Sym}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \rightarrow R$. Множество неподвижных точек X^A действия

максимального тора $A \subset G$ состоит из одной точки $x \in X$, 0-мерного симплектического листа. Кроме того, имеется действие однопараметрической группы $\mathbb{C}^\times$ на X , коммутирующее с действием G . Мы предполагаем, что соответствующее действие на R имеет только положительные веса: оно индуцирует градуировку $R = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{l>0} R_l$ и $\mathfrak{m}_x = \bigoplus_{l>0} R_l$. Мы предполагаем также, что скобка Пуассона имеет вес $w > 0$ относительно однопараметрической группы $\mathbb{C}^\times$, т.е. $\{R_l, R_m\} \subset R_{l+m-w}$. Наконец, мы предполагаем, что $R_l = 0$ для $0 < l < w$ и R_w совпадает с образом отображения μ^* пространства линейных функций на $\mathfrak{g}^*: \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu^*} R$.

2.3. Кокасательная алгебра Ли. Скобка Пуассона на R индуцирует структуру алгебры Ли на кокасательном пространстве Зарисского $T_x^*X := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Действительно, так как x является симплектическим листом, пуассонов бивектор обращается в нуль в x и $\{\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x\} \subset \mathfrak{m}_x$. По правилу Лейбница $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ мы также имеем $\{\mathfrak{m}_x^2, \mathfrak{m}_x\} \subset \mathfrak{m}_x^2$. Другими словами, скобка Пуассона на $\mathfrak{m}_x$ спускается на $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и снабжает его структурой алгебры Ли, обозначаемой через $\mathfrak{q}$. Градуировка на $\mathfrak{m}_x$ дает градуировку на $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} = \bigoplus_{l \geq w} \mathfrak{q}_l$. Мы полагаем $\mathfrak{q}^m := \mathfrak{q}_{w+m}$. Относительно этой новой сдвинутой градуировки скобка Ли однородна, что делает $\mathfrak{q}$ неотрицательно градуированной алгеброй Ли.

Лемма 2.2. $\mathfrak{q}$ — алгебраическая алгебра Ли, т.е. существует комплексная алгебраическая группа Ли Q с алгеброй Ли $\mathfrak{q}$.

Доказательство. Благодаря условиям из разд. 2.2, $\mathfrak{q}^0$ есть фактор алгебры $\mathfrak{g}$, более того, этот фактор алгебраический, т.е. $\mathfrak{q}^0 = \text{Lie } Q^0$ для фактора Q^0 группы G . Действительно, пусть $\mathfrak{k} := \text{Ker } \mu^* \subset \mathfrak{g}$. Тогда $\xi \in \mathfrak{g}$ лежит в $\mathfrak{k}$ в том и только том случае, когда он действует нулевым векторным полем на касательный конус Зарисского $C_xX = \text{Spec } \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_x^k/\mathfrak{m}_x^{k+1}$. Однако ядро действия алгебры $\mathfrak{g}$ на C_xX есть алгебра Ли ядра действия группы G на C_xX (которое, в свою очередь, совпадает с ядром действия группы G на X благодаря редуктивности группы G). Нильпотентный идеал $\mathfrak{q}^{>0}$ интегрируется до унитарной группы $Q^{>0}$, и присоединенное действие алгебры $\mathfrak{q}^0$ на $\mathfrak{q}^{>0}$ интегрируется до действия группы G на $\mathfrak{q}^{>0}$ (пропускаясь через $G \twoheadrightarrow Q^0$). Лемма доказана. $\square$

2.4. Вычисление препятствий Эйлера. Существует открытая по Зарискому окрестность U точки x в X и замкнутое вложение $U \hookrightarrow Y$ в гладкое алгебраическое многообразие, индуцирующее изоморфизм касательных пространств Зарисского $T_xX = T_xU \xrightarrow{\sim} T_xY$. Двойственно, $T_x^*Y \xrightarrow{\sim} \mathfrak{q}$. Регулярная часть $\mathfrak{q}^{\text{reg}} \subset \mathfrak{q}$ определяется как $\mathfrak{q} \setminus \bigcup_{i \in L, X_i \neq \{x\}} \overline{T_{X_i \cap U}^*Y} \cap T_x^*Y$. Это непустое открытое подмножество в $\mathfrak{q}$. Оно, очевидно, не зависит от выбора U и Y , сделанного выше. Более того, если мы выберем замкнутое вложение $U \hookrightarrow Y'$, дающее сюръекцию $p: T_x^*Y' \twoheadrightarrow \mathfrak{q}$, то регулярная часть векторного пространства T_x^*Y' (равная $T_x^*Y' \setminus \bigcup_{i \in L, X_i \neq \{x\}} \overline{T_{X_i \cap U}^*Y'} \cap T_x^*Y'$) будет в точности равна $p^{-1}(\mathfrak{q}^{\text{reg}})$.

