Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Юньбай Дун, Жуй Ши, Устойчивость изометрических отображений, преобразующих группы обратимых элементов банаховых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 34–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:24:26

Устойчивость изометрий между группами обратимых элементов банаховых алгебр*

© 2015. ЮНЬБАЙ ДУН, ЖУЙ ШИ

В этой статье мы доказываем устойчивость (по Хайерсу и Уламу) сюръективных изометрий группы обратимых элементов банаховой алгебры с единицей и аналогичной группы в алгебре $C(K)$, где K — компактное метрическое пространство.

1. Введение. Следующее понятие впервые ввели Хайерс и Улам [5]; их целью было выяснить, близки ли к изометриям рассматриваемые ниже отображения.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть X, Y — банаховы пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется ε -изометрией, если

$$\left| \|f(x) - f(y)\| - \|x - y\| \right| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (1)$$

Мы отсылаем читателя к книге [1] и к обзору [7], где изложены эти вопросы и близкие темы. Некоторые современные аспекты этой проблематики можно найти в работах [2], [8].

В этой работе мы изучаем ε -изометрии групп обратимых элементов банаховых алгебр и даем положительное решение соответствующей проблемы Хайерса–Улама. Исследование изометрий групп обратимых элементов содержится, например, в работах [3], [4].

В этой работе через A обозначается банахова алгебра с единицей, а через A^{-1} группа ее обратимых элементов. Основная компонента группы A^{-1} обозначается через A_I^{-1} ; это связная компонента группы A^{-1} , содержащая единицу алгебры A . Через $C(K)$ обозначается банахова алгебра непрерывных функций, заданных на компактном метрическом пространстве K , а через $C_+(K)$ (соответственно $C_-(K)$) — множество всех вещественных непрерывных функций f , заданных на K и удовлетворяющих условию $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$) для всех $x \in K$. Для фиксированной точки $x \in K$ обозначим через δ_x функционал, определенный равенством $\delta_x(a) = a(x)$ для всех $a \in C(K)$.

2. Основные результаты. Напомним сначала следующий результат из работы [2].

Лемма 1. Пусть Y — банахово пространство, а $f: \mathbb{R} \rightarrow Y$ есть ε -изометрия, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда существует такой линейный функционал $\phi \in Y^*$, что $\|\phi\| = 1$ и

$$|\phi \circ f(t) - t| \leq 3\varepsilon \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}.$$

*Первый автор поддержан Фондом естественных наук Китая, грант №11201353, и Фондом естественных наук провинции Фуцзянь, грант №2011J01020. Второй автор поддержан NSFC (грант №11401071), Фондом естественных наук центральных университетов Китая (грант №DUT13RC(3)70) и Фондом научных исследований провинции Ляонин, грант №20141028.

Заметим, что каждая открытая подгруппа группы A^{-1} содержит ее основную компоненту A_I^{-1} . Имеют место следующие результаты.

Лемма 2. Пусть $A = C(K)$, где K — компактное метрическое пространство, и $\mathfrak{A}$ — открытая мультипликативная подгруппа группы A^{-1} . Пусть Y — банахово пространство и $f: \{0\} \cup \mathfrak{A} \rightarrow Y$ есть ε -изометрия, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Тогда для любой точки $x \in K$ и любого числа α , такого, что $|\alpha| = 1$, найдется вещественно-линейный функционал $\phi_{x,\alpha}: Y \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям $\|\phi_{x,\alpha}\| = 1$ и

$$|\phi_{x,\alpha} \circ f(a) - \operatorname{Re} \delta_x(\alpha a)| \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } a \in \{0\} \cup \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Пусть $R = \sup\{d(x, y) : x, y \in K\}$. Введем величины $a_x(y) = 1 - d(x, y)/(R + 1)$ для всех $x, y \in K$. Тогда $a_x \in C_+(K) \subset A_I^{-1} \subset \mathfrak{A}$ для всех $x \in K$.

Ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|na_x + a\| - n) = \operatorname{Re} \delta_x(a)$$

для всех $a \in A$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|n\alpha a_x + a\| - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|na_x + \bar{\alpha}a\| - n) = \operatorname{Re} \delta_x(\bar{\alpha}a) \quad (2)$$

для любого $a \in A$ и любого комплексного числа α , удовлетворяющего условию $|\alpha| = 1$. Согласно лемме 1, существует такой вещественно-линейный функционал $\phi_{x,\alpha}$, что $\|\phi_{x,\alpha}\| = 1$ и

$$|\phi_{x,\alpha} \circ f(n\bar{\alpha}a_x) - n| \leq 3\varepsilon$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что

$$n - 3\varepsilon - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \leq \phi_{x,\alpha} \circ f(n\bar{\alpha}a_x) - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \leq \|f(n\bar{\alpha}a_x) - f(a)\| \leq \|n\bar{\alpha}a_x - a\| + \varepsilon$$

для всех $a \in \{0\} \cup \mathfrak{A}$. Мы получаем тогда, что

$$\|n\bar{\alpha}a_x - a\| - n + \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \geq -4\varepsilon.$$

Если в полученном неравенстве положить $n \rightarrow +\infty$, то равенство (2) приведет к неравенству

$$-\operatorname{Re} \delta_x(\alpha a) + \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \geq -4\varepsilon. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} n - 3\varepsilon - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) &\leq -\phi_{x,\alpha} \circ f(-n\bar{\alpha}a_x) - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \\ &\leq \|f(-n\bar{\alpha}a_x) + f(a)\| \leq \|n\bar{\alpha}a_x - a\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|n\bar{\alpha}a_x - a\| - n - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \geq -4\varepsilon.$$

Снова устремим n к $+\infty$. Тогда

$$\operatorname{Re} \delta_x(\alpha a) - \phi_{x,\alpha} \circ f(a) \geq -4\varepsilon. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 1. Пусть A — банахова алгебра с единицей и $B = C(K)$, где K — компактное метрическое пространство. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — открытые мультипликативные подгруппы групп A^{-1} и B^{-1} . Если $f: \{0\} \cup \mathfrak{A} \rightarrow \{0\} \cup \mathfrak{B}$ есть

сюръективная ε -изометрия и $f(0) = 0$, то существует такая сюръективная положительно однородная изометрия $U: \text{cl}(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{cl}(\mathfrak{B})$, что

$$\|f(a) - Ua\| \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } a \in \{0\} \cup \mathfrak{A}.$$

(Через $\text{cl}(\mathfrak{A})$ обозначается замыкание подгруппы $\mathfrak{A}$.)

Доказательство. Зафиксируем элементы $a_1, a_2 \in \{0\} \cup \mathfrak{A}$. Мы покажем сначала, что

$$\|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\| + 4\varepsilon \geq \|\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2)\| \quad (5)$$

для всех вещественных чисел λ_1, λ_2 , удовлетворяющих условию $|\lambda_1| + |\lambda_2| = 1$. Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1: $f(a_1) \neq f(a_2)$. Положим $b_1 = f(a_1)$ и $b_2 = f(a_2)$. Пусть g — частичное сечение многозначного отображения f^{-1} , причем $g(0) = 0$, $g(b_1) = a_1$ и $g(b_2) = a_2$. Тогда отображение $g: \{0\} \cup \mathfrak{B} \rightarrow \{0\} \cup \mathfrak{A}$ также есть ε -изометрия, причем $g(0) = 0$. Согласно лемме 2, для любой точки $x \in K$ и любого комплексного числа α , удовлетворяющего условию $|\alpha| = 1$, существует такой вещественно-линейный функционал $\phi_{x,\alpha}: A \rightarrow \mathbb{R}$, что $\|\phi_{x,\alpha}\| = 1$ и

