Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, И. Д. Шкредов, Количественный вариант теоремы Берлинга–Хелсона, *Функци. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 39–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:20:40

Количественный вариант теоремы Берлинга–Хелсона*

© 2015. С. В. Конягин, И. Д. Шкредов

Доказано, что произвольная непрерывная функция φ , заданная на единичной окружности и такая, что последовательность $\{e^{in\varphi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ имеет малую винеровскую норму $\|e^{in\varphi}\| = o(\log^{1/22} |n| (\log \log |n|)^{-3/11})$, $|n| \rightarrow \infty$, является линейной. Кроме того, мы получаем оценки снизу винеровской нормы характеристических функций подмножеств группы $\mathbb{Z}_p$ при простом p .

§1. Введение

Пусть $A(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных комплексных функций f на единичной окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, таких, что ряд из коэффициентов Фурье функции f абсолютно сходится. Снабженное нормой

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|$$

пространство $A(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй с обычным поточечным умножением функций. Здесь

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть φ — непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя, т. е. непрерывная функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\varphi(t + 2\pi) \equiv \varphi(t) \pmod{2\pi}$. Известная теорема Берлинга–Хелсона [1] утверждает, что если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то отображение φ линейно. Иными словами, в этом случае $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Данная теорема дает решение проблемы П. Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$: все эти эндоморфизмы тривиальны, т. е. имеют вид $f(t) \rightarrow f(\nu t + t_0)$. В связи с этим Кахан ([4], [5]) выдвинул гипотезу, что уже из условия $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log |n|)$, $|n| \rightarrow \infty$, следует, что φ линейно. Сам Кахан показал в [5], что для любого непрерывного кусочно-линейного, но не линейного отображения $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ выполнено $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \asymp \log |n|$, $|n| \rightarrow \infty$. Поэтому, если гипотеза верна, то она дает неулучшаемый результат. В работе [9] (см. также [7], [8]) Лебедев получил первый количественный вариант теоремы Берлинга–Хелсона.

Теорема 1 [9]. Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Предположим, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\left(\frac{\log \log |n|}{(\log \log \log |n|)}\right)^{1/12}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \rightarrow \infty. \quad (1)$$

*Первый автор поддержан грантом РФФИ 14-01-00332 и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-3082.2014.1. Второй автор поддержан грантом РФФИ-мол_а_вед 12-01-33080.

Тогда $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Z}$.

Настоящая статья посвящена доказательству следующего результата.

Теорема 2. Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Предположим, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\frac{\log^{1/22}|n|}{(\log \log |n|)^{3/11}}\right), \quad n \in \mathbb{Z}, |n| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Тогда $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$ для некоторого $\nu \in \mathbb{Z}$.

Наше доказательство развивает подход из [9]. Основное улучшение достигается за счет использования обобщения понятия аддитивной размерности (§2). Это позволяет после дискретизации задачи рассматривать значение функции не во всех точках сетки, а на небольшом ее подмножестве. Кроме того, мы немного выигрываем, используя результаты Сандерса [12] для оценки снизу винеровской нормы характеристических функций больших подмножеств группы $\mathbb{Z}_p$ (§3) при простом p . Попутно мы получаем оценку снизу винеровской нормы характеристических функций малых подмножеств группы $\mathbb{Z}_p$ с неулучшаемой зависимостью от размера множества.

§2. Диссоциативные множества и их обобщения

Пусть G — компактная абелева группа и $\hat{G}$ — сопряженная группа, т. е. дискретная абелева группа непрерывных гомоморфизмов $\gamma: G \rightarrow \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. На G определена мера Хаара μ_G . Мы предполагаем, что мера μ_G нормализована так, что $\mu_G(G) = 1$. Определим преобразование Фурье, сопоставляющее каждой функции $f \in L^1(G)$, т. е. каждой интегрируемой на G комплекснозначной функции, функцию $\hat{f} \in l^\infty(\hat{G})$,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{x \in G} f(x) \overline{\gamma(x)} d\mu_G(X).$$

Хорошо известно, что для любых функций $f, g \in L^1(G)$ справедливо соотношение

$$\int_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} d\mu_G(X) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{g}(\gamma)}. \quad (3)$$

Положим

$$A(G) = \{f \in L^1(G) : \|\hat{f}\|_1 < \infty\},$$

где $\|\hat{f}\|_1 = \sum_{\gamma} |\hat{f}(\gamma)|$, и определим норму на $A(G)$ равенством $\|f\|_{A(G)} = \|\hat{f}\|_1$. Отметим, что любая функция $f \in A(G)$ непрерывна на G .

Через χ_S , $S \subset G$, мы обозначаем характеристическую функцию множества S .

Основным объектом нашего рассмотрения является группа $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p — простое число.

Для функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ определим величину

$$\mathbf{T}_k(f) := \sum_{x_1 + \dots + x_k = x'_1 + \dots + x'_k} f(x_1) \cdots f(x_k) \overline{f(x'_1)} \cdots \overline{f(x'_k)}.$$

Если группа G конечна, то

$$\mathbf{T}_k(f) = |G|^{2k-1} \sum_{\gamma} |\hat{f}(\gamma)|^{2k}.$$

Основная идея доказательства нашей основной теоремы может быть наглядно продемонстрирована аргументами, позволяющими получить следующий результат, связывающий винеровскую норму характеристической функции множества и его аддитивную размерность.

Напомним, что множество $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{|\Lambda|}\}$ называется *диссоциативным*, если из любого равенства вида

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_{\lambda} \lambda = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{\lambda} \in \{-1, 0, 1\}$, вытекает, что все ε_{λ} равны нулю. Хорошо известно (см., например, [11]), что $\mathbf{T}_k(\Lambda) \leq (Ck)^k |\Lambda|^k$, $k \geq 2$, где $C > 0$ — абсолютная константа. Размер максимального диссоциативного подмножества множества $S \subseteq G$ называется *аддитивной размерностью* множества S и обозначается через $\dim(S)$.

Теорема 3. Пусть G — конечная абелева группа, $S \subseteq G$ — произвольное множество, $\|\chi_S\|_{A(G)} \leq K$ и $K^2 \leq |S|$. Тогда $\dim(S) \ll K^2(1 + \log(|S|/K^2))$.

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. Пусть G — конечная абелева группа, f — определенная на G комплекснозначная функция, $\|f\|_{A(G)} \leq K$, $Q \subset S \subset G$, $|f(x)| = 1$ при $x \in S$, $f(x) = 0$ при $x \in G \setminus S$, $g(x) = \chi_Q(x)f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathbf{T}_k(g) \geq \frac{|Q|^{2k}}{|S|K^{2k-2}}.$$

Доказательство. В силу равенства (3), неравенства Гёльдера и условия $\|S\|_{A(G)} \leq K$

$$\begin{aligned} |Q|^{2k} &= \left(\sum_x g(x) \overline{f(x)} \right)^{2k} \leq \left(|G| \sum_{\gamma} |\hat{g}(\gamma)| |\hat{f}(\gamma)| \right)^{2k} \\ &\leq |G|^{2k} \sum_{\gamma} |\hat{g}(\gamma)|^{2k} \left(\sum_{\gamma} |\hat{f}(\gamma)|^{2k/(2k-1)} \right)^{2k-1} \\ &\leq |G| \mathbf{T}_k(g) \left(\sum_{\gamma} |\hat{f}(\gamma)| \right)^{2k-2} \sum_{\gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leq \mathbf{T}_k(g) K^{2k-2} |S|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 3. Мы полагаем $f = \chi_S$. Взяв в качестве Q максимальное диссоциативное множество $\Lambda \subseteq S$, получаем из леммы 4 и неравенства Рудина

$$(Ck)^k |\Lambda|^k \geq \frac{|\Lambda|^{2k}}{|S|K^{2k-2}},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Выбирая теперь параметр k равным $2 + \lceil \log(|S|/K^2) \rceil$, находим, что $|\Lambda| \ll K^2(1 + \log(|S|/K^2))$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 5. Если $S \subseteq G$ — произвольное множество, то из равенства Парсеваля вытекает, что $\|S\|_{A(G)} \leq |S|^{1/2}$. Поэтому ограничение $K^2 \leq |S|$ в условии теоремы 3 является необременительным. Заметим также, что первый множитель K^2 в оценке размерности множества S , вообще говоря, нельзя заменить на $K^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Действительно, достаточно, например, взять в качестве S случайное множество.

В статье [13] рассматривался другой вариант определения диссоциативных множеств, немного отличающийся от классического (4).

Определение 6. Пусть k, s — натуральные числа. Будем говорить, что множество $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{|\Lambda|}\} \subset \mathbb{Z}_N$ принадлежит семейству $\Lambda(k, s)$, если из равенства

$$\sum_{i=1}^{|\Lambda|} s_i \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \in \Lambda, \quad s_i \in \mathbb{Z}, \quad |s_i| \leq s, \quad \sum_{i=1}^{|\Lambda|} |s_i| \leq 2k, \quad (5)$$

вытекает, что все s_i равны нулю.

В той же работе был доказан следующий результат (см. [13, утверждение 1]).

Лемма 7. Пусть k, s — натуральные числа, Λ — произвольное множество из семейства $\Lambda(k, s)$ и $|\Lambda| \geq k$. Тогда

$$\mathbf{T}_k(\Lambda) \leq 2^{3k} k^k |\Lambda|^k \max \left\{ 1, \left(\frac{k}{|\Lambda|} \right)^k |\Lambda|^{k/s} \right\}. \quad (6)$$

С помощью определения 6 и леммы 7 можно доказать аналог теоремы 3, понимая под размерностью множества мощность его максимального подмножества из семейства $\Lambda(k, s)$. Нам не понадобится это более точное утверждение.

Для $u \in \mathbb{T}$ положим

$$\|u\| = \frac{1}{2\pi} \inf_{v \in \mathbb{R}, v \equiv u \pmod{2\pi}} |v|.$$

Нам потребуется аналог определения 6 относительно функции $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Для вычета $x \in \mathbb{Z}_N$ под $\varphi^*(x)$ мы подразумеваем $\varphi(x/N)$.

Определение 8. Пусть k, s — натуральные числа, $\eta \in (0, 1]$ — действительное число и $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — произвольная функция. Будем говорить, что множество $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{|\Lambda|}\} \subset \mathbb{Z}_N$ принадлежит семейству $\Lambda^{\varphi, \eta}(k, s)$, если из равенства

$$\sum_{i=1}^{|\Lambda|} s_i \lambda_i = 0, \quad \lambda_i \in \Lambda, \quad s_i \in \mathbb{Z}, \quad |s_i| \leq s, \quad \sum_{i=1}^{|\Lambda|} |s_i| \leq 2k, \quad (7)$$

и неравенства

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\Lambda|} s_i \varphi^*(\lambda_i) \right\| \leq \eta \quad (8)$$

вытекает, что все s_i равны нулю.

Ясно, что любое подмножество множества из семейства $\Lambda^{\varphi, \eta}(k, s)$ также принадлежит этому семейству.

Имея функцию $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ и число $\eta \in (0, 1]$, для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{Z}_N$ определим величину $\mathbf{T}_k^{\varphi, \eta}(S)$, а именно,

$$\mathbf{T}_k^{\varphi, \eta}(S) := |\{(x_1, \dots, x_{2k}) \in S^{2k} : x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k}, \\ \|\varphi^*(x_1) + \dots + \varphi^*(x_k) - \varphi^*(x_{k+1}) - \dots - \varphi^*(x_{2k})\| \leq \eta\}|.$$

Аналогично утверждению, приведенному выше, выводится лемма об оценке величины $\mathbf{T}_k^{\varphi, \eta}(\Lambda)$ для множеств Λ из семейства $\Lambda^{\varphi, \eta}(k, s)$.

Лемма 9. Пусть k, s — натуральные числа, $s \geq 5$, Λ — произвольное множество из семейства $\Lambda^{\varphi, \eta}(2k, s)$. Тогда

$$\mathbf{T}_k^{\varphi, \eta/2}(\Lambda) \leq 2^{4k+2} k^{k+1} |\Lambda|^k \max \left\{ 1, \left(\frac{k}{|\Lambda|} \right)^k |\Lambda|^{4k/s} \right\}. \quad (9)$$

Аргументы доказательства очень похожи на рассуждения из [13], единственное отличие состоит в том, что мы оцениваем величину $\mathbf{T}_k^{\varphi}$ непосредственно и поэтому не используем среднее значение многомерной свертки (более подробно см. [13]). Данный подход немного ослабляет наши оценки, что, впрочем, совершенно не влияет на финальный результат в задаче Кахана.

Доказательство леммы 9. Пусть $\sigma = \mathbf{T}_k^{\varphi, \eta/2}(\Lambda)$, т. е. σ — число наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2k}) \in \Lambda^{2k}$, удовлетворяющих уравнению

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = \lambda_{k+1} + \dots + \lambda_{2k} \quad (10)$$

и неравенству

$$\|\varphi^*(\lambda_1) + \dots + \varphi^*(\lambda_k) - \varphi^*(\lambda_{k+1}) - \dots - \varphi^*(\lambda_{2k})\| \leq \eta/2. \quad (11)$$

Приводя подобные члены, перепишем равенство (10) в виде

$$\sum_{j=1}^l s_j \tilde{\lambda}_j = 0, \quad s_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (12)$$

где все $\tilde{\lambda}_j \in \Lambda$ различные и $\sum_{j=1}^l |s_j| = 2t \leq 2k$. Разобьем сумму (12) на две,

$$0 = \sum_{j=1}^l s_j \tilde{\lambda}_j = \sum_{j \in H} s_j \tilde{\lambda}_j + \sum_{j \in B} s_j \tilde{\lambda}_j, \quad (13)$$

в которых $H = \{j : |s_j| \leq s/2\}$ и $B = \{j : |s_j| > s/2\}$. Ясно, что множества H и B зависят от набора $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$, $H = H(\vec{s})$, $B = B(\vec{s})$.

При фиксированных l, t и наборе $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$ оценим число решений уравнения (13). Рассмотрим решения уравнения (13) с фиксированными $\tilde{\lambda}_j$, $j \in B$. Возьмем два таких решения $(\tilde{\lambda}'_1, \dots, \tilde{\lambda}'_l)$, $(\tilde{\lambda}''_1, \dots, \tilde{\lambda}''_l)$. Имеем

$$\sum_{j \in H} s_j \tilde{\lambda}'_j - \sum_{j \in H} s_j \tilde{\lambda}''_j = 0 \quad (14)$$

и по неравенству треугольника

$$\left\| \sum_{j \in H} s_j \varphi^*(\tilde{\lambda}'_j) - \sum_{j \in H} s_j \varphi^*(\tilde{\lambda}''_j) \right\| \leq \eta.$$

По определению множества H получаем, что все s_j в формуле выше не превосходят по модулю s , а значит, по определению семейства $\Lambda^{\varphi, \eta}(2k, s)$ набор $\{\tilde{\lambda}_j''\}_{j \in H}$ является перестановкой набора $\{\tilde{\lambda}_j'\}_{j \in H}$. Число перестановок одного набора равно $(2t)!/(|s_1|! \cdots |s_l|!)$. Следовательно, число решений уравнения (13) с фиксированными l , t и $\vec{s}$ не превосходит

$$\frac{(2t)!}{|s_1|! \cdots |s_l|!} |\Lambda|^{B(\vec{s})}. \quad (15)$$

Для всякого t , $0 \leq t \leq k$, положим $r_t = 2t/([s/2] + 1)$. Ясно, что для любого набора $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$, $\sum_{j=1}^l |s_j| = 2t$, выполнено неравенство $|B(\vec{s})| \leq r_t$. Используя оценку (15) и неравенство

$$\sum_{l=1}^{2t} \sum_{s_1 + \dots + s_l = 2t, s_j > 0} \frac{(2t)!}{s_1! \cdots s_l!} \leq \sum_{s_1 + \dots + s_{2t} = 2t, s_j \geq 0} \frac{(2t)!}{s_1! \cdots s_l!} = (2t)^{2t},$$