Лемма 2.3. $\mathfrak{q}^{\text{reg}} \subset \mathfrak{q}$ инвариантно относительно присоединенного действия группы Q на $\mathfrak{q}$.

Доказательство. Пусть $C_x \overline{X_i} \subset C_xX \subset T_xX = T_xY$ — нормальные конусы. Пусть, кроме того, $C_x^{\text{sm}} \overline{X_i} \subset C_x \overline{X_i}$ — это гладкая часть. Конструкция деформации к нормальному конусу доказывает, что $\overline{T_{C_x^{\text{sm}} \overline{X_i}}^*T_xY} \cap T_x^*Y = \overline{T_{X_i \cap U}^*Y} \cap T_x^*Y$.

Левая часть равенства есть конус над замкнутым подмногообразием проективизации $\mathbb{P}\mathfrak{q} = \mathbb{P}T_x^*Y$, проективно двойственным $\mathbb{P}C_x\overline{X_i} \subset \mathbb{P}T_xY$. Так как $C_x\overline{X_i} \subset \mathfrak{q}^*$ — пуассоновое подмногообразие, оно Q -инвариантно; значит, его проективно двойственное также Q -инвариантно. $\square$

Теорема 2.4. *Препятствия Эйлера $e_{x,\overline{X_i}}$ равны 0 для любого $X_i \neq x$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $e_{x,X}$. Согласно [7, 2.13], найдется ненулевой элемент $q \in \mathfrak{q}^{\text{reg}}$, неподвижный относительно действия максимального тора $T \subset Q$. Так как все максимальные торы в Q сопряжены и $\mathfrak{q}^{\text{reg}}$ инвариантно относительно Q , то мы можем найти другой ненулевой элемент $q' \in \mathfrak{q}^{\text{reg}}$, стабилизируемый максимальным тором $A \subset G \rightarrow Q$ (в обозначениях разд. 2.2). Выберем A -эквивариантное замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^N$ и подьем элемента q' до A -инвариантной линейной функции ϕ на $\mathbb{A}^N$. Теперь рассуждение в [3, доказательство теоремы 2.2] доказывает, что $e_{x,X} = 0$.

В случае произвольного симплектического листа $X_i \subset X$, $X_i \neq x$, мы просто заменяем X на $\overline{X_i}$ в проведенном выше рассуждении: все условия из разд. 2.2 выполняются для тех же $A \subset G$ и $\mathbb{C}^\times$. $\square$

§3. Применения к трансверсальным срезам в двойных аффинных грассманианах

3.1. Пространства Уленбек. Мы следуем обозначениям [2]. Начнем с того, что для почти простой односвязной комплексной алгебраической группы H мы обозначим через $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ замыкание Уленбек пространства $\text{Bun}_H^a(\mathbb{A}^2)$ модулей H -расслоений на $\mathbb{P}^2$, тривиализованных вдоль $\mathbb{P}^1$ и со вторым классом Черна, равным a . Оно снабжается действием группы $H \times \text{Aff}(2)$. Здесь H действует заменой тривиализации, а $\text{Aff}(2) = \text{GL}(2) \ltimes \mathbb{G}_a^2$ (группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{A}^2$, т.е. $\text{Aut}(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1)$) действует переносом структуры. Нормальная подгруппа $\mathbb{G}_a^2$ действует на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ свободно, и фактор обозначается через ${}'\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ — приведенное пространство Уленбек, снабженное действием группы $H \times \text{GL}(2)$. Вложим $\mathbb{C}^\times \subset \text{GL}(2)$ в качестве центральной подгруппы, и пусть G — подгруппа $H \times \text{SL}(2)$.

Предложение 3.1. *Многообразие $X = {}'\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ с действием группы $G \times \mathbb{C}^\times$ удовлетворяет условиям разд. 2.2.*

Доказательство. В случае $H = \text{SL}(r)$ пространство Уленбек $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2)$ было построено Дональдсоном как гамильтонова редукция пространства представлений двухпетлевого колчана; оно обычно обозначается через $M_0(V, W)$, где $V = \mathbb{C}^a$, $W = \mathbb{C}^r$. Эта конструкция снабжает $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2)$ пуассоновой структурой. Для произвольной группы H и представления $\varrho: H \rightarrow \text{SL}(r)$ мы имеем соответствующее вложение $\varrho_*: \mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2) \hookrightarrow \mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^{a'}(\mathbb{A}^2)$ для некоторого a' . Ограничение пуассоновой структуры многообразия $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^{a'}(\mathbb{A}^2)$ на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ не зависит от ϱ с точностью до (ненулевого) скалярного множителя. Мы фиксируем пуассонову структуру на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$, выбирая, скажем, присоединенное представление ϱ .

Хорошо известная стратификация $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2) = \bigsqcup_{0 \leq b \leq a} \text{Bun}_H^b(\mathbb{A}^2) \times \text{Sym}^{a-b} \mathbb{A}^2$ измельчается до диагональной стратификации $\text{Sym}^{a-b} \mathbb{A}^2 = \bigsqcup_{\mathfrak{P} \in P(a-b)} \text{Sym}^{\mathfrak{P}} \mathbb{A}^2$,

см. [1, §10] (здесь $P(a-b)$ обозначает множество разбиений числа $a-b$). Диагональные страты есть не что иное, как симплектические листы пуассоновой структуры; в частности, всего симплектических листов конечное число. Для краткости мы будем обозначать страт $\text{Vsh}_H^b(\mathbb{A}^2) \times \text{Sym}^{\mathfrak{P}} \mathbb{A}^2$ через $\mathcal{U}_H^{b,\mathfrak{P}}$, а его образ в приведенном пространстве Уленбек $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ через $\mathcal{U}_H^{b,\mathfrak{P}}$. Таким образом, $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2) = \bigsqcup_{0 \leq b \leq a}^{\mathfrak{P} \in P(a-b)} \mathcal{U}_H^{b,\mathfrak{P}}$ есть разложение на симплектические листы. Среди них есть единственный 0-мерный лист: для $b=0$, $\mathfrak{P}=(a)$. Эта точка x является единственной неподвижной точкой действия максимального тора $A \subset G$.

Для того чтобы вычислить вес w пуассоновой структуры относительно действия группы $\mathbb{C}^\times$, мы напомним конструкцию гамильтоновой редукции $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2) = M_0(V, W)$. А именно, для $M = \text{Hom}(W, V) \oplus \text{Hom}(V, W) \oplus \text{End}(V, V) \oplus \text{End}(V, V)$ (с типичным элементом (p, q, A, B)) и $M \supset M' := \{(p, q, A, B) : AB - BA + pq = 0\}$ с естественным действием группы $\text{GL}(V)$ мы имеем $M_0(V, W) = M' // \text{GL}(V)$. Действие группы $\mathbb{G}_a^2$ на $M_0(V, W)$ приходит из действия

$$(a, b) \cdot (p, q, A, B) = (p, q, A + a \text{Id}_V, B + b \text{Id}_V)$$

на M . Поэтому $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^a(\mathbb{A}^2) = M_0(V, W) / \mathbb{G}_a^2 = M'' // \text{GL}(V)$, где $M' \supset M'' := \{(p, q, A, B) : AB - BA + pq = 0, \text{Tr } A = \text{Tr } B = 0\}$. Векторное пространство M имеет естественную симплектическую структуру, которая дает пуассонову структуру на категорном факторе $M_0(V, W)$. Действие группы $\mathbb{C}^\times$ на $M_0(V, W)$ приходит из стягивающего действия $t \cdot (p, q, A, B) = (tp, tq, tA, tB)$ на M . Очевидно, что симплектическая форма на M имеет вес 2 относительно этого действия, поэтому $w = 2$. По определению пуассоновой структуры на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ она имеет вес 2 и для произвольной группы H .

Остается найти все функции на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ веса 1 и 2 относительно $\mathbb{C}^\times$. Снова мы начинаем со случая $H = \text{SL}(r)$. По классической теории инвариантов все $\text{GL}(V)$ -инвариантные функции на M'' порождаются следующими: (а) матричными элементами матрицы $qCp \in \text{End}(W)$, где C есть слово из букв (A, B) ; (б) следами матриц $C \in \text{End}(V)$, где C есть слово из букв (A, B) . Очевидно, что $\mathbb{C}^\times$ -вес для случая (а) равен длине $(C) + 2$, а вес $(\text{Tr } C) = \text{длина}(C)$. Заметим, что единственные слова длины 1 — это A, B и что их следы обращаются в нуль по определению многообразия M'' . Таким образом, функций веса 1 нет.

Функции веса 2 линейно порождены матричными элементами матрицы qp и следами $\text{Tr } A^2, \text{Tr } B^2, \text{Tr } AB$. Заметим, что $\text{Tr } qp = \text{Tr } pq = 0$. Очевидно, что функции веса 2 из первой группы подняты при помощи отображения моментов $M'' // \text{GL}(V) \rightarrow \mathfrak{sl}(W)^* = \mathfrak{sl}(r)^*$, а из второй — при помощи отображения моментов $M'' // \text{GL}(V) \rightarrow \mathfrak{sl}(2)^*$. Поэтому $\mathfrak{sl}(r) \oplus \mathfrak{sl}(2) \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^a]_2$.

Наконец, для произвольного представления $H \xrightarrow{\varrho} \text{SL}(r)$ функции веса k на $\mathcal{U}_H^a$ являются ограничениями функций веса k на $\mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^{a'}$ при замкнутом вложении $\varrho_*: \mathcal{U}_H^a \hookrightarrow \mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^{a'}$. Коммутативная диаграмма отображений моментов

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_H^a & \xrightarrow{\varrho_*} & \mathcal{U}_{\text{SL}(r)}^{a'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{sl}(2)^* & \xleftarrow{\varrho^* \oplus \text{Id}} & \mathfrak{sl}(r)^* \oplus \mathfrak{sl}(2)^* \end{array}$$

завершает доказательство. $\square$

3.2. Характеристический цикл пучка $\mathrm{IC}(\mathcal{U}_H^a)$. Мы выбираем замкнутое вложение $\mathcal{U}_H^a \hookrightarrow Y$ в гладкое многообразие Y и рассматриваем $\mathrm{IC}(\mathcal{U}_H^a)$ как извращенный пучок на Y .

Следствие 3.2. *Кратность конормального расслоения $T_{\mathcal{U}_H^b, \mathfrak{P}}^* Y$ в характеристическом цикле $\mathrm{CC}(\mathrm{IC}(\mathcal{U}_H^a))$ равна полной размерности слоя пучка $\mathrm{IC}(\mathcal{U}_H^a)$ на страте $\mathcal{U}_H^{b, \mathfrak{P}}$ (подсчитанной в [1, теорема 7.10]).*

Доказательство. Рассуждение в [3, разд. 2.5] сводит доказательство к обращению в нуль препятствий Эйлера $e_{\mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}, \overline{\mathcal{U}}_H^{b, \mathfrak{P}}}$, где $\overline{\mathcal{U}}_H^{b, \mathfrak{P}} \supset \mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}$ обозначает замыкание страта $\mathcal{U}_H^{b, \mathfrak{P}}$. Разберемся сначала с наименьшим стратом $x = \mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}$ для $b' = 0$, $\mathfrak{P}' = (a)$. Здесь обращение в нуль следует из теоремы 2.4 и предложения 3.1. В общем случае равенство $e_{\mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}, \overline{\mathcal{U}}_H^{b, \mathfrak{P}}} = 0$ эквивалентно равенству $e_{\mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}, \overline{\mathcal{U}}_H^{b, \mathfrak{P}}} = 0$, где $\overline{\mathcal{U}}_H^{b, \mathfrak{P}} \supset \mathcal{U}_H^{b', \mathfrak{P}'}$ обозначает замыкание страта $\mathcal{U}_H^{b, \mathfrak{P}}$ в непротиведенном пространстве Уленбек $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$. По принципу факторизации [1, предложение 6.5] искомое препятствие есть произведение $\prod_{l=1}^m e_{\mathcal{U}_H^{0, (a_l)}, \overline{\mathcal{U}}_H^{b_l, \mathfrak{P}_l}}$ (где m — число слагаемых в разбиении $\mathfrak{P}$). Эти множители, как уже было доказано, обращаются в нуль. $\square$

3.3. Трансверсальные срезы в двойных аффинных грассманианах. Пусть $\Gamma_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \subset G = H \times \mathrm{SL}(2)$ — циклическая подгруппа; трансверсальный срез $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ определяется (см. [2]) как некоторая связная компонента множества неподвижных точек многообразия $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)^{\Gamma_k}$. Пуассонова структура ограничивается с $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$, и симплектические листы суть пересечения среза $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ с симплектическими листами (стратами диагональной стратификации) многообразия $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$.

В случае $k = 2$ циклическая подгруппа Γ_2 центральна в $\mathrm{SL}(2)$ и централизатор $G = Z_{H \times \mathrm{SL}(2)}(\Gamma_2) = Z_H(\Gamma_2) \times \mathrm{SL}(2)$ действует на $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_2)$, сохраняя пуассонову структуру. В случае $k > 2$ на $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ мы имеем действие только группы $G = Z_{H \times \mathrm{SL}(2)}(\Gamma_k) = Z_H(\Gamma_k) \times T$, где T — тор, централизующий Γ_k в $\mathrm{SL}(2)$. Действие центральной подгруппы $\mathbb{C}^\times \subset \mathrm{GL}(2)$ на $\mathcal{U}_H^a(\mathbb{A}^2)$ сохраняет $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$.

Предложение 3.3. *Пусть $X = \mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$. Тогда X с действием группы $G \times \mathbb{C}^\times$ удовлетворяет условиям разд. 2.2.*

Доказательство. Мы в целом повторяем доказательство предложения 3.1: используя представление $\varrho: H \rightarrow \mathrm{SL}(r)$, мы сводим утверждение к случаю $H = \mathrm{SL}(r)$. В этом случае трансверсальный срез $\mathcal{U}_{H, \mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ есть не что иное, как циклическое колчанное многообразие $M_0(\underline{V}, \underline{W})$ [2, часть 7] (для циклического колчана с k вершинами). Мы имеем $M_0(\underline{V}, \underline{W}) = M' // \mathrm{GL}(\underline{V})$, где $\mathrm{GL}(\underline{V}) = \prod_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathrm{GL}(V_l)$, и $M' \subset M := \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(W_l, V_l) \oplus \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V_l, W_l) \oplus \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathrm{End}(V_l, V_{l+1}) \oplus \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathrm{End}(V_l, V_{l-1})$ задается уравнениями $A_{l-1}B_l - B_{l+1}A_l + p_l q_l = 0$, $l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Группа $\mathbb{C}^\times$ действует растяжением, и $\mathbb{C}^\times$ -вес пуассоновой структуры равен $w = 2$. Несложно проверить при помощи классической

теории инвариантов, что все $\mathrm{GL}(\underline{V})$ -инвариантные функции на M' порождены следующими функциями: (а) матричными элементами матриц $q_n C p_m$, где C — слово в алфавите $(A_l, B_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ (допустимы не все слова, а только *компонлируемые*); (б) следами матриц $C \in \mathrm{End}(V_0)$, где C — компонлируемое слово из алфавита $(A_l, B_l)_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, начинающееся и заканчивающееся в нулевой вершине. Среди них функции веса 2 — это матричные элементы матриц $q_l p_l$ и $\mathrm{Tr}(B_1 A_0)$ для $k > 2$ (заметим, что $\mathrm{Tr}(A_{-1} B_0) = \mathrm{Tr}(B_1 A_0) - \mathrm{Tr}(q_0 p_0)$), а также $\mathrm{Tr}(A_1 A_0)$, $\mathrm{Tr}(B_1 B_0)$ для $k = 2$. Очевидно, что эти функции приходят из отображения моментов $M_0(\underline{V}, \underline{W}) \rightarrow (\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(W_l) \cap \mathfrak{sl}(\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} W_l))^* \oplus \mathfrak{t}^*$ в случае $k > 2$ и $M_0(\underline{V}, \underline{W}) \rightarrow (\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathfrak{gl}(W_l) \cap \mathfrak{sl}(\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} W_l))^* \oplus \mathfrak{sl}(2)^*$ в случае $k = 2$. Предложение доказано. $\square$

Следствие 3.4. Для замкнутого вложения $\mathcal{U}_{H,\mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k) \hookrightarrow Y$ в гладкое многообразии Y кратность конормального расслоения $T_S^* Y$ к симплектическому листу $S \subset \mathcal{U}_{H,\mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)$ в характеристическом цикле $\mathrm{CC}(\mathrm{IC}(\mathcal{U}_{H,\mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k)))$ равняется полной размерности слоя пучка $\mathrm{IC}(\mathcal{U}_{H,\mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k))$ на страте S .

Доказательство. Доказательство такое же, как в следствии 3.2. $\square$

Замечание 3.5. Размерность слоя пучка $\mathrm{IC}(\mathcal{U}_{H,\mu}^\lambda(\mathbb{A}^2/\Gamma_k))$ на страте S вычисляется при помощи принципа факторизации и [2, гипотеза 4.14].

§4. Гипотеза

4.1. Камеры. В условиях разд. 2.2 мы полагаем $\mathfrak{a} := \mathrm{Lie} \mathbf{A}$ и $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} := X_*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathfrak{a}$. Мы называем ковес $a \in X_*(\mathbf{A})$ *регулярным*, если $X^{a(\mathbb{C}^\times)} = x$. Мы предполагаем, что нерегулярные ковеса образуют конечное объединение подгрупп коранга 1 в $X_*(\mathbf{A})$. Мы говорим, что элемент $a \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ *регулярный*, если он лежит вне соответствующих гиперплоскостей. Компоненты связности пространства $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^{\mathrm{reg}}$ называются *камерами*.

Пусть задан регулярный ковес $a \in X_*(\mathbf{A})$. Определим притягивающееся множество $\mathfrak{T}_a \subset X$ как множество всех $z \in X$, таких, что $\lim_{c \rightarrow 0} a(c) \cdot z = x$. Если менять a внутри камеры $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{T}_a$ меняться не будет; поэтому мы обозначаем его через $\mathfrak{T}_{\mathfrak{C}}$. Замкнутое вложение $\mathfrak{T}_{\mathfrak{C}} \hookrightarrow X$ обозначается через $\iota_{\mathfrak{C}}$, а замкнутое вложение $x \hookrightarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{C}}$ — через $j_{\mathfrak{C}}$. Композиция $j_{\mathfrak{C}}^! \iota_{\mathfrak{C}}^*$ есть гиперболическое ограничение. Во всех примерах §3 $j_{\mathfrak{C}}^! \iota_{\mathfrak{C}}^* \mathrm{IC}(X)$ является векторным пространством когомологической градуировки 0.

4.2. Микролокализация. В соответствии с разд. 2.4 мы имеем извращенный пучок $\mu(\mathrm{IC}(X))$ на $T_x^* = \mathfrak{q}$. Согласно [4, предложение 4.4.7], $\mu(\mathrm{IC}(X))$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора вложения $U \hookrightarrow Y$. Напомним, что мы имеем гомоморфизм $\eta: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{q} = T_x^* X$. На основании [5] и примеров из §3 мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 4.1. (а) $\eta^* \mu(\mathrm{IC}(X))$ постоянен в любой камере $\mathfrak{C}$.

(б) Существует канонический изоморфизм $\eta^* \mu(\mathrm{IC}(X))_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{\sim} j_{\mathfrak{C}}^! \iota_{\mathfrak{C}}^* \mathrm{IC}(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory, *Uhlenbeck spaces via affine Lie algebras*, in: The Unity of Mathematics, Progress in Math., vol. 244, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 17–135; *Erratum*: <http://arxiv.org/abs/math/0301176v4>.

- [2] A. Braverman, M. Finkelberg, *Pursuing the double affine Grassmannian. I. Transversal slices via instantons on A_k -singularities*, Duke Math. J., **152**:2 (2010), 175–206.
- [3] S. Evens, I. Mirković, *Characteristic cycles for the loop Grassmannian and nilpotent orbits*, Duke Math. J., **97**:1 (1999), 109–126.
- [4] М. Касивара, П. Шапира, *Пучки на многообразиях*, Мир, М., 1997.
- [5] D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, <http://arxiv.org/abs/1211.1287>.
- [6] N. Proudfoot, B. Webster, *Intersection cohomology of hyperthoric varieties*, J. Algebraic Geom., **16**:1 (2007), 39–63.
- [7] R. Steinberg, *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*, Lect. Notes Math., vol. 366, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Лаборатория
алгебраической геометрии
e-mail: dmkuabrik@gmail.com

Поступила в редакцию
9 марта 2013 г.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», факультет математики
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: fnklberg@gmail.com