Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Можно ли усилить экстраполяционную теорему Яно?, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:39:29

Можно ли усилить экстраполяционную теорему Яно?*

© 2015. Е. И. БЕРЕЖНОЙ

Хорошо известно, что многие операторы анализа, например, оператор Гильберта или оператор максимальной функции, ограничены в пространстве L^p при $p \in (1, \infty)$, но не являются ограниченными в L^1 и L^∞ . Одним из направлений для определения «предельного» пространства стали экстраполяционные теоремы. Первая теорема экстраполяции предложена Яно [1] в 1951 г. Позднее появилось много работ ([2]–[6]), обобщающих теорему Яно для пространств Лебега и близких к ним, среди которых отметим работу [2], в которой найдено короткое доказательство теоремы экстраполяции для L^1 . Стоит заметить, что при определении предельного пространства в экстраполяционных теоремах всегда оставался открытым вопрос об «увеличении» экстремального пространства.

В настоящей заметке мы покажем, что экстраполяционная теорема, предложенная в [2], и следующая из нее теорема Яно для операторов, нормы которых как операторов из L^p в Y растут не быстрее степенной функции, не могут быть улучшены.

Для фиксированного оператора T , определенного на $\bigcup_{p>1} L^p(0, 1)$ и принимающего значения в пространстве Y , и для $\alpha \in [0, 1)$ введем функцию $\xi(\alpha) = \|T : L^{1/\alpha} \rightarrow Y\|$ ($1/0 = \infty$). Если T — не тождественный нуль, то $\xi(0) > 0$, $\xi(\alpha)$ не убывает, а из интерполяционной теоремы следует, что $\xi(\alpha)$ эквивалентна логарифмически выпуклой функции.

Экстраполяционная теорема для L^p из [2], обобщающая теорему Яно, имеет следующий вид.

Теорема 1. Пусть фиксирован оператор T и функция $\xi(\alpha)$, причем $\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \xi(\alpha) = \infty$. Для $\tau \in (0, 1)$ определим функцию

$$\psi_\xi(\tau) = \inf_{\alpha \in (0, 1)} \xi(\alpha) \cdot \tau^\alpha. \quad (1)$$

Тогда при всех x из области определения оператора T выполняется неравенство

$$\|Tx|Y\| \leq \|x|\Lambda(\psi_\xi)\|.$$

Здесь пространство Лоренца $\Lambda(\psi_\xi)$ состоит из тех x , для которых конечна норма

$$\|x|\Lambda(\psi_\xi)\| = \int_0^1 x^*(s) d\psi_\xi(s),$$

где $x^*(s)$ — перестановка функции $|x(s)|$ в невозрастающем порядке.

Следующая теорема является основной.

Теорема 2. Пусть фиксирована неубывающая логарифмически выпуклая функция $\xi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая, что $\xi(0) = 1$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \xi(\alpha) = \infty$, по которой с помощью формулы (1) построены функция $\psi_\xi(\tau)$ и пространство $\Lambda(\psi_\xi)$. Пусть функция ξ при всех $\tau \in (0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$\xi(1 - \tau/2) \leq e^{c_0} \xi(1 - \tau) \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекта №14-01-00417.

с некоторой константой c_0 .

Тогда существует линейный функционал F , для которого

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 1-0} \frac{\|F: L^{1/\alpha} \rightarrow \mathbb{R}\|}{\xi(\alpha)} < \infty \quad (3)$$

и для некоторой константы c и всех $x \in L^1$ справедливо неравенство

$$|F(x^*)| \geq c \|x\| \Lambda(\psi_\xi). \quad (4)$$

В частности, F не принадлежит X^* ни для какого симметричного пространства $X \not\subseteq \Lambda(\psi_\xi)$. Таким образом, для функций $\xi(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (2), увеличить пространство $\Lambda(\psi_\xi)$ в экстраполяционной теореме нельзя.