находим оценку сверху на искомую величину σ :

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sum_{t=0}^k \sum_{b=0}^{r_t} \sum_{\vec{s}: |B(\vec{s})|=b} \frac{(2t)!}{|s_1|! \cdots |s_l|!} |\Lambda|^b (k-t)! |\Lambda|^{k-t} \leq 2^{4k} |\Lambda|^k \sum_{t=0}^k \sum_{b=0}^{r_t} t^{2t} k^{k-t} |\Lambda|^{b-t} \\ &\leq 2^{4k+1} k^k |\Lambda|^k \sum_{t=0}^k \left(\frac{k}{|\Lambda|^{1-4/s}} \right)^t \leq 2^{4k+2} k^{k+1} |\Lambda|^k \max \left\{ 1, \left(\frac{k}{|\Lambda|} \right)^k |\Lambda|^{4k/s} \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана. $\square$

§3. О преобразовании Фурье характеристических функций подмножеств группы $\mathbb{Z}_p$

Как и в предыдущем параграфе, G — компактная абелева группа и $\hat{G}$ — сопряженная группа.

Для измеримого множества $E \subset G$ положительной меры, непрерывной на G функции f и $1 \leq q < \infty$ положим

$$\|f\|_{L^q(E)} = \left((\mu_G(E))^{-1} \int_{x \in E} |f(x)|^q d\mu_G(x) \right)^{1/q},$$

а также

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

В [2] изучался следующий вопрос. Пусть S — подмножество в $\mathbb{Z}_p$. Как оценить снизу $\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)}$ через $|S|$? Отметим, что поскольку

$$\|\chi_{\mathbb{Z}_p \setminus S}\|_{A(\mathbb{Z}_p)} = \|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} + (1 - 2|S|/p),$$

задача сводится к случаю

$$|S| < p/2.$$

Из результатов работы [2] следует, что в этом случае выполняется неравенство

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg \frac{|S|}{p} \left(\frac{\log p}{\log \log p} \right)^{1/3}.$$

Эту оценку можно улучшить, используя результаты Сандерса [12], к описанию которых мы приступаем.

Для $z \in \mathbb{S}^1$ положим

$$\|z\| = \frac{1}{2\pi} \inf_{n \in \mathbb{Z}} |2\pi n + \arg z|.$$

Таким образом, норма $\|z\|$ мала, если z близко к единице. Для конечного непустого множества Γ характеров группы G и $\delta \in (0, 1]$ определим множество Бора

$$B(\Gamma, \delta) = \{x \in G : \|\gamma(x)\| \leq \delta \text{ для всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Сдвиги множеств Бора будем называть окрестностями Бора. Мы будем обозначать $|\Gamma|$ через d .

В теории множеств Бора важную роль играет следующее утверждение (см, например, [12, лемма 6.2]).

Лемма 10. *Справедливо неравенство $\mu_G(B(\Gamma, \delta)) \geq \delta^d$.*

Для фиксированных Γ и δ будем обозначать через $\beta(x)$ определенную на G функцию, равную $1/\mu_G(B(\Gamma, \delta))$ на множестве $B(\Gamma, \delta)$ и нулю на его дополнении. Для функций $f, g \in L^1(G)$ определим их свертку

$$(f * g)(x) = \int_{y \in G} f(y)g(x - y) d\mu_G(y).$$

Отметим, что свертка непрерывной и интегрируемой функций непрерывна. Хорошо известно соотношение

$$(\widehat{f * g})(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma). \quad (16)$$

Следующий результат является основным в работе [12].

Теорема 11. *Пусть G — компактная абелева группа, $f \in A(G)$, $f \neq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Положим $A_f = \|f\|_{A(G)}\|f\|_{\infty}^{-1}$. Тогда существуют множество Бора $B(\Gamma, \delta)$, такое, что*

$$d = |\Gamma| \ll \varepsilon^{-2} A_f (1 + \log A_f) (1 + \log(\varepsilon^{-1} A_f))$$

и

$$\log(\delta^{-1}) \ll \varepsilon^{-2} A_f (1 + \log(\varepsilon^{-1} A_f)),$$

и меньшее множество Бора $B(\Gamma, \delta')$, $\delta' \gg \varepsilon \delta / d$, такое, что

$$\sup_{x \in G} \|f * \beta - f * \beta(x)\|_{L^\infty(x + B(\Gamma, \delta'))} \leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty(G)}$$

и

$$\sup_{x \in G} \|f - f * \beta\|_{L^2(x + B(\Gamma, \delta'))} \leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty(G)}.$$

С помощью теоремы 11 мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть p — простое число, $S \subset \mathbb{Z}_p$, $0 < \eta = |S|/p < 1/2$. Тогда если $\eta \geq (\log p)^{-1/4}(\log \log p)^{1/2}$, то*

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg (\log p)^{1/2} (\log \log p)^{-1} \eta^{3/2} (1 + \log(\eta^2 (\log p)^{1/2} (\log \log p)^{-1}))^{-1/2},$$

а если $\eta < (\log p)^{-1/4}(\log \log p)^{1/2}$, то

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg \eta^{1/2} (\log p)^{1/4} (\log \log p)^{-1/2}.$$

Доказательство. Положим $G = \widehat{G} = \mathbb{Z}_p$ и $f_0 = \chi_S - \eta$. Тогда

$$\hat{f}_0(0) = \int_G f_0 d\mu_G = 0. \quad (17)$$

Далее положим $k = [1/(2\eta)]$ и рассмотрим случайную функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^k f_0(x - x_j),$$

где $x_1, \dots, x_k$ равномерно распределены на G и независимы. Для $\gamma \in \widehat{G}$

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}_0(\gamma) \sum_{j=1}^k \gamma(x_j).$$

Вследствие (17)

$$\hat{f}(0) = 0. \quad (18)$$

Если же $\gamma \neq 0$, то для второго момента величины $\hat{f}(\gamma)$ мы имеем

$$\mathbf{E}|\hat{f}(\gamma)|^2 = k|\hat{f}_0(\gamma)|^2.$$

Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\mathbf{E}|\hat{f}(\gamma)| \leq \sqrt{k}|\hat{f}_0(\gamma)|.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\|f\|_{A(G)} \leq \sqrt{k}\|f_0\|_{A(G)}.$$

Теперь фиксируем $x_1, \dots, x_k$ так, что

$$\|f\|_{A(G)} \leq \sqrt{k}\|f_0\|_{A(G)}. \quad (19)$$

Мы будем использовать две тривиальные оценки для $\|f\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty \leq k \quad (20)$$

и

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{A(G)}. \quad (21)$$

При выполнении условия

$$(\delta')^d > 1/p \quad (22)$$

мы выводим из леммы 10, что $\mu_G(B(\Gamma, \delta')) > 1/p$, т. е. $B(\Gamma, \delta')$ содержит ненулевой элемент x_0 . В силу (16) и (18)

$$\sum_{j=0}^{p-1} (f * \beta)(jx_0) = p(f * \beta)(0) = p\hat{f}(0) \cdot \hat{\beta}(0) = 0.$$

Следовательно, найдется элемент $x = jx_0$, такой, что $(f * \beta)(x)(f * \beta)(x + x_0) \leq 0$. Далее, согласно теореме 11, $|f * \beta(x + x_0) - f * \beta(x)| \leq \varepsilon\|f\|_{L^\infty(G)}$. Поэтому $|f * \beta(x_1)| \leq 0,5\varepsilon\|f\|_{L^\infty(G)}$ для $x_1 = x$ или $x_1 = x + x_0$. Значит, для любого $x \in x_1 + B(\Gamma, \delta')$ мы имеем $|f * \beta(x)| \leq 1,5\varepsilon\|f\|_{L^\infty(G)}$. Вновь применяя теорему 11, мы выводим, что

$$\|f - f * \beta\|_{L^2(x_1 + B(\Gamma, \delta'))} \leq \varepsilon\|f\|_{L^\infty(G)}.$$

Значит, найдется элемент $x \in x_1 + B(\Gamma, \delta')$, такой, что $|f(x) - f * \beta(x)| \leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty(G)}$. Таким образом,

$$|f(x)| \leq 2,5\varepsilon \|f\|_{L^\infty(G)}. \quad (23)$$

С другой стороны, из определения числа k и функции f следует, что $|f(x)| > 0,25$ для любого $x \in G$. Следовательно, при выполнении неравенства

$$\varepsilon \|f\|_{L^\infty(G)} \leq 0,1 \quad (24)$$

мы приходим к противоречию.

В дальнейшем будут использоваться обозначения

$$u = \|f\|_{A(G)}, \quad v = \|f\|_\infty.$$

Заметим, что $u \geq v$. Положим $\varepsilon = 0,1v^{-1}$. При этом неравенство (24) выполнено. Рассмотрим два случая.

I случай: $\eta \geq (\log p)^{-1/4}(\log \log p)^{1/2}$. Пусть

$$u_1 = \eta(\log p)^{1/2}(\log \log p)^{-1}(1 + \log(\eta^2(\log p)^{1/2}(\log \log p)^{-1}))^{-1/2}, \quad u_0 = cu_1,$$

где константу $c \in (0, 1)$ можно явно задать, зная константы в $\ll$ из теоремы 11. Мы будем пользоваться тем, что в силу предположения относительно η логарифм во втором множителе определения величины u_1 неотрицателен и, значит, сам множитель не больше единицы. Предположим, что

$$u \leq u_0. \quad (25)$$

Наша цель — проверить выполнение неравенства (22) и тем самым получить противоречие с предположением (25).

Положив

$$v_0 = \min(k, u_0), \quad (26)$$

мы в силу (20) имеем

$$v \leq v_0. \quad (27)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} A_f &\ll v^2(u/v) = uv \leq u_0 v, \\ 1 + \log A_f &\ll 1 + \log(u_0/v), \\ 1 + \log(\varepsilon^{-1} A_f) &\ll 1 + \log u_0 \ll \log \log p. \end{aligned}$$

Оценим d . Перемножая три последние оценки, имеем

$$d \ll u_0(\log \log p)v(1 + \log(u_0/v)).$$

Так как функция $v \rightarrow v(1 + \log(u_0/v))$ возрастает при $v \in (0, u_0)$, то с учетом (27) мы получаем

$$d \ll u_0 v_0 (1 + \log(u_0/v_0)) \log \log p. \quad (28)$$

Далее,

$$\log(\delta^{-1}) \ll u_0 v_0 \log \log p.$$

Легко видеть, что $\log d \ll \log \log p$. Следовательно,

$$\log((\delta')^{-1}) \leq \log(\delta^{-1}) + \log d + \log(\varepsilon^{-1}) \ll u_0 v_0 \log \log p. \quad (29)$$

Объединяя (28) и (29), мы получаем

$$d \log((\delta')^{-1}) \ll u_0^2 v_0^2 (1 + \log(u_0/v_0)) (\log \log p)^2. \quad (30)$$

Если $v_0 = k$, то

$$d \log((\delta')^{-1}) \ll c^2 u_1^2 k^2 (1 + \log(u_1/k)) (\log \log p)^2.$$

(При этом константы в $\ll$ зависят от соответствующих констант в теореме 11, а константа c остается в нашем распоряжении). Таким образом, для доказательства неравенства (22) нам достаточно проверить, что

$$u_1^2 k^2 (1 + \log(u_1/k)) (\log \log p)^2 \ll \log p. \quad (31)$$

По определению величины u_1 мы имеем

$$u_1 \leq \eta (\log p)^{1/2} (\log \log p)^{-1}. \quad (32)$$

Значит, так как $k = [1/(2\eta)]$, то

$$1 + \log(u_1/k) \ll 1 + \log(\eta^2 (\log p)^{1/2} (\log \log p)^{-1}).$$

Отсюда и из определения величины u_1 следует, что

$$u_1^2 k^2 (1 + \log(u_1/k)) (\log \log p)^2 \ll \log p,$$

и (31) доказано.

Если же $v_0 = u_0 < k$, то из (30) следует, что

$$d \log((\delta')^{-1}) \ll u_0^4 (\log \log p)^2, \quad (33)$$

откуда

$$d \log((\delta')^{-1}) \ll c^2 u_1^2 k^2 (\log \log p)^2.$$

В силу (32)

$$u_1^2 k^2 (\log \log p)^2 \ll \log p,$$

и оценка (22) снова выполнена.

Мы привели к противоречию предположение (25). Значит, $u > u_0$. Применяя неравенство (19), мы получаем

$$\|f_0\|_{A(G)} \geq u_0 / \sqrt{k}, \quad (34)$$

откуда вытекает требуемый результат в I случае.

II случай: $\eta < (\log p)^{-1/4} (\log \log p)^{1/2}$. Пусть

$$u_1 = (\log p)^{1/4} (\log \log p)^{-1/2}, \quad u_0 = cu_1.$$

В силу выбора параметра η имеем $k > u_0$ и, значит, $v_0 = u_0$. Легко видеть, что при новом выборе параметров все вычисления в формулах (27)–(31) остаются в силе. Так как $v_0 = u_0$, то следует воспользоваться неравенством (33), из которого вытекает (22).

Мы снова привели к противоречию предположение (25). Значит, $u > u_0$. Применяя неравенство (34), получаем требуемый результат во II случае. Теорема доказана. $\square$

Теорема 12 нетривиальна, если подмножество S велико, а именно,

$$|S| p^{-1} (\log p)^{1/2} (\log \log p)^{-1} \rightarrow \infty$$

(и при этом $|S| < p/2$). Можно ожидать, что если $2 \leq |S| < p/2$, то выполнена оценка

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg \log |S|. \quad (35)$$

Легко видеть, что порядок $\log |S|$ достигается при $S = \{1, \dots, |S|\}$. Для $B \subset \mathbb{Z}$ аналог формулы (35) хорошо известен: в [6] и [10] доказано, что если $B \subset \mathbb{Z}$, $2 \leq |B| < \infty$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{b \in B} e^{ibx} \right| dx \gg \log |B|. \quad (36)$$

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3, дает неухудшаемую по порядку оценку винеровской нормы малого подмножества S .

Теорема 13. Пусть p — простое число, $S \subset \mathbb{Z}_p$,

$$2 \leq |S| \leq \exp((\log p / \log \log p)^{1/3}).$$

Тогда справедлива оценка (35).

Доказательство. Мы предполагаем, что p достаточно велико. В процессе доказательства будем идентифицировать элементы из $\mathbb{Z}_p$ с наименьшими по абсолютной величине представляющими их целыми числами.

Мы будем предполагать, что

$$K := \|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \leq c(\log p / \log \log p)^{1/3}, \quad (37)$$

где c — надлежащая положительная константа. Заметим, что если неравенство (37) не выполнено, то требуемый результат немедленно вытекает из предположения относительно S .

По теореме 3 с учетом замечания 5 мы получаем, что

$$d := \dim(S) \leq \log p / \log \log p,$$

если константа c выбрана достаточно малой. Пусть Λ — максимальное диссоциативное подмножество множества S . Таким образом, $|\Lambda| = d$. По теореме Дирихле найдется такое натуральное число $q < p$, что для любого $\lambda \in \Lambda$ справедливо неравенство

$$|q\lambda| \leq p^{1-1/d} \leq p / \log p.$$

(Напомним, что по нашему соглашению $|q\lambda|$ есть абсолютная величина числа из $[-p/2, p/2]$, представляющего $q\lambda$). Положим

$$B = \{qa : a \in S\}.$$

Ясно, что

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} = \|\chi_B\|_{A(\mathbb{Z}_p)} e. \quad (38)$$

В силу выбора множества Λ любой элемент $a \in S$ представим в виде

$$a = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_\lambda \lambda,$$

где $\varepsilon_\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда любой элемент $b \in B$ представим в виде

$$b = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varepsilon_\lambda q\lambda.$$

Следовательно,

$$|b| \leq dp / \log p \leq p / \log \log p.$$

Таким образом, $B \subseteq [-p/3, p/3]$. Из теоремы 7.28 гл. 10 книги [3] следует, что

$$\|\chi_B\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{b \in B} e^{ibx} \right| dx. \quad (39)$$

Соединяя равенство (38) и неравенства (39), (36), мы получаем, что

$$\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \gg \log |B| = \log |S|,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Мы собираемся рассмотреть вопрос об оценке снизу величины $\|\chi_S\|_{A(\mathbb{Z}_p)}$ через $|S|$ для не слишком больших и не слишком малых подмножеств $S \subset \mathbb{Z}_p$ в одной из следующих статей.

§4. Доказательство теоремы 2

Ясно, что в формуле (2) можно рассматривать только неотрицательные n . Положим

$$\Theta(n) = \max_{l=0,1,\dots,n} \|e^{il\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Последовательность $\Theta(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, неубывающая и $\Theta(0) = 1$. В силу предположения теоремы 2

$$\Theta(n) = o\left(\frac{\log^{1/22} n}{(\log \log n)^{3/11}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Соединяя аргументы Лебедева из [9] и теорему 12, получаем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 14. Пусть $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Пусть также Q — натуральное число, N — простое число, $N \leq Q$ и для всех $x \in \mathbb{Z}_N$

$$\|Q\varphi^*(x)\| \leq 1/N. \quad (41)$$

Положим $\eta = 1/(64\Theta^2(Q))$, и пусть $\eta \geq (\log N)^{-1/4}(\log \log N)^{1/2}$. Тогда

$$\Theta^2(Q) \gg (\log N)^{1/2}(\log \log N)^{-1}\eta^{3/2}(1 + \log(\eta^2(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{-1}))^{-1/2}.$$

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы 2. В наших рассуждениях мы снова используем аргументы Лебедева из [9].

Доказательство теоремы 2. Можно считать, что N — достаточно большое простое число. Пусть

$$Q = \exp((\log N)^\alpha (\log \log N)^\beta), \quad (42)$$

$$\Theta(x) = o((\log x)^c (\log \log x)^d) \quad (43)$$

и

$$\nu = \Theta(Q) = o((\log N)^{\alpha c} (\log \log N)^{\beta c + d}). \quad (44)$$

Здесь $\alpha > 1$, $\beta, c > 0$ и d — некоторые вещественные числа, которые мы выберем потом. Пусть S — произвольное подмножество из $\mathbb{Z}_N$. Положим $\Phi_{S,n}(x) = e^{2\pi i n \varphi(x)} \chi_S(x)$, $n = 1, \dots, Q$. Для всякого натурального k из леммы 4 следует, что

$$\mathbf{T}_k(\Phi_{S,n}) \geq \frac{|S|^{2k}}{N \nu^{2k-2}}. \quad (45)$$

Заметим, что если $\|u\| > 2^{-1}Q^{-1/2}$, то ввиду неравенства $|\sin x| \geq 2x/\pi$, $x \in [0, \pi/2]$, мы получаем

$$\left| \sum_{n=1}^Q e^{2\pi i n u} \right| \leq 2^{-1}Q^{1/2} < Q^{1/2}.$$

Используя последнюю оценку и суммируя неравенство (45) по $n \in \mathbb{Z}_N$, легко видеть, что число наборов $(x_1, \dots, x_{2k}) \in S^{2k}$, для которых

$$x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k},$$

$$\|\varphi^*(x_1) + \dots + \varphi^*(x_k) - \varphi^*(x_{k+1}) - \dots - \varphi^*(x_{2k})\| \leq 2^{-1}Q^{-1/2}, \quad (46)$$

не меньше, чем $|S|^{2k}/(2N\nu^{2k-1})$ при условии выбора параметра k , удовлетворяющего неравенствам

$$Q \geq 4N^{6k} \geq 4|S|^{-2}N^2\nu^{4k-4}. \quad (47)$$

Иными словами, для любого подмножества $S \subseteq \mathbb{Z}_N$ выполнено неравенство $\mathbf{T}_k^{\varphi, 2^{-1}Q^{-1/2}}(S) \geq |S|^{2k}/(2N\nu^{2k-1})$.

Рассмотрим теперь максимальное подмножество $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}_N$, принадлежащее семейству $\Lambda^{\varphi, Q^{-1/2}}(2k, s)$, где параметр s зависит от констант α, β, c, d и будет выбираться позднее. Из максимальной подмножества Λ вытекает, что для любого $x \in \mathbb{Z}_N$ найдутся элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_w \in \Lambda$, $w \leq 4k$, и целые числа $s_*, s_1, \dots, s_w$, $|s_*| \leq s$, $s_* \neq 0$, $|s_j| \leq s$, $j = 1, \dots, w$, $\sum_{j=1}^{|\Lambda|} |s_j| + |s_*| \leq 4k$, такие, что

$$\left\| s_*\varphi^*(x) - \sum_{j=1}^w s_j\varphi^*(\lambda_j) \right\| \leq Q^{-1/2}. \quad (48)$$

Оценим мощность множества Λ . Выберем параметр k равным $2 + [\log N]$. Применим к множеству Λ лемму 9 и предположим, что первый член в максимуме из формулы (9) доминирует. Соединяя оценку леммы с неравенством $\mathbf{T}_k^{\varphi, 2^{-1}Q^{-1/2}}(\Lambda) \geq |\Lambda|^{2k}/(2N\nu^{2k-1})$, получаем

$$|\Lambda| \ll \nu^2 k \ll \nu^2 \log N. \quad (49)$$

Если в максимуме из формулы (9) доминирует второй член и при этом оценка (49) не выполнена, то

$$(\log N)^{s/(s-4)} \gg |\Lambda| \gg \nu^2 \log N \gg (\log N)^{1+2\alpha c} (\log \log N)^{2\beta c + 2d}.$$

Выбирая параметр $s = s(\alpha, \beta, c, d)$ так, чтобы последнее неравенство не имело места, получаем, что оценка (49) верна всегда.

Приближая все элементы множества $\{\varphi^*(x)\}_{x \in \Lambda}$ по теореме Дирихле, найдем натуральное q , такое, что $\|q\varphi^*(\lambda)\| \leq 1/(4Nks!)$, $\lambda \in \Lambda$ и $q \leq (4Nks!)^{|\Lambda|}$. Если

$$|\Lambda| \log N \ll \nu^2 \log^2 N \ll \log Q, \quad (50)$$

то, выбирая достаточно малую константу перед $(\log x)^c (\log \log x)^d$ в o из формулы (43), мы добьемся того, что $q \leq Q$ и одновременно

$$s!qQ^{-1/2} \leq 1/2N. \quad (51)$$

В терминах констант α, β, c, d неравенство (50) переписывается так:

$$2\alpha c + 2 \leq \alpha \quad \text{и} \quad 2\beta c + 2d \leq \beta. \quad (52)$$

Следовательно, если (52) имеет место, то, согласно (48) и (51), для любого $x \in \mathbb{Z}_N$

$$\begin{aligned} \|qs! \varphi^*(x)\| &\leq s! |s_*|^{-1} \|qs_* \varphi^*(x)\| \\ &\leq s! \left\| \sum_{j=1}^w s_j q \varphi^*(\lambda_j) \right\| + s! q Q^{-1/2} \leq 1/2N + s! q Q^{-1/2} \leq \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства мы пользовались тем, что при любом $s_* \neq 0$, $|s_*| \leq s$, число $s! |s_*|^{-1}$ целое положительное.

Пусть $\eta = 1/(64\Theta^2(Q))$. Предположим, что $\eta \geq (\log N)^{-1/4}(\log \log N)^{1/2}$. Применяя тогда лемму 14 с параметром $Q = q$, получаем

$$\Theta(Q) \gg (\log N)^{\alpha c} (\log \log N)^{\beta c + d} \gg (\log N)^{1/10} (\log \log N)^{-3/10}. \quad (53)$$

Выбирая теперь $\alpha = 2,2$, $c = 1/22$, $\beta = -3/5$, $d = -3/11$, мы ввиду (40) (или же (43)) одновременно приходим к противоречию с (53) и удовлетворяем требованиям (52). Легко проверить, что при таких параметрах условие $\eta \geq (\log N)^{-1/4}(\log \log N)^{1/2}$ также выполнено. Наконец, возвращаясь к (47), убеждаемся, что при $k = 2 + [\log N]$ и это неравенство имеет место. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Если в основной теореме не следить за двойными логарифмами, то лемму 9 можно не использовать. Для этого надо рассмотреть неособые наборы $(x_1, \dots, x_{2k})$, т. е. те, которые удовлетворяют (46) и в каждом из которых найдется элемент x_j , встречающийся в нем единожды (ясно, что наборов, не обладающих данным свойством, существует не более, чем $(Ck)^k |S|^k$, $C > 0$ — абсолютная константа). Далее, последовательно выбрасываем неособые наборы до тех пор пока их не останется меньше, чем $O(\Theta^2(Q)k)$. Легко видеть, что для всех элементов $x \in \mathbb{Z}_N$ число $\varphi^*(x)$ будет выражаться (с погрешностью $Q^{-1/2}$) через комбинации с коэффициентами ± 1 величин $\varphi^*(x_j)$, где x_j принадлежат множеству неособых наборов. Дальнейшие рассуждения совпадают с аргументами из доказательства теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Beurling, H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand., **1** (1953), 120–126.
- [2] B. Green, S. Konyagin, *On the Littlewood problem modulo a prime*, Canad. J. Math., **61**:1 (2009), 141–164.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.
- [4] J.-P. Kahane, *Transformées de Fourier des fonctions sommables*, in: Proc. Internat. Congr. Math., 1962, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 114–131.
- [5] Ж.-П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
- [6] С. В. Конягин, *О проблеме Литтлвуда*, Изв. АН СССР, сер. матем., **45**:2 (1981), 243–265.
- [7] В. В. Лебедев, *Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона*, Матем. сб., **201**:12 (2010), 103–130.
- [8] В. В. Лебедев, *Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай*, Матем. заметки, **90**:3 (2011), 394–407.

- [9] В. В. Лебедев, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона*, Функци. анализ и его прил., **46**:2 (2012), 52–65.
- [10] O. C. McGehee, L. Pigno, B. Smith, *Hardy’s inequality and the L^1 norm of exponential sums*, Ann. of Math., **113**:3 (1981), 613–618.
- [11] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, John Wiley & Sons, New York, 1990 (reprint of the 1962 original).
- [12] T. Sanders, *The Littlewood–Gowers problem*, J. Anal. Math., **101** (2007), 123–162.
- [13] И. Д. Шкрёдов, *О множествах больших тригонометрических сумм*, Изв. РАН, **72**:1 (2008), 161–182.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: konyagin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
14 января 2014 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: ilya.shkredov@gmail.com