Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Трейбич, Системы полиномиальных уравнений, задающие гиперэллиптические d -оскулирующие накрытия, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 1, 49–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:29:23

Системы полиномиальных уравнений, задающие гиперэллиптические d -оскулирующие накрытия

© 2015. А. ТРЕЙБИЧ

Пусть X — фиксированная гладкая проективная кривая рода 1, определенная над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ произвольной характеристики $p \neq 2$. Для любого натурального n мы рассматриваем пространство модулей $H(X, n)$ конечных отдельных накрытий степени n кривой X гиперэллиптической кривой с отмеченной тройкой точек Вейерштрасса. Мы параметризуем пространство $H(X, n)$ подходящим пространством рациональных функций и используем такую параметризацию для изучения (конечных) подмножеств *гиперэллиптических касательных накрытий* степени n кривой X . Мы находим полиномиальную характеристику соответствующих рациональных функций и выводим квадратную систему полиномиальных уравнений, решения которой параметризуют эти накрытия. Мы также получаем неквадратные системы полиномиальных уравнений, решения которых параметризуют *гиперэллиптические d -оскулирующие накрытия* для любого $d > 1$.

§1. Введение

Пусть $\mathbb{P}^1 := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ и X — проективная прямая и фиксированная гладкая проективная кривая рода 1, определенные над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ произвольной характеристики $p \neq 2$. Фиксируем также проекцию $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 2 с точками ветвления $\{\infty, 0, 1, \lambda\}$.

Выберем $\omega_0 := \varphi_X^{-1}(\infty)$ в качестве нулевой точки. Пусть $[-1]: X \rightarrow X$ обозначает соответствующее отображение обращения, сохраняющее четыре полупериода $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) := \varphi_X^{-1}((\infty, 0, 1, \lambda))$. Мы будем рассматривать все конечные отделимые морфизмы $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ с тремя отмеченными точками, называемые далее *гиперэллиптическими накрытиями*, для которых $\pi(p) = \omega_0$ и которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:

(1) Γ является гиперэллиптической кривой (ср. определение 2.1(1)), и гиперэллиптическая инволюция $\tau_\Gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ сохраняет $\{p, p', p''\}$;

(2) существует единственная проекция $\varphi_\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 2, разветвленная в $\{p, p', p''\}$ и такая, что $\varphi_\Gamma((p, p', p'')) = (\infty, 0, 1)$.

Мы строим взаимно однозначное соответствие между $H(X, n)$ — пространством модулей *гиперэллиптических накрытий* степени n — и семейством рациональных функций степени n . Ниже приведена схема построения.

Для любого заданного *гиперэллиптического* накрытия $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ мы сначала доказываем равенство $[-1] \circ \pi = \pi \circ \tau_\Gamma$, из которого следует, что π может быть опущено до отмеченной проекции $R: (\mathbb{P}^1, \infty) \rightarrow (\mathbb{P}^1, \infty)$, имеющей нечетные индексы ветвления в $\{\infty, 0, 1\}$ и вписывающейся в следующую коммутативную диаграмму:

где X_R — расслоенное произведение проекций $R: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, а $j: \Gamma \rightarrow X_R$ — его разрешение.

Обратно, рассмотрим рациональную функцию $R := P/Q$, такую, что

- (1) P и Q взаимно просты и разность $\deg P - \deg Q > 0$ нечетна;
- (2) R имеет нечетный индекс ветвления в $\{0, 1\}$ и $R(0), R(1) \in \{\infty, 0, 1, \lambda\}$.

Последнее свойство эквивалентно следующему:

- (2') произведение $PQ(P-Q)(P-\lambda Q)$ имеет нули нечетного порядка в $\{0, 1\}$.

Далее пусть X_R обозначает расслоенное произведение проекций $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $R: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $j: \Gamma \rightarrow X_R$ — его разрешение и $(p, p', p'') := \varphi_\Gamma^{-1}((\infty, 0, 1))$. Кривая Γ естественным образом снабжена отмеченной проекцией $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ (вписывающейся в коммутативную диаграмму, приведенную выше), которая является *гиперэллиптическим накрытием* (предложение 3.1).

Подобная диаграмма уже появлялась в [10] для случая рода 2, и соответствующий морфизм $R: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ был назван *накрытием Фрея–Кани* (см. также [7]–[9]). Недавно В. З. Энольский любезно обратил наше внимание на то, что А. Б. Богатырев также рассматривал соответствие между классом разветвленных накрытий эллиптической кривой и подходящими рациональными функциями [2].¹⁾ Наш же подход вдохновлен более ранними работами Ланге (Н. Lange), как показано в [1].

Далее мы занимаемся естественной стратификацией, нестрого определенной ниже.

По *гиперэллиптическому накрытию* $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ рода g мы получаем, с одной стороны, каноническое абелево вложение кривой Γ в ее *якобиан* $A_p: \Gamma \rightarrow \text{Яс } \Gamma$ и флаг $\{0\} \subsetneq V_{\Gamma, p}^1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{\Gamma, p}^g = H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$ гипероскулирующих с $A_p(\Gamma)$ в $A_p(p) \in \text{Яс } \Gamma$ пространств (ср. [12]). С другой стороны, мы также получаем гомоморфизм $\iota_\pi: X \rightarrow \text{Яс } \Gamma$, двойственный к π : для любого $\omega \in X$ $\iota_\pi(\omega)$ является классом линейного расслоения $\mathcal{O}_\Gamma(\pi^*(\omega - \omega_0))$.

Определение 1.1. Для любого гиперэллиптического накрытия $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ существует наименьшее натуральное d , для которого касательная прямая к $\iota_\pi(X)$ содержится в d -мерном гипероскулирующем пространстве $V_{\Gamma, p}^d$. Мы называем его *порядком оскулирования накрытия* π , а π — *гиперэллиптическим d -оскулирующим накрытием* (см. [12]).

Например, случай $d = 1$ возникает, когда образы кривых X и Γ касаются друг друга в их общей точке. В этом случае накрытия, также называемые *гиперэллиптическими касательными накрытиями*, хорошо изучены и составляют конечное подмножество в $H(X, n)$ (см., например, [11], [14] и все ссылки

¹⁾Первый документированный подход к этой проблеме возник в работе А. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunctionen, Leipzig, 1903, ch. 10*, как любезно указал рецензент.

в обеих статьях). Следует также отметить, что множество *гиперэллиптических касательных накрытий* фиксированного рода g , но произвольной степени заполняет плотное подмножество в H_g , пространстве модулей гладких гиперэллиптических кривых рода g (ср. [4]).

Для дальнейшего нам потребуется ввести дополнительные численные инварианты. Помимо точки ветвления p *гиперэллиптического накрытия* π (его индекс ветвления в этой точке мы обозначим через ρ ; он должен быть нечетным) мы также рассмотрим $2g + 1$ других точек (так называемых точек Вейерштрасса), сохраняемых гиперэллиптической инволюцией τ_π . Их распределение по слоям над полупериодами пары (X, ω_0) , называемое *типом Вейерштрасса* накрытия π , задается набором чисел $(m_i) \in \mathbb{N}^4$, удовлетворяющих равенствам $m_0 + 1 \equiv m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv n \pmod{2}$ и $\sum_i m_i = 2g + 1$. Все эти инварианты связаны следующим образом (ср. следствие 2.3 и определение 4.1, а также [13, 4.3, 4.4]):

$$\rho < 2d + 1 \leq 2g + 1 \leq 4n - \rho, \quad \sum_{i=0}^3 m_i^2 \leq 2(2d - 1)(n - 1) + 4 - \rho^2,$$

а если $p > 2$, то

$$2g + 1 \leq p(2d - 1).$$

По заданным $n, d, g, \rho \in \mathbb{N}^*$ и $(m_i) \in \mathbb{N}^4$, определенным выше, строится подпространство модулей $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n) \subset H(X, n)$. Все вместе они задают стратификацию $H(X, n) = \bigcup_{(m_i)} \bigcup_{d, \rho} H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$.

Описав пространство $H(X, n)$ в терминах подходящих рациональных функций (следствие 3.2), мы получаем полиномиальную характеристику каждой страты $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$ (теорема 4.6). Мы непосредственно выводим систему N полиномиальных уравнений от $N + (2d - 1 - \rho)/2$ переменных ($N := (5n + 4 + m_1)/2$), решения которой параметризуют пространство $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$.

Это согласуется с уже известными результатами, например с тем, что страта $H_{(m_i)}^1 Os^1(X, n)$ конечна [14] и что для любого $1 < d \leq g$ все известные неприводимые компоненты страты $H_{(m_i)}^1 Os^d(X, n)$ имеют размерность $d - 1$ (ср. [12]).

Наконец, мы проверили с помощью системы компьютерной алгебры Maple наш подход в случае пространств $H_{(2,1,1,1)}^1 Os^1(X, 3)$ и $H_{(1,2,2,2)}^1 Os^1(X, 6)$ над любым полем $\mathbb{K}$ характеристики $p \neq 2, 3$ (предложения А.1 и А.2). Мы проверили, что оба пространства содержат единственный элемент (в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ это уже было известно). В приложении мы также даем дополнительные исторические справки и мотивировку этих результатов.

§2. Общие свойства гиперэллиптических накрытий

Пусть $\mathbb{P}^1$ и X обозначают соответственно проективную прямую и фиксированную гладкую проективную кривую рода 1, определенные над $\mathbb{K}$. Если выбирать произвольную точку $\omega_0 \in X$ в качестве нулевой точки, то пара (X, ω_0) становится эллиптической кривой с отображением обращения $[-1]: X \rightarrow X$, сохраняющим ω_0 и еще три полупериода $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in X$.

Факторкривая изоморфна $\mathbb{P}^1$, а соответствующую проекцию степени 2, переводящую тройку $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ в $(\infty, 0, 1)$, мы обозначим через $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть $\lambda := \varphi_X(\omega_3) \neq \infty, 0, 1$ — образ оставшегося полупериода.

Проекцию φ_X принято представлять в аффинных координатах следующим образом.

Уравнение $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ определяет плоскую гладкую аффинную кубику, которая может быть компактифицирована в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ добавлением особой точки (∞, ∞) с одним касательным направлением. С точностью до разрешения точки (∞, ∞) получающаяся таким образом кривая изоморфна (X, ω_0) с отождествленными $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ и $((\infty, \infty), (0, 0), (1, 0))$, а φ_X представляется следующим образом:

$$\{(x, y) \in \mathbb{K}^2, y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \in \mathbb{K}^2 \mapsto x, \quad \omega_0 \mapsto \infty.$$

Определение 2.1. 1. Будем называть *гиперэллиптической* любую гладкую проективную кривую рода $g \geq 2$ с инволюцией $\tau_\Gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, такую, что факторкривая Γ/τ_Γ изоморфна $\mathbb{P}^1$. Соответствующая проекция $\varphi_\Gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma/\tau_\Gamma \approx \mathbb{P}^1$ степени 2 разветвлена в $2g+2$ неподвижных точках инволюции τ_Γ . Последние составляют подмножество $W_\Gamma \subset \Gamma$ так называемых *точек Вейерштрасса*.

2. Мы получаем аффинное уравнение (так называемое *уравнение Розенхайна*) для φ_Γ следующим образом: выбираем тройку точек Вейерштрасса (p, p', p'') и отождествляем Γ/τ_Γ с $\mathbb{P}^1$, проектируя (p, p', p'') в $(\infty, 0, 1)$. Уравнение $v^2 = t(t-1) \prod_j (t - \alpha_j)$, где α_j — проекции оставшихся $2g-3$ точек Вейерштрасса, определяет аффинную кривую, которая может быть компактифицирована в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ добавлением особой точки (∞, ∞) с одним касательным направлением. С точностью до разрешения точки (∞, ∞) получающаяся кривая изоморфна Γ с отождествленными (p, p', p'') и $((\infty, \infty), (0, 0), (1, 0))$, а φ_Γ представляется следующим образом:

$$\{(t, v) \in \mathbb{K}^2, v^2 = t(t-1) \prod_j (t - \alpha_j)\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (t, v) \mapsto t, \quad p \mapsto \infty.$$

3. Будем называть *гиперэллиптическим накрытием* любой конечный отдельный морфизм $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ с тремя отмеченными точками, такой, что Γ является гиперэллиптической кривой и $p, p', p'' \in W_\Gamma$. Для любого $n \geq 1$ через $H(X, n)$ обозначим пространство модулей гиперэллиптических накрытий кривой X степени n .

Предложение 2.2. Любое гиперэллиптическое накрытие $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ удовлетворяет равенству $[-1] \circ \pi = \pi \circ \tau_\Gamma$ и может быть опущено до единственного отдельного морфизма $R: \infty \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$, вписывающегося в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} p \in \Gamma & \xrightarrow{\tau_\Gamma} & p \in \Gamma & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & \infty \in \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow R \\ \omega_0 \in X & \xrightarrow{[-1]} & \omega_0 \in X & \xrightarrow{\varphi_X} & \infty \in \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что существует единственный изоморфизм между Γ/τ_Γ и $\mathbb{P}^1$, отображающий $\varphi_\Gamma((p, p', p''))$ в $(\infty, 0, 1)$. Напомним,

что для любой точки $\omega \in X$ обратный к ней относительно групповой структуры кривой (X, ω_0) элемент, обозначаемый через $[-1](\omega)$, является единственной точкой, для которой дивизоры $[-1](\omega) - \omega_0$ и $\omega_0 - \omega$ линейно эквивалентны. Напомним также, что для любой точки $r \in \Gamma$ дивизор $r + \tau_\Gamma(r)$ линейно эквивалентен $2p$. Значит, $\pi(r) + \pi(\tau_\Gamma(r))$ линейно эквивалентен $2\omega_0$, откуда следует, что $\pi(\tau_\Gamma(r)) = [-1](\pi(r))$ для всех $r \in \Gamma$, как и утверждалось. Из классических результатов следует, что π может быть опущен до канонического (отделимого) морфизма между факторами, определяя единственный морфизм $R: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Мы можем также построить $R(\alpha)$ для любого $\alpha \in \Gamma/\tau_\Gamma$ как $\varphi_X(\pi(\varphi_\Gamma^{-1}(\alpha)))$ (это единственная точка). $\square$

Следствие 2.3. *Путь $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ — гиперэллиптическое накрытие степени n рода g с индексом ветвления ρ в p . Пусть W_Γ — его множество точек Вейерштрасса, и для любого $i = 0, \dots, 3$ пусть $m_{\pi,i}$ обозначает количество точек Вейерштрасса, отличных от p , лежащих над полупериодом ω_i . Тогда*

- (1) π имеет нечетный индекс ветвления в каждой точке $w \in W_\Gamma$ (следовательно, ρ нечетно);
- (2) дивизор ветвления Ram_π является τ_Γ -инвариантным и имеет степень $2g - 2$;
- (3) $\pi(W_\Gamma) \subset \{\omega_i\}$ и $m_{\pi,0} + 1 \equiv m_{\pi,1} \equiv m_{\pi,2} \equiv m_{\pi,3} \equiv n \pmod{2}$;
- (4) род и степень накрытия π удовлетворяют соотношению $\rho < 2g + 1 = \sum_{i=0}^3 m_{\pi,i} \leq 4n - \rho$.

Доказательство. (1) Выберем локальные координаты λ и z в $r \in \Gamma$ и $\pi(r) \in X$ соответственно, такие, что $\tau_\Gamma^*(\lambda) = -\lambda$ и $[-1]^*(z) = -z$, и положим $s := \text{ind}_\pi(r)$. Тогда существует ненулевая константа c , для которой $\pi^*(z) = c\lambda^s(1 + O(\lambda))$. Применяя последние инволюции, удовлетворяющие равенству $\pi \circ \tau_\Gamma = [-1] \circ \pi$, получаем

$$c(-1)^s \lambda(1 + O(\lambda)) = \tau_\Gamma^* \circ \pi^*(z) = \pi^* \circ [-1]^*(z) = \pi^*(-z) = -c\lambda(1 + O(\lambda)).$$

Значит, $(-1)^s = -1$ и s нечетно.

(2) Его τ_Γ -инвариантность проистекает непосредственно из равенства $[-1] \circ \pi = \pi \circ \tau_\Gamma$.

(3) Для любой точки $r \in W_\Gamma$ дивизоры $2r$ и $2p$ линейно эквивалентны. Значит, $2\pi(r) - 2\omega_0$ линейно эквивалентен нулю. Поэтому $\pi(r) \in \{\omega_i, i = 0, \dots, 3\}$, как и утверждалось. Множество точек каждого слоя $\pi^{-1}(\omega_i)$ за исключением точек Вейерштрасса разбивается на пары, так как слой τ_Γ -инвариантен. Отсюда следует, что $n - m_{\pi,i} - \rho\delta_{i,0} \equiv n - m_{\pi,i} - \delta_{i,0} \equiv 0 \pmod{2}$.

(4) Напомним, что мощность множества W_Γ равна $2g + 2$, так что $\sum_i m_{\pi,i} = 2g + 1$. С другой стороны, известно, что $\rho - 1 \leq \deg(\text{Ram}_\pi) = 2g - 2 = -3 + \sum_{i=0}^3 m_{\pi,i}$, а также $m_{\pi,i} + \rho\delta_{i,0} \leq n$ для любого $i = 0, \dots, 3$. Поэтому $\rho \leq 2g - 1 \leq 4n - \rho$. $\square$

§3. Полиномиальный подход к гиперболическим накрытиям

Для заданной эллиптической кривой (X, ω_0) и накрытия степени 2 $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ в предложении 2.2 каждому накрытию $\pi \in H(X, n)$ сопоставлена рациональная функция $R = P/Q$.

Обратно, мы имеем следующий результат.

Предложение 3.1. *Для любого отделимого морфизма $R: \infty \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$ степени n с нечетными индексами ветвления в точках $(\infty, 0, 1)$, для которого $R(0), R(1) \in \{\infty, 0, 1, \lambda\}$, существует единственное накрытие $\pi \in H(X, n)$, такое, что $R \circ \varphi_\Gamma = \varphi_X \circ \pi$.*

Схема доказательства. Выбор проекции $R: \infty \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$, как выше, эквивалентен выбору рациональной функции $R(t) = P(t)/Q(t)$, такой, что разность $\deg P - \deg Q$ нечетна и положительна, а произведение $PQ(P-Q)(P-\lambda Q)$ имеет нули нечетного порядка в $\{0, 1\}$. Заменяя в уравнении $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ переменную x рациональной функцией $R(t)$, домножая его на $Q(t)^4$ и делая бирациональную замену переменных $w = yQ(t)^2$, получаем аффинное уравнение для расслоенного произведения проекций $R: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\varphi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, т. е. $w^2 = P(t)Q(t)(P(t) - Q(t))(P(t) - \lambda Q(t))$. Соответствующему пополнению в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, которое мы обозначим через Γ , отвечает накрытие степени 2 $\varphi_\Gamma: (t, w) \in \Gamma \mapsto t \in \mathbb{P}^1$, разветвленное в тройке точек $(p, p', p'') = ((\infty, \infty), (0, 0), (1, 0))$, а также проекция $\pi: (t, w) \in \Gamma \mapsto (x, y) = (R(t), w/Q(t)^2) \in X$. Соответствующая инволюция $\tau_\Gamma: (t, w) \mapsto (t, -w)$ сохраняет тройку (p, p', p'') точек с одним касательным направлением и $\varphi_\Gamma((p, p', p'')) = (\infty, 0, 1)$. Значит, с точностью до разрешения кривой Γ , мы получаем единственное гиперэллиптическое накрытие $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$, вписывающееся в такую же коммутативную диаграмму, как и выше, такое, что $\varphi_\Gamma((p, p', p'')) = (\infty, 0, 1)$. $\square$

Следствие 3.2. *Пространство модулей $H(X, n)$ канонически отождествляется с многообразием пар многочленов (P, Q) , удовлетворяющих следующему условию:*

- (1) P и Q взаимно просты, причем старший коэффициент многочлена Q равен единице;
- (2) $\deg P = n$ и разность $\deg P - \deg Q$ нечетна и положительна;
- (3) произведение $PQ(P-Q)(P-\lambda Q)$ имеет нули нечетного порядка в $\{0, 1\}$.

Замечание 3.3. 1. Для заданной пары (P, Q) произведение $P(t)Q(t)(P(t) - Q(t))(P(t) - \lambda Q(t))$ может быть единственным образом представлено в виде произведения $t(t-1)A(t)B(t)^2$, где старший коэффициент многочлена $B(t)$ равен единице, A имеет нечетную степень, а $t(t-1)A(t)$ не имеет кратных корней. Отсюда следует, что аффинная кривая $\{(t, v) \in \mathbb{K}^2, v^2 = t(t-1)A(t)\}$, пополненная, как в определении 2.1(2), и снабженная проекцией $(t, v) \mapsto (x, y) := (P(t)/Q(t), vB(t)/Q(t)^2)$, задает гладкое гиперэллиптическое накрытие кривой X , единственным образом отвечающее паре (P, Q) .

2. Согласно следствию 2.3, π имеет нечетный индекс ветвления в $2g+2$ точках Вейерштрасса, тогда как Ram_π имеет степень $2g-2$. Значит, должно быть по крайней мере $g+3$ точек с $\text{ind}_\pi = 1$. В частности, мы можем выбрать указанную выше тройку $(p, p', p'') \in W_\Gamma^3$ точек без ветвления или, эквивалентно, ограничиться парами многочленов (P, Q) , как выше, такими, что $\deg Q = n-1$, а 0 и 1 являются простыми корнями многочлена $P(t)Q(t)(P(t) - Q(t))(P(t) - \lambda Q(t))$.

Используя локально соответствующие уравнения, можно получить дивизор ветвления Ram_π из Ram_R , даже когда π и R имеют дикие ветвления. В частности, для любой точки $r \in \Gamma$ индексы $\text{ind}_\pi(r)$ и $\text{ind}_R(\varphi_\Gamma)$ связаны следующим образом.

Лемма 3.4. Пусть $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ — гиперэллиптическое накрытие, отвечающее проекции $R: \infty \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$, и $\varphi_\Gamma: p \in \Gamma \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$ — соответствующая проекция степени 2. Тогда для любой точки $\alpha \in \mathbb{P}^1$

(1) если $R(\alpha) \notin \{0, 1, \lambda, \infty\}$, то слой $\varphi_\Gamma^{-1}(\alpha)$ состоит из двух точек, скажем, $r \neq \tau_\Gamma(r) \in \Gamma$ и $\text{ind}_\pi(r) = \text{ind}_\pi(\tau_\Gamma(r)) = \text{ind}_R(\alpha)$;

(2) если $R(\alpha) \in \{0, 1, \lambda, \infty\}$ и $\text{ind}_R(\alpha)$ четен, то слой $\varphi_R^{-1}(\alpha)$ состоит из двух точек, скажем, $r \neq \tau_\Gamma(r) \in \Gamma$, и $\text{ind}_\pi(r) = \text{ind}_\pi(\tau_\Gamma(r)) = \frac{1}{2} \text{ind}_R(\alpha)$;

(3) если $R(\alpha) \in \{0, 1, \lambda, \infty\}$ и $\text{ind}_R(\alpha)$ нечетен, то существует единственная точка (точка Вейерштрасса) в $\varphi_R^{-1}(\alpha)$, скажем, $r = \tau_\Gamma(r) \in W_\Gamma$, и $\text{ind}_\pi(r) = \text{ind}_R(\alpha)$.

Определение 3.5. Для заданного $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ из $H(X, n)$ и $i = 0, \dots, 3$ пусть $m_{\pi,i}$ обозначает количество отличных от p точек Вейерштрасса, проектирующихся в ω_i . Мы будем называть набор $(m_{\pi,i})$ типом Вейерштрасса накрытия π .

Далее мы собираем основные соотношения между всеми данными, связанными с π (ср. с предложением 2.2 и следствием 2.3, а также [13, 4.3, 4.4])

Предложение 3.6. Пусть $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ — гиперэллиптическое накрытие степени n рода g с типом Вейерштрасса $(m_{\pi,i})$ и индексом ветвления ρ в p , и пусть $\pi(p) = \omega_0$.

Пусть $R = P/Q$ — соответствующая рациональная функция (предложение 3.1). Рассмотрим разложения

$$P = cA_1B_1^2, \quad Q = A_0B_0^2, \quad P - Q = cA_2B_2^2, \quad P - \lambda Q = cA_3B_3^2,$$

где $c \in \mathbb{K}^*$, для $i = 0, \dots, 3$ старшие коэффициенты многочленов A_i и B_i равны единице и A_i не имеют кратных корней. Тогда

(1) $\deg P = n$ и $\rho = \deg P - \deg Q$;

(2) $\Gamma \setminus \{p\}$ изоморфна аффинной кривой $\{(t, v) \in \mathbb{K}^2, v^2 = c^3 \prod_i A_i(t)\}$;

(3) вне $\{\pi^{-1}(\omega_0)\}$ проекция $\pi: \Gamma \rightarrow X$ изоморфна

$$(t, v) \mapsto (x, y) := \left(\frac{P(t)}{Q(t)}, v \frac{\prod_i B_i(t)}{Q(t)^2} \right);$$

(4) $(m_{\pi,i}) = (\deg A_i)$, так что $m_{\pi,i} + \delta_{0,i} \equiv n \pmod{2}$ для любого $i = 0, \dots, 3$;

(5) $2g + 1 = \sum_i \deg A_i = \sum_i m_i$ и $\sum_{i=0}^3 m_i^2 \leq 2(2d - 1)(n - 1) + 4 - \rho^2$.

§4. Гиперэллиптические накрытия и полиномиальные уравнения

Далее мы будем рассматривать лучшую стратификацию пространства $H(X, n)$, которую мы получим, зафиксировав индекс ветвления $\rho := \text{ind}_\pi(p)$, порядок оскулирования d , а также тип Вейерштрасса вместо рода g , и которая удовлетворяет подходящим соотношениям (ср. следствие 2.3 и определение 4.1, а также [13, 4.3, 4.4]).

Определение 4.1. Для любых $n, g, d, \rho \in \mathbb{N}^*$ и $(m_i) \in \mathbb{N}^4$, таких, что

(1) ρ нечетно и $\rho < 2d + 1 \leq 2g + 1 = \sum_{i=0}^3 m_i \leq 4n - \rho$,

(2) $m_0 + 1 \equiv m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv n \pmod{2}$,

(3) $\sum_{i=0}^3 m_i^2 \leq 2(2d - 1)(n - 1) + 4 - \rho^2$,

(4) $2g + 1 \leq p(2d - 1)$, если $p := \text{char}(\mathbb{K}) > 2$,

пусть $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n) \subset H_g^\rho Os^d(X, n)$ — подпространство модулей таких гиперэллиптических d -оскулирующих накрытий степени n и типа Вейерштрасса (m_i) , что $\sum_i m_i = 2g + 1$ и индекс ветвления в первой отмеченной точке равен ρ . Беря объединение по всем возможным родам g , индексам ρ и соответствующим типам Вейерштрасса, получаем следующую стратификацию:

$$\bigcup_{\rho, d} \bigcup_{(m_i)} H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n) = \bigcup_{\rho, d} \bigcup_g H_g^\rho Os^d(X, n) = H(X, n).$$

Выбрав $[-1]$ -антиинвариантную координату на X в ω_0 , скажем z , мы будем называть π *гиперэллиптическим d -оскулирующим накрытием*, если существует d -оскулирующая функция для π , т. е. τ_Γ -антиинвариантная проекция $\kappa: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ с полюсами только в $\pi^{-1}(\omega_0)$, такая, что $\kappa + 1/z$ голоморфна в $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$ и имеет полюс порядка $2d - 1$ в $p \in \Gamma$ [12].

Далее каждое накрытие $\pi \in H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$ будет снабжено рациональной функцией $R(t) := P(t)/Q(t)$, такой, что $\deg P - \deg Q = \rho$, и каноническими разложениями $P = cA_1B_1^2$, $Q = A_0B_0^2$, $P - Q = cA_2B_2^2$, $P - \lambda Q = cA_3B_3^2$ (ср. предложение 3.6). В частности, функция $v = yQ^2/(\prod_i B_i)$ имеет полюс порядка $2g + 1$ в p и простые нули в каждой точке Вейерштрасса. Также мы выберем $z := x/y = P/(yQ)$ в качестве локальной $[-1]$ -антиинвариантной координаты на X в нулевой точке ω_0 .

Следующими леммами мы прокладываем путь к *полиномиальной характеристике d -оскулирования*. Они будут инструментом параметризации каждой страты $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$ решениями системы полиномиальных уравнений.

Лемма 4.2. *Функция $\kappa_0 := v/(A_0B_0): \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ τ_Γ -антиинвариантна (т. е. $\kappa_0 \circ \tau_\Gamma = -\kappa_0$), голоморфна вне $\pi^{-1}(\omega_0)$ и имеет полюс того же порядка, что и $1/z = yQ/P$, в каждой точке из $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$.*

Доказательство. Нам достаточно проверить, что $\kappa_0 z$ голоморфна в $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$, а это следует из равенств

$$v = \frac{yQ^2}{\prod_i B_i} \quad \text{и} \quad \kappa_0 z = \frac{v}{A_0B_0} \frac{P}{yQ} = \frac{P}{B_1B_2B_3}. \quad \square$$

Лемма 4.3. *Любая τ_Γ -антиинвариантная мероморфная функция $\kappa: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$, голоморфная вне $\pi^{-1}(\omega_0)$ и с полюсом того же порядка, что и $1/z = yQ/P$, в каждой точке из $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$, равна $vM/(A_0B_0)$ для единственного многочлена $M(t)$.*

Доказательство. Функции κ и $v/(A_0B_0)$ имеют полюсы того же порядка, что и $1/z$, в каждой точке из $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$. Значит, их отношение там голоморфно. Вне $\pi^{-1}(\omega_0)$ они голоморфны и τ_Γ -антиинвариантны; поэтому они обращаются в нуль в каждой точке Вейерштрасса. С другой стороны, v имеет простой нуль в каждой точке Вейерштрасса, кроме p . Значит, их отношение $\kappa A_0B_0/v$ τ_Γ -инвариантно и может только иметь полюс в p .

Отсюда следует, что $\kappa A_0B_0/v$ — многочлен, скажем $M(t)$, как и утверждалось. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть $\kappa: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ τ_Γ -антиинвариантна и голоморфна вне $\pi^{-1}(\omega_0)$. Тогда $\kappa + 1/z$ имеет полюс порядка $2d - 1$ в $p \in \Gamma$ и не имеет других*

поллюсов в $\pi^{-1}(\omega_0)$, если и только если существует многочлен T , такой, что A_1B_1 делит $TA_0B_0 - B_2B_3$.

В последнем случае

$$\kappa + \frac{1}{z} = \frac{vT}{A_1B_1} \quad \text{и} \quad \deg T = \frac{1}{2}(n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2).$$

Доказательство. В случае, когда $\kappa + 1/z$ голоморфна в $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$, мероморфная функция κ удовлетворяет условиям леммы 4.3. В частности, $\kappa = vM/(A_0B_0)$ для некоторого многочлена M , откуда следует, что

$$\kappa + \frac{1}{z} = \frac{vM}{A_0B_0} + \frac{yQ}{P} = \frac{vM}{A_0B_0} + \frac{vB_2B_3}{A_0B_0A_1B_1} = \frac{v}{A_1B_1} \frac{MA_1B_1 + B_2B_3}{A_0B_0}.$$

Кроме того, чтобы $\kappa + 1/z$ была голоморфна в $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$ многочлен A_0B_0 должен делить $MA_1B_1 + B_2B_3$. Пусть T — их отношение. Тогда $MA_1B_1 = TA_0B_0 - B_2B_3$, а значит, A_1B_1 делит $TA_0B_0 - B_2B_3$ и $\kappa + 1/z = vT/(A_1B_1)$, как и утверждалось.

Более того, поскольку $\kappa + 1/z$ имеет полюс порядка $2d - 1$, многочлен T имеет степень $(n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)/2$.

Обратно, пусть T — такой многочлен и M удовлетворяет равенству $MA_1B_1 = TA_0B_0 - B_2B_3$. Тогда π -антиинвариантная функция $\kappa := vM/(A_0B_0)$ обладает требуемыми свойствами, т. е. $\kappa + 1/z = vT/(A_1B_1)$ имеет полюс порядка $2d - 1$ в p и голоморфна в любой другой точке из $\pi^{-1}(\omega_0)$. Другими словами, κ является d -оскулирующей функцией для π . $\square$

Теорема 4.5 (полиномиальный критерий d -оскулирования). *Гиперэллиптическое накрытие π степени n , соответствующее $s \in \mathbb{K}^*$ и множеству $\{A_i, B_i\}$ многочленов, указанному выше, имеет порядок оскулирования d , т. е. $\pi \in H_{(m_i)}^{\rho} \text{Os}^d(X, n)$, если и только если существуют многочлен T степени $(n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)/2$ и многочлен M , такие, что $TA_0B_0 - B_2B_3 = MA_1B_1$. В последнем случае d -оскулирующая функция равна $\kappa = vM/(A_0B_0)$.*

Доказательство. Согласно лемме 4.4, κ является d -оскулирующей функцией для $\pi \in H_{(m_i)}^{\rho} \text{Os}^d(X, n)$, если и только если существует многочлен T , удовлетворяющий перечисленным выше условиям. $\square$

Теорема 4.6. *Для любых $n, d, g, \rho \in \mathbb{N}^*$ и $(m_i) \in \mathbb{N}^4$ (см. определение 4.1) существует полиномиальная система из $N := (5n + 4 + m_1)/2$ уравнений на открытом плотном подмножестве из $\mathbb{K}^{N+(2d-1-\rho)/2}$, такая, что ее решения параметризуют страту $H_{(m_i)}^{\rho} \text{Os}^d(X, n)$.*

Доказательство. Рассмотрим $s \in \mathbb{K}^*$, две последовательности многочленов со старшими коэффициентами единица, (A_i) и (B_i) , такие, что $\deg A_i = m_i$ и $\deg B_i^2 = n - m_i - \rho\delta_{i,0}$ для любых $i = 0, \dots, 3$, а также многочлен T степени $\deg T = (n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)/2$. Эти данные зависят от

$$1 + \sum_i \deg(A_iB_i) + \deg T + 1 = \frac{1}{2}(5n + 4 + \deg A_1 + 2d - 1 - \rho)$$

переменных, и нам требуется, чтобы они удовлетворяли следующему набору из $2n + 2 + \deg(A_1 B_1) = (5n + 4 + m_1)/2$ уравнений:

$$cA_1 B_1^2 - A_0 B_0^2 = cA_2 B_2^2, \quad cA_1 B_1^2 - \lambda A_0 B_0^2 = cA_3 B_3^2, \\ t(t-1) \text{ делит } \prod_i A_i \text{ и } A_1 B_1 \text{ делит } T A_0 B_0 - B_2 B_3.$$

Пусть $P := cA_1 B_1^2$, $Q := A_0 B_0^2$. Наложим далее следующие «открытые» условия:

$$c \neq 0, \quad \text{disc}(\prod_i A_i) \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{resultant}(P, Q) \neq 0.$$

Вне $\pi^{-1}(\omega_0)$ гиперэллиптическое накрытие π степени n , отвечающее $R := P/Q$, изоморфно

$$(t, v) \in \{v^2 = c^3 \prod_i A_i\} \mapsto \left(R(t), \frac{v \prod_i B_i}{Q^2}\right) = (x, y) \in \{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\}.$$

Кроме того, пусть M — многочлен, удовлетворяющий равенству $MA_1 B_1 = TA_0 B_0 - B_2 B_3$. Тогда $\kappa := vM/(A_0 B_0)$ является гиперэллиптической d -оскулирующей функцией для π [12]. Другими словами, $\pi \in H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$. Обратно, пусть $\pi \in H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$. Рассмотрим связанную с этим накрытием рациональную функцию $R := P/Q$ с каноническими разложениями $P = cA_1 B_1^2$, $Q = A_0 B_0^2$, $P - Q = cA_2 B_2^2$ и $P - \lambda Q = cA_3 B_3^2$. Напомним, что $\prod_i A_i$ имеет простые корни и A_i и B_i для любых $i = 0, \dots, 3$ — многочлены с единичными старшими коэффициентами степеней m_i и $(n - m_i - \rho \delta_{i,0})/2$ соответственно. Ясно, что они удовлетворяют уравнениям

$$cA_1 B_1^2 - A_0 B_0^2 = cA_2 B_2^2, \quad cA_1 B_1^2 - \lambda A_0 B_0^2 = cA_3 B_3^2,$$

и

$$t(t-1) \text{ делит } \prod_i A_i.$$

Более того, существует многочлен T , такой, что

$$A_1 B_1 \text{ делит } T A_0 B_0 - B_2 B_3 \quad \text{и} \quad \deg T = (n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)/2,$$

откуда следует, что $\kappa := vT/(A_1 B_1) + yQ/P$ является d -оскулирующей функцией для π . Другими словами, любой класс эквивалентности $\pi \in H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$ соответствует единственному решению последней системы уравнений (и «открытым» условиям). $\square$

Приложение

Далее мы будем рассматривать произвольное алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ характеристики $p \neq 2, 3$ и отождествим эллиптическую кривую (X, ω_0) , определенную уравнением $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, с кривой $(\overline{X}, \overline{\omega}_0)$, определенной уравнением $\overline{y}^2 = 4 \prod_j (\overline{x} - e_j)$, при помощи изоморфизма

$$(x, y) \in X \setminus \{\omega_0\} \mapsto (\overline{x}, \overline{y}) := ((e_2 - e_1)x + e_1, 2(e_2 - e_1)^{3/2} \overline{y}) \in \overline{X} \setminus \{\overline{\omega}_0\}.$$

Пусть $g_2 := -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3)$, $g_3 := 4e_1 e_2 e_3$ и $J := g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2)$. Напомним, что две эллиптические кривые над $\mathbb{K}$ изоморфны, если и только если они соответствуют одному и тому же значению J . С другой стороны, если

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то существует решетка $\Lambda := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, для которой комплексный тор $(\mathbb{C}/\Lambda, 0)$ изоморфен $(\bar{X}, \bar{\omega}_0)$. Изоморфизм определен следующим образом:

$$z \in \mathbb{C}/\Lambda \setminus \{0\} \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) := (\wp(z), \wp'(z)) \in \bar{X} \setminus \{\bar{\omega}_0\},$$

где $\wp'$ — производная Λ -периодической мероморфной функции Вейерштрасса $\wp$. Последняя удовлетворяет дифференциальному уравнению $\wp'^2 = 4 \prod_{j=1}^3 (\wp - e_j)$ с $e_1 := \wp(1/2)$, $e_2 := \wp(\tau/2)$, $e_3 := \wp(1/2 + \tau/2)$ и $\sum_j e_j = 0$. В частности, $u(x) := 2\wp(x)$ является стационарным Λ -периодическим решением уравнения KdV.

В 1974 Б. А. Дубровин и С. П. Новиков нашли первый пример нестационарного Λ -периодического решения уравнения KdV (ср. [5]) вида $u(x, t) = \sum_{i=1}^3 2\wp(x - \alpha_i(t))$. Связанная с ним спектральная кривая может быть представлена как *гиперэллиптическое касательное накрытие* степени 3 рода 2, которое должно иметь тип Вейерштрасса $(2, 1, 1, 1)$ (ср. определение 1.1).

Следующее интересное Λ -периодическое решение уравнения KdV имеет шесть таких слагаемых и связано с *гиперэллиптическим касательным накрытием* рода 3 и типа Вейерштрасса $(1, 2, 2, 2)$.

Их классы эквивалентности как накрытий эллиптической кривой (X, ω_0) должны принадлежать пространствам $H^1_{(2,1,1,1)} \text{Os}^1(X, 3)$ и $H^1_{(1,2,2,2)} \text{Os}^1(X, 6)$ соответственно, на которых мы и проверим наш подход. Эти две гиперэллиптические кривые возникали в [3] вместе с длинным списком так называемых *кривых Кричевера*, данным А. О. Смирновым, и связаны с конечнозонными эллиптическими потенциалами Шрёдингера. Как таковые они были впервые найдены Ш. Эрмитом (ср. [6]).

Любая *кривая Кричевера* является *гиперэллиптическим касательным накрытием* (определение 1.1) и имеет спектральную координату κ , равную *1-оскулирующей функции* κ этого накрытия (определение 4.1). Последние представлены в [3, Table 1, p. 307] в других естественных координатах для степеней до 5, и это согласуется с формулой, полученной в теореме 4.5. Явное вычисление в случае $H^1_{(1,2,2,2)} \text{Os}^1(X, 6)$, не покрываемом работой [3], дано в настоящем приложении.¹⁾

Для каждого из рассматривавшихся выше пространств модулей мы решаем связанную с ним систему уравнений (см. теорему 4.6), находя единственное решение, для которого мы предъявляем соответствующий морфизм $R: t \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \wp = P(t)/Q(t) \in \mathbb{P}^1$, канонические разложения $Q = A_0 B_0^2$ и $P - e_j Q = c A_j B_j^2$ ($j = 1, 2, 3$), а также *1-оскулирующую функцию* κ .

Предложение А.1. $H^1_{(2,1,1,1)} \text{Os}^1(X, 3)$ либо пусто, если $g_2 = 0$ (т. е. $J = 0$), либо содержит единственное гиперэллиптическое накрытие $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$, связанное с $t \in \mathbb{P}^1 \mapsto P(t)/Q(t) := (t^3 + g_3)/(3t^2 - g_2) \in \mathbb{P}^1$ (предложение 3.1).

Доказательство. Решая соответствующую полиномиальную систему, можно получить канонические разложения $Q = A_0 B_0^2$ и $P - e_j Q = c A_j B_j^2$, где

$$c = 1/3, \quad 3A_0 = 3t^2 - g_2, \quad B_0 = 1,$$

¹⁾ Я благодарен рецензенту за ссылку [3] — фундаментальный обзор, излагающий основные направления, результаты и библиографию по вопросам взаимосвязи алгебраической геометрии и теории интегрируемых систем.

и

$$A_j = t + e_j, \quad B_j = t - 2e_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

В частности, $\Gamma \setminus \{p\}$ изоморфна $\{v^2 = \frac{1}{81}(3t^2 - g_2) \prod_{j=1}^3 (t + e_j)\}$, а следовательно, изоморфна кривой Дубровина и Новикова в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Более того, $3A_0B_0 = 3t^2 - g_2$, в то время, как $A_1B_1 = t^2 - e_1t - 2e_1^2$ и $B_2B_3 = t^2 + 2e_1t + 4e_2e_3$. Отсюда легко получить, что $3A_0B_0 = 2A_1B_1 + B_2B_3$. Поэтому по лемме 4.3 (с $M(t) = 2$) $\kappa := 6v/(3t^2 - g_2)$ является 1-оскулирующей функцией, и $\pi \in H_{(2,1,1,1)}^1 \text{Os}^1(X, 3)$, как и утверждалось. $\square$

Предложение А.2. $H_{(1,2,2,2)}^1 \text{Os}^1(X, 6)$ либо пусто (если $5g_2^3 = 27g_3^2$, т.е. $J = -1/4$), либо содержит единственную гиперэллиптическую кривую $\pi: (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$, связанную с $t \in \mathbb{P}^1 \mapsto P(t)/Q(t) \in \mathbb{P}^1$ и заданную ниже.

Доказательство. Проще представить решение соответствующей полиномиальной системы уравнений, когда $g_2 = 0$ или $g_3 = 0$ (т.е. когда $J = 0$ или $J = 1$). Если $g_3 = 0$, то $\wp'^2 = 4\wp(\wp^2 - 1)$ и мы получаем следующие канонические разложения:

$$P = cA_1B_1^2, \quad Q = A_0B_0^2, \quad P - Q = cA_2B_2^2, \quad P + Q = cA_3B_3^2,$$

где

$$c = 1/36, \quad A_0 = t, \quad B_0 = t^2 - 75, \quad A_1 = t^2 - 60, \quad B_1 = t^2 + 75$$

и

$$A_2 = t^2 - 6t - 15, \quad B_2 = t^2 - 15t - 150, \quad A_3 = t^2 + 6t - 15, \quad B_3 = t^2 + 15t - 150.$$

Значит, $\Gamma \setminus \{p\}$ изоморфна $\{v^2 = \frac{1}{6^6}t(t^2 - 60)(t^2 - 6t - 15)(t^2 + 6t - 15)\}$. Более того, $6tA_0B_0 - B_2B_3 = 5A_1B_1$, откуда следует, что $\kappa := 5v/(t^3 - 75t)$ является 1-оскулирующей функцией и $\pi \in H_{(1,2,2,2)}^1 \text{Os}^1(X, 6)$, как и утверждалось.

Наконец, если $g_2 = 0$, то $\wp'^2 = 4 \prod_j (\wp - \alpha^j)$, где $\alpha \neq 1$ — кубический корень из единицы. Получаем следующие канонические разложения:

$$P = \frac{1}{36}(t^6 + 2.15^3t^3 + 3.15^5), \quad Q = t^3,$$

$$A_j = t^2 - 6\alpha^j t + 45\alpha^{2j}, \quad B_j = t^2 - 15\alpha^j - 225\alpha^{2j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

В частности, $\Gamma \setminus \{p\}$ изоморфна аффинной гиперэллиптической кривой

$$\{v^2 = \frac{1}{6^6}t(t^2 - 6\alpha t + 45\alpha^2)(t^2 - 6\alpha^2 t + 45\alpha)(t^2 - 6t + 45)\}.$$

Более того, $6tA_0B_0 - B_2B_3 = 5A_1B_1$, а значит, $\kappa := 5v/t^3$ является 1-оскулирующей функцией и $\pi \in H_{(1,2,2,2)}^1 \text{Os}^1(X, 6)$, как и утверждалось. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Accola, E. Previato, *Covers of tori: genus 2*, Lett. Math. Phys., **76**:2–3 (2006), 135–161.
- [2] А. Б. Богатырев, *Чебышёвское представление рациональных функций*, Матем. сб., **201**:11 (2010), 19–40.
- [3] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii, *Reduction of Abelian functions and algebraically integrable systems, Part II*, J. Math. Sci., **108**:3 (2002), 295–374.
- [4] E. Colombo, G. P. Pirola, E. Previato, *Density of elliptic solitons*, J. Reine Angew. Math., **451** (1994), 161–169.

- [5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией*, Докл. АН СССР, **219**:3 (1974), 531–534.
- [6] Ch. Hermite, *Oeuvres*, V. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- [7] E. Kani, *The number of curves of genus 2 with elliptic differentials*, J. Reine Angew. Math., **485** (1997), 93–121.
- [8] E. Kani, *Hurwitz spaces of genus 2 covers of an elliptic curve*, Collect. Math., **54**:1 (2003), 1–51.
- [9] E. Kani, *The number of genus-2 covers of an elliptic curve*, Manuscripta Math., **121**:1 (2006), 51–80.
- [10] T. Shaska, *Curves of genus 2 with (N, N) decomposable Jacobians*, J. Symbolic Comput., **31**:5 (2001), 603–617.
- [11] А. Трейбич, *Гиперэллиптические касательные накрытия и конечнозонные потенциалы*, УМН, **56**:6 (2001), 89–136.
- [12] A. Treibich, *Revêtements hyperelliptiques d -osculateurs et solitons elliptiques de la hiérarchie KdV*, C. R. Acad. Sci., Paris, Série I Math., **345**:4 (2007), 213–218.
- [13] A. Treibich, *Hyperelliptic d -osculating covers and rational surfaces*, <http://premat.fing.edu.uy/papers/2012/144.pdf>.
- [14] A. Treibich, J.-L. Verdier, *Solitons elliptiques*, in: Progress in Math., vol. 88, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 437–479.

Université d'Artois, Laboratoire de Mathématique de Lens
Universidad de la República del Uruguay, Regional Norte
e-mail: treibich@cmat.edu.uy

Поступила в редакцию
26 октября 2012 г.