Доказательство. Построим последовательность, которая ниже будет играть важную роль. Выберем $s_1 \in (0, 1)$ так, чтобы $\xi(1 - (\ln(1/s_1))^{-1}) = e^{c_0}$ (это возможно, так как $\xi(0) = 1$), и пусть построены элементы $s_i \in (0, 1)$ ($i = 2, \dots, k$). Выберем $s_{k+1} \in (0, 1)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\xi(1 - (\ln(1/s_{k+1}))^{-1}) = e^{c_0} \xi(1 - (\ln(1/s_k))^{-1}) = e^{(k+1)c_0}. \quad (5)$$

Тогда из монотонности функции $\ln \xi(\tau)$ и соотношения (5) следует, что выполнено неравенство $(\ln(1/s_{k+1}))^{-1} \leq 0,5(\ln(1/s_k))^{-1}$, или

$$s_{k+1} \leq s_k^2. \quad (6)$$

Определим теперь искомый функционал равенством

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi\left(1 - \left(\ln \frac{1}{s_k}\right)^{-1}\right) \int_{s_{k+1}}^{s_k} x(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} e^{kc_0} \int_{s_{k+1}}^{s_k} x(s) ds.$$

Тогда

$$\zeta(\alpha) = \|F: L^{1/\alpha} \rightarrow \mathbb{R}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{kc_0/(1-\alpha)} (s_k - s_{k+1}) \right)^{1-\alpha}.$$

Покажем, что найдется константа b_1 , такая, что при всех $j \in N$ для $\alpha_j = 1 - (\ln(1/s_j))^{-1}$ выполняются неравенства

$$\zeta(\alpha_j) \leq b_1 \xi(\alpha_j). \quad (7)$$

Введем функцию

$$\zeta_1(\alpha) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{kc_0/(1-\alpha)} s_k \right)^{1-\alpha}.$$

Тогда из определения и неравенства (6) следует, что

$$\zeta_1(\alpha) \geq \zeta(\alpha) \geq (1 - s_1)^{1-\alpha} \zeta_1(\alpha). \quad (8)$$

Далее,

$$\zeta_1(\alpha_j) = \left(\sum_{k=1}^j e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k \right)^{1-\alpha_j} = (A_1(j) + A_2(j))^{1-\alpha_j}.$$

Оценим сначала член $A_1(j)$:

$$A_1(j) = \sum_{k=1}^j e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k \leq \sum_{k=1}^j e^{kc_0/(1-\alpha_j)} \leq j e^{jc_0/(1-\alpha_j)}. \quad (9)$$

Для оценки члена $A_2(j)$ выберем $l \in N$ так, чтобы выполнялось неравенство $2^l - c_0 > 1$, и заметим, что из равенств

$$A_2(j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k = \sum_{k=j+1}^{\infty} e^{kc_0 \ln(1/s_j)} s_k = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s_j}\right)^{kc_0} s_k,$$

неравенства (6) и выполнения при $k \geq j+l$ неравенств

$$\frac{(1/s_j)^{(k+1)c_0} s_{k+1}}{(1/s_j)^{kc_0} s_k} \leq \left(\frac{1}{s_j}\right)^{c_0} s_k \leq \left(\frac{1}{s_j}\right)^{c_0} s_{j+l} \leq \left(\frac{1}{s_j}\right)^{c_0} s_j^{2^l} < s_j \leq s_1 < 1,$$

следует соотношение

$$A_2(j) = \sum_{k=j+1}^{j+l-1} e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k + \sum_{k=j+l}^{\infty} e^{kc_0/(1-\alpha_j)} s_k \leq \left(l - 1 + \frac{1}{1 - s_1}\right) e^{(j+l)c_0 \ln(1/s_j)}.$$

Объединяя последнее неравенство с (9), окончательно получим

$$\zeta_1(\alpha_j) \leq e^{jc_0} \left(j + \left(l - 1 + \frac{1}{1 - s_1} e^{lc_0 \ln(1/s_j)} \right) \right)^{1-\alpha_j}. \quad (10)$$

Поскольку $\lim_{j \rightarrow \infty} j^{(-\ln s_j)^{-1}} = 1$, то из последнего неравенства и из (8) следует (7).

Из (5) и (7) следует (3). Проверим (4). Поскольку функция $\psi_\xi(s)$ вогнута на $(0, 1)$ и не убывает, то она эквивалентна непрерывно дифференцируемой на $(0, 1)$ вогнутой неубывающей функции. Чтобы не перегружать обозначения, будем считать, что функция $\psi_\xi(s)$ непрерывно дифференцируема.

Ввиду вогнутости для всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство $\psi_\xi(t)/t \geq \psi'_\xi(t)$. Кроме того, если в (1) подставить $\alpha = 1 - (\ln(1/\tau))^{-1}$ и заметить, что $\tau^{-(\ln(1/\tau))^{-1}} = e$, то найдется константа d_1 , такая, что при всех $\tau \in (0, e^{-c_0})$ выполняется неравенство

$$\psi_\xi(\tau) \leq d_1 \tau \xi(1 - (\ln(1/\tau))^{-1}).$$

Выберем теперь i_0 так, чтобы $s_{i_0} < e^{-c_0}$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{i_0} \int_0^1 x^*(s) d\psi_\xi(s) &\leq \int_0^{s_{i_0}} x^*(s) d\psi_\xi(s) = \sum_{k=i_0}^{\infty} \int_{s_{k+1}}^{s_k} x^*(s) d\psi_\xi(s) \\ &\leq \sum_{k=i_0}^{\infty} \psi'_\xi(s_{k+1}) \int_{s_{k+1}}^{s_k} x^*(s) ds \leq \sum_{k=i_0}^{\infty} \frac{\psi_\xi(s_{k+1})}{s_{k+1}} \int_{s_{k+1}}^{s_k} x^*(s) ds \\ &\leq d_1 \sum_{k=i_0}^{\infty} \xi \left(1 - \left(\ln \frac{1}{s_{k+1}} \right)^{-1} \right) \int_{s_{k+1}}^{s_k} x^*(s) ds \\ &= e^{c_0} d_1 \sum_{k=i_0}^{\infty} \xi \left(1 - \left(\ln \frac{1}{s_k} \right)^{-1} \right) \int_{s_{k+1}}^{s_k} x^*(s) ds \leq e^{c_0} d_1 F(x^*). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что условиям теоремы 2 удовлетворяют логарифмически выпуклые функции, эквивалентные в окрестности единицы функции $\xi(t) = (1-t)^\alpha$ с $\alpha < 0$ или функции $\xi(t) = (1-t)^\alpha (\ln(1-t))^\beta$ с $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Yano, J. Math. Soc. Japan., **3**:2 (1951), 296–305. [2] Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, Функци. анализ и его прил., **34**:3 (2000), 66–68. [3] М. Milman, *Extrapolation and Optimal Decompositions: with Applications to Analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1580, Springer-Verlag, Berlin, 1994. [4] B. Jawerth, M. Milman, Memoirs Amer. Math. Soc., **89**:440 (1991), 1–82. [5] G. E. Karadzhov, M. Milman, J. Approx. Theory, **133**:1 (2005), 38–99. [6] С. В. Асташкин, Сиб. матем. журн., **46**:2 (2005), 264–289.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
e-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
24 мая 2013 г.

УДК 519.4

О дискретном спектре гамильтонианов n -частичных систем при $n \rightarrow \infty$ в пространствах функций различной перестановочной симметрии*

© 2015. Г. М. Жислин

1. При исследовании дискретного спектра операторов энергии H_n системы n тождественных частиц (во внешнем поле или без него) с учетом перестановочной симметрии обычно сначала фиксируется тип α неприводимого представления симметрической группы S_n , затем строится пространство функций $A^{(\alpha)}$, преобразующихся при перестановках по представлению типа α , и, наконец, изучается спектр сужения оператора H_n на построенное подпространство. Однако в случае систем n тождественных частиц с короткодействующими потенциалами взаимодействия при $n \rightarrow \infty$ существующие методы не позволяют применить эту схему напрямую. Дело в том, что эти методы дают лишь «асимптотические» результаты и не говорят ничего о дискретном спектре при произвольном фиксированном n . А следовательно, мы не можем фиксировать тип α представления группы S_n , ибо α определяется разбиением

$$n = n_1 + \dots + n_p \quad (1)$$

числа n на p ($1 \leq p \leq n$) целых положительных чисел $n_1 \geq \dots \geq n_p$, в то время как n мы фиксировать не можем (в рамках существующих методов). Поэтому, чтобы учесть перестановочную симметрию, приходится ограничивать оператор H_n не на одно пространство $A^{(\alpha)}$, а на сумму $E_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, пространств $A^{(\alpha)}$

*Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00458_а).