$$|\phi_{x,\alpha} \circ g(b) - \text{Re } \delta_x(\alpha b)| \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } b \in \{0\} \cup \mathfrak{B}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\| &= \|\lambda_1 g(b_1) + \lambda_2 g(b_2)\| \geq \sup_{x \in K, |\alpha|=1} \|\phi_{x,\alpha}(\lambda_1 g(b_1) + \lambda_2 g(b_2))\| \\ &= \sup_{x \in K, |\alpha|=1} \|\phi_{x,\alpha}(\lambda_1 g(b_1) + \lambda_2 g(b_2)) - \text{Re } \delta_x(\alpha(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)) \\ &\quad + \text{Re } \delta_x(\alpha(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2))\| \\ &\geq \sup_{x \in K, |\alpha|=1} (|\text{Re } \delta_x(\alpha(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2))| \\ &\quad - \|\phi_{x,\alpha}(\lambda_1 g(b_1) + \lambda_2 g(b_2)) - \text{Re } \delta_x(\alpha(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2))\|) \\ &\geq \sup_{x \in K, |\alpha|=1} (|\text{Re } \delta_x(\alpha(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2))| - |\lambda_1| |\phi_{x,\alpha} \circ g(b_1) \\ &\quad - \text{Re } \delta_x(\alpha b_1)| - |\lambda_2| |\phi_{x,\alpha} \circ g(b_2) - \text{Re } \delta_x(\alpha b_2)|) \\ &\geq \|\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2\| - 4\varepsilon = \|\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2)\| - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Случай 2: $f(a_1) = f(a_2)$. В этом случае из (1) вытекает неравенство $\|a_1 - a_2\| \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\| &\geq \|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_1\| - \|\lambda_2 a_2 - \lambda_2 a_1\| \\ &\geq |\lambda_1 + \lambda_2| (\|a_1\| - \|f(a_1)\|) + \|(\lambda_1 + \lambda_2)f(a_1)\| - \varepsilon \\ &\geq \|\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2)\| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Комбинируя два указанных случая, приходим к неравенству (5). Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} f(\mu_1 a) - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} f(\mu_2 a) \right\| \leq \left\| \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mu_1 a - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mu_2 a \right\| + 4\varepsilon = 4\varepsilon$$

для всех $\mu_1, \mu_2 > 0$ и всех $a \in \{0\} \cup \mathfrak{A}$. Таким образом,

$$\left\| \frac{f(\mu_1 a)}{\mu_1} - \frac{f(\mu_2 a)}{\mu_2} \right\| \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} 4\varepsilon. \quad (6)$$

Отсюда вытекает, что предел $Ua = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\mu a)/\mu$ существует для всех $a \in \{0\} \cup \mathfrak{A}$. Так как f есть ε -изометрия, то, как показывает простое рассуждение, U есть положительно однородная изометрия. Подставляя $\mu_1 = 1$ в (6) и полагая $\mu_2 \rightarrow +\infty$, мы получаем

$$\|f(a) - Ua\| \leq 4\varepsilon. \quad (7)$$

Так как U есть изометрия, мы можем ее продолжить на $\text{cl}(\mathfrak{A})$. Зафиксируем $w \in \mathfrak{B}$. Для каждого целого положительного n выберем такой элемент $a_n \in 0 \cup \mathfrak{A}$, что $f(a_n) = nw$. Тогда из (7) получаем, что

$$\left\| w - \frac{Ua_n}{n} \right\| = \frac{1}{n} \|f(a_n) - Ua_n\| \leq \frac{4\varepsilon}{n}.$$

Поскольку U — изометрия, множество ее значений замкнуто, а потому содержит элемент w . Следовательно, отображение $U: \text{cl}(\mathfrak{A}) \rightarrow \text{cl}(\mathfrak{B})$ сюръективно. $\square$

Предположим теперь, что K — связное компактное метрическое пространство, а $C(K)$ — вещественная банахова алгебра. Тогда $C^{-1}(K) = C_+(K) \cup C_-(K)$.

