Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, О множестве решений одного класса уравнений с сюръективными операторами, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 74–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 03:06:30

И. И. Пятацкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции, Обобщенные функции*, вып. 6, Наука, М., 1966. [4] D. Harlow, J. Maltz, E. Witten, J. High Energy Phys., no. 12 (2011), 071; <http://arxiv.org/abs/1108.4417>. [5] H. Loke, Pacific J. Math., **197** (2001), 119–144. [6] A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov, Nucl. Phys., **B477:2** (1996), 577–605.

Department of Mathematics,
Faculty of Information Technology
National University of Civil Engineering, Hanoi, Vietnam
e-mail: buivanbinhdhxd@gmail.com
Institut de Mathématiques de Toulouse,
Université P. Sabatier, Toulouse, France
e-mail: vadim.schechtman@math.univ-toulouse.fr

Поступила в редакцию
19 января 2013 г.

УДК 517.988.6

О множестве решений одного класса уравнений с сюръективными операторами*

© 2015. Б. Д. ГЕЛЬМАН

Введение. Данная заметка посвящена изучению уравнений вида $A(x) = f(x)$ в случае, когда A является замкнутым линейным сюръективным оператором, а отображение f является уплотняющим относительно оператора A . Ранее разрешимость уравнений такого вида изучалась в работе [1]. В настоящей заметке не только доказываются теоремы существования, но и дается оценка топологической размерности множества решений этого уравнения. В заключение полученные теоремы применяются для изучения множества глобальных решений одного класса уравнений нейтрального типа.

1. (A, ψ) -уплотняющие отображения. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства; в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $A: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть $\Gamma(A) \subset E_1 \times E_2$ — график оператора A . Обозначим через A^{-1} многозначное отображение, обратное к оператору A .

Определение 1. Число

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y \in (E_2 \setminus \{0\})} \left(\frac{\inf\{\|x\| : x \in E_1, A(x) = y\}}{\|y\|} \right)$$

называется *нормой* многозначного отображения A^{-1} .

В работе [5] были рассмотрены некоторые примеры вычисления нормы $\|A^{-1}\|$.

Пример 1. Пусть $C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве E и $A: D(A) \subset C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$, где $D(A)$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций, — оператор дифференцирования. В этом случае $\|A^{-1}\| = (b - a)/2$.

Рассмотрим ситуацию, которая часто возникает при изучении краевых задач.

*Это исследование поддержано РФФИ, грант №14-01-00468-а.

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $L: E_1 \rightarrow E_3$ — непрерывный линейный оператор. Пусть $M = A \times L: D(A) \subset E_1 \rightarrow E_2 \times E_3$, т.е. $M(x) = (A(x), L(x))$. Будем предполагать, что в прямых произведениях пространств введена l_1 -норма, $\|(y, u)\| = \|y\| + \|u\|$. Пусть $\hat{L}$ — сужение оператора L на $\text{Ker}(A)$.

Предложение 1. Если оператор $\hat{L}: \text{Ker}(A) \rightarrow E_3$ является сюръективным, то M — замкнутый сюръективный оператор, $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(\hat{L})$ и $\|M^{-1}\| \leq \max\{\|A^{-1}\|(1 + \|L\| \|\hat{L}^{-1}\|), \|\hat{L}^{-1}\|\}$.

Пусть в E_2 задана монотонная несингулярная алгебраически полуаддитивная вещественная правильная мера некомпактности ψ (см., например, [2]). Пусть $t: \Gamma(A) \rightarrow E_1$ — отображение проектирования на область определения оператора A , т.е. $t(x, y) = x$.

Определение 2. Будем говорить, что отображение $f: D(f) \subset E_1 \rightarrow E_2$ является (A, ψ) -уплотняющим, если

(U1) для любого множества $\Omega \subset (D(A) \cap D(f))$ из неравенства $\psi(A(\Omega)) \leq \psi(f(\Omega)) < \infty$ следует, что $\psi(A(\Omega)) = 0$;

(U2) композиция $f \circ t: t^{-1}(D(f)) \rightarrow E_2$ является непрерывным отображением.

Рассмотрим пример (A, ψ) -уплотняющего отображения. Нам понадобятся следующие понятия.

Пусть E_3 — нормированное пространство и $B: D(B) \subset E_1 \rightarrow E_3$ — линейный оператор.

Определение 3. Будем говорить, что оператор B является l -подчиненным оператору A , если

(i) $D(A) \subset D(B)$;

(ii) $\|B(x)\| \leq l \|A(x)\|$ для любого $x \in D(A)$.

Пусть X — ограниченное подмножество в $D(A)$. Пусть $\varphi: X \times E_3 \rightarrow E_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(φ_1) существует число $k \in (0, 1/l)$, такое, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $\|\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$;

(φ_2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y): X \rightarrow E_2$ является A -вполне непрерывным (см. [4]).

Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow E_2$, $f(x) = \varphi(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ (см. [2]).

Предложение 2. При сделанных предположениях отображение f является (A, χ) -уплотняющим.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 2.2 из [1].

2. Уравнения с (A, ψ) -уплотняющими отображениями. Пусть E — банахово пространство, $\hat{E} = E \times \mathbb{R}^n$ и в E задана мера некомпактности ψ . Пусть $U = U_R(0) \times V_{R_1}(0)$, где $U_R(0) \subset E$ — открытый шар радиуса R с центром в нуле, а $V_{R_1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар радиуса R_1 с центром в нуле. Пусть $f: \bar{U} \rightarrow E$ — непрерывное отображение, такое, что для любого $v \in \overline{V_{R_1}(0)}$ отображение $f_v = f(\cdot, v): \overline{U_R(0)} \rightarrow E$ является уплотняющим отображением относительно меры некомпактности ψ . Рассмотрим уравнение $f(x, v) = x$. Обозначим множество его решений через $N(f, \bar{U})$.

Лемма 1. Если для любой точки $(x, v) \in \bar{U}$ выполнено неравенство $\|f(x, v)\| < R$, то множество решений этого уравнения непусто и его топологическая размерность $\dim$ не меньше n .

Эта лемма является следствием теоремы 2.2 из [3].

Пусть $q: E_2 \rightarrow E_1$ — непрерывное отображение, правое обратное к оператору A . Рассмотрим множество $X \subset E_1$ и (A, ψ) -уплотняющее отображение $f: X \rightarrow E_2$.

Лемма 2. Пусть $V \subset E_2$ и $q(V) \subset X$. Тогда $g = f \circ q: V \rightarrow E_2$ является непрерывным ψ -уплотняющим отображением.

Нас будет интересовать разрешимость и свойства множества решений уравнения

$$A(x) = f(x). \quad (1)$$

Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ — замкнутый шар радиуса R с центром в x_0 и $f: B_R[x_0] \rightarrow E_2$ — некоторое отображение. Для любого положительного числа m рассмотрим множество

$$P_m = \{x \in D(A) : x \in B_R[x_0], \|A(x) - A(x_0)\| \leq R/m\}. \quad (2)$$

Обозначим через $\mathfrak{N}(A, f, P_m)$ множество решений уравнения (1), лежащих в P_m .

Теорема 1. Пусть существует такое число $m > 0$, что

(i) отображение f , суженное на множество P_m , является (A, ψ) -уплотняющим отображением;

(ii) $\|A^{-1}\| < m$;

(iii) для любой точки $x \in P_m$ выполнено неравенство

$$\|A(x_0) - f(x)\| < R/m. \quad (3)$$

Тогда $\mathfrak{N}(A, f, P_m) \neq \emptyset$ и $\dim(\mathfrak{N}(A, f, P_m)) \geq \dim(\text{Ker}(A))$.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n \in \text{Ker}(A)$ — линейно независимые единичные векторы. Рассмотрим пространство $E_3 = E_2 \times \mathbb{R}^n$ с нормой $\|(x, u)\| = \|x\| + \|u\|$, где $u = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\|u\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$. Положим $2\delta = m - \|A^{-1}\| > 0$. Пусть $y_0 = A(x_0)$. Рассмотрим шар $B_{R/m}[y_0] \subset E_2$ и замкнутый шар $B_\varepsilon[0] \subset \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon = R\delta/m$.

В силу леммы 2.1 из [6] существует непрерывное отображение $q: E_2 \rightarrow E_1$, такое, что

(i) $A(q(y)) = y$ для любой точки $y \in E_2$;

(ii) $\|x_0 - q(y)\| \leq (m - \delta)\|A(x_0) - y\|$ для любой точки $y \in E_2$.

Рассмотрим отображение $\hat{q}: B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0] \rightarrow E_1$, определенное условием

$$\hat{q}(y, u) = q(y) + \sum_{i=1}^n \xi_i e_i.$$

Нетрудно убедиться, что $\hat{q}(B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]) \subset P_m$.

Тогда на множестве $B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]$ определено отображение $g = f \circ \hat{q}$. Заметим, что для любой точки $(y, u) \in B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]$ справедливо неравенство $\|y_0 - g(y, u)\| < R/m$, так как $\hat{q}(y, u) \in P_m$.

Отображение f на множестве P_m является (A, ψ) -уплотняющим; значит, отображение $g_u = g(\cdot, u): B_{R/m}[y_0] \rightarrow E_2$ в силу леммы 2 является уплотняющим. Таким образом, выполнены все условия леммы 1; следовательно, $N(g, B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]) \neq \emptyset$ и $\dim(N(g, B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0])) \geq n$.

Очевидно, что если точка $(y_*, \sum_{i=1}^n \xi_i^* e_i)$ лежит в $N(g, B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0])$, то $\hat{q}(y_*, \sum_{i=1}^n \xi_i^* e_i) \in \mathfrak{N}(A, f, P_m)$. Так как $\hat{q}: N(g, B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]) \rightarrow \mathfrak{N}(A, f, P_m)$ переводит различные точки в различные, то оно является гомеоморфизмом на свою область значений. Следовательно, в силу монотонности размерности $\dim$ имеет место неравенство

$$\dim(\mathfrak{N}(A, f, P_m)) \geq \dim(\hat{q}(N(g, B_{R/m}[y_0] \times B_\varepsilon[0]))) \geq n.$$

Так как число n было выбрано произвольно, то это и доказывает теорему.

Рассмотрим следствие из теоремы 1. Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства и оператор $B: D(B) \subset E_1 \rightarrow E_3$ является l -подчиненным оператору A . Пусть $\varphi: E_1 \times E_3 \rightarrow E_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $(\varphi 1)$ и $(\varphi 2)$ из разд. 1.

Пусть $f: D(A) \rightarrow E_2$, $f(x) = \varphi(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ . Рассмотрим уравнение $A(x) = \varphi(x, B(x))$.

Теорема 2. Пусть существуют такие константы $\gamma \geq 0$ и $\beta \geq 0$, что для любых точек $x, y \in E$

$$\|\varphi(x, y)\| \leq \gamma(\|x\| + \|y\|) + \beta \quad \text{и} \quad \gamma(1 + \|A^{-1}\|) < 1.$$

Если $\dim(\text{Ker}(A)) \geq n$, то $\mathfrak{N}(A, f) \neq \emptyset$ и $\dim(\mathfrak{N}(A, f)) \geq n$.

3. О глобальных решениях уравнений нейтрального типа. Пусть $\lambda, \mu: [0, \tau] \rightarrow [0, \tau]$ — непрерывные функции, а отображение $g: [0, \tau] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

(g1) g непрерывно по совокупности переменных;

(g2) g является k -сжимающим по третьему переменному.

Пусть $C_{[0, \tau]}$ — пространство непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}^n$. Будем считать пространство $\mathbb{R}^n$ стандартно вложенным в пространство $C_{[0, \tau]}$, т. е. точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t) = x_0$.

Пусть непрерывный оператор $L: C_{[0, \tau]} \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $m \leq n$, удовлетворяет следующему условию:

(L1) сужение $L|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \subset C_{[a, b]} \rightarrow \mathbb{R}^m$ является сюръективным оператором.

Рассмотрим задачу

$$x'(t) = g(t, x(\lambda(t)), x'(\mu(t))), \quad (4)$$

$$L(x) = u_0, \quad (5)$$

где u_0 — некоторая точка из пространства $\mathbb{R}^m$.

Решением задачи (4), (5) будем называть непрерывно дифференцируемую функцию x_* , которая в каждой точке $t \in [0, \tau]$ этого промежутка удовлетворяет уравнению (4) и для которой выполнено условие (5). Множество решений задачи (4), (5) обозначим через $\Sigma([0, \tau], L)$.

Дадим операторную трактовку этой задачи. Пусть $D(M)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций и оператор $M: D(M) \subset C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]} \times \mathbb{R}^m$ определен условием $M(x)(t) = (x'(t), L(x))$. Очевидно, что M замкнут, сюръективен и $\dim(\text{Ker}(M)) = n - m$.

Пусть отображение $\phi: C_{[0, \tau]} \times C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]} \times \mathbb{R}^m$ определено условием $\phi(x, y)(t) = (g(t, x(t), y(t)), u_0)$.

Лемма 3. При сделанных предположениях отображение ϕ является непрерывным и

- (i) $\|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$ для любой точки $x \in C_{[0, \tau]}$ и любых $y_1, y_2 \in C_{[0, \tau]}$;
- (ii) для любого $y \in C_{[0, \tau]}$ отображение $\phi(\cdot, y) : C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]}$ является M -вполне непрерывным.

Пусть оператор $K : C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]}$ определен условием $K(x)(t) = x(\lambda(t))$. Рассмотрим также оператор $B : D(M) \rightarrow C_{[0, \tau]}$, определенный условием $B(x)(t) = x'(\mu(t))$.

Лемма 4. Оператор B является подчиненным оператору M .

Пусть отображение $\varphi(x, y) : C_{[0, \tau]} \times C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]} \times \mathbb{R}^m$ определено условием $\varphi(x, y) = (\phi(K(x), y); u_0)$.

Лемма 5. При любом фиксированном y отображение $\varphi_y = \varphi(\cdot, y) : C_{[0, \tau]} \rightarrow C_{[0, \tau]} \times \mathbb{R}^m$ является M -вполне непрерывным отображением.

Очевидно, что задача (4), (5) эквивалентна уравнению $M(x) = \varphi(x, B(x))$.

Теорема 3. Пусть существуют такие константы $p > 0$ и $s \geq 0$, что для любых $x, y \in C_{[0, \tau]}$ и любого $t \in [0, \tau]$

$$\|g(t, x(t), y(t))\| \leq p(\|x(t)\| + \|y(t)\|) + s. \quad (6)$$

Если $p(\|M^{-1}\| + 1) < 1$, то задача (4), (5) имеет решение и $\dim(\Sigma([0, \tau], L)) \geq n - m$.

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 2.

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$x'_1(t) = \frac{x_2(t)}{2(1 + x_2^2(t))} (x'_1(|\sin(10t)|) + x'_2(|\sin(10t)|)), \quad (7)$$

$$x'_2(t) = \frac{x_1(t)}{2(1 + x_1^2(t))} (x'_1(|\sin(10t)|) + x'_2(|\sin(10t)|)), \quad (8)$$

$$\int_0^1 x_1(t) dt + \int_0^1 x_2(t) dt = u_0. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что отображение g , определяемое правой частью этой системы, удовлетворяет условиям (g1), (g2) и условию (6) с константой $p = 1/4$.

Рассмотрим оператор $L(x) = \int_0^1 x_1(t) dt + \int_0^1 x_2(t) dt$. Очевидно, что он является непрерывным. Рассматривая оператор $M(x) = (x'(t), L(x))$ и применяя к нему предложение 1 и результат, изложенный в примере 1, получим, что $\|M^{-1}\| \leq 1$. Тогда для изучения задачи (7)–(9) можно применить теорему 3 и получить следующий результат.

Теорема 4. Задача (7)–(9) имеет решение и $\dim(\Sigma([0, 1], L)) \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Д. Гельман, С. Н. Калабухова, Glob. Stoch. Analysis, **2**:1 (2012), 1–16.
 [2] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др., Меры некомпактности и уплотняющие отображения, Наука, Новосибирск, 1986. [3] Б. Д. Гельман, Матем. сб., **188**:12 (1997), 33–56. [4] Б. Д. Гельман, Функциональный анализ и его прил., **38**:4 (2004), 1–5. [5] Б. Д. Гельман, Вестник ВГУ, серия физ. матем., 2009, № 1, 74–86. [6] Б. Д. Гельман, Функциональный анализ и его прил., **46**:1 (2012), 79–83.