Лемма 3. Пусть K — связное компактное метрическое пространство. Если функции $a_1, a_2 \in C(K)$ удовлетворяют условию

$$\|a_1 - a\| = \|a_2 - a\| \quad \text{для всех } a \in C_+(K) \quad (8)$$

или условию

$$\|a_1 - a\| = \|a_2 - a\| \quad \text{для всех } a \in C_-(K), \quad (9)$$

то $a_1 = a_2$.

Доказательство. Пусть сначала функции $a_1, a_2 \in C(K)$ удовлетворяют условию (8). Как и при доказательстве леммы 2, пусть $R = \sup\{d(x, y) : x, y \in K\}$. Положим $a_x(y) = 1 - d(x, y)/(R + 1)$ для всех $x, y \in K$. Тогда для любой функции $a \in C(K)$ имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|na_x - a\| - n) = -\delta_x(a). \quad (10)$$

Так как $a_x(y) \in C_+(K)$, то из равенств (8) и (10) следует, что для любой точки $x \in K$ выполняется соотношение

$$\delta_x(a_1) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|na_x - a_1\| - n) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|na_x - a_2\| - n) = \delta_x(a_2).$$

Отсюда вытекает, что $a_1 = a_2$. В случае (9) доказательство аналогично. $\square$

Теорема 2. Пусть K_1 и K_2 — связные компактные метрические пространства. Пусть отображение $f: \{0\} \cup C^{-1}(K_1) \rightarrow \{0\} \cup C^{-1}(K_2)$ есть сюръективная ε -изометрия и $f(0) = 0$. Тогда существует такая сюръективная линейная изометрия $U: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$, что

$$\|f(a) - Ua\| \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } a \in \{0\} \cup C^{-1}(K_1). \quad (11)$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, мы приходим к сюръективной положительно однородной изометрии $U_0: \text{cl}(C^{-1}(K_1)) \rightarrow \text{cl}(C^{-1}(K_2))$, удовлетворяющей условию

$$\|f(a) - Ua\| \leq 4\varepsilon \quad \text{для всех } a \in \{0\} \cup C^{-1}(K_1). \quad (12)$$

Из того, что наши метрические пространства связны, вытекает, что

$$U_0(\text{cl}(C_+(K_1))) = \text{cl}(C_+(K_2)) \quad \text{или} \quad U_0(\text{cl}(C_+(K_1))) = \text{cl}(C_-(K_2)).$$

Так как $\text{cl}(C_+(K_1))$ и $\text{cl}(C_+(K_2))$ — выпуклые множества, то результат из [6, теорема 5] показывает, что отображение $U_0|_{\text{cl}(C_+(K_1))}$ однозначно продолжается до аффинной изометрии U , действующей из $C(K_1)$ на $C(K_2)$. Так как U_0 также является положительно однородным, то отображение U линейно.

Применяя лемму 3, видим, что $U|_{\text{cl}(C_-(K_1))} = U_0|_{\text{cl}(C_-(K_1))}$. Поэтому (11) следует из (12). $\square$

Замечание. Из классической теоремы Банаха–Стоуна следует, что для сюръективной изометрии $U: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ из теоремы 2 существует такой гомеоморфизм $\tau: K_2 \rightarrow K_1$ и такая константа $\alpha = \pm 1$, что $(Ua)(x) = \alpha a(\tau(x))$ для всех $a \in C(K_1)$ и $x \in K_2$. Поэтому неравенство (11) можно переписать в виде

$$|\delta_x(f(a)) - \alpha a(\tau(x))| \leq 4\varepsilon$$

для всех $a \in \{0\} \cup C^{-1}(K_1)$ и $x \in K_2$.

Благодарности. Авторы благодарят рецензентов за замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis I*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [2] L. Cheng, Y. Dong, W. Zhang, *On stability of nonlinear non-surjective ε -isometries of Banach spaces*, J. Funct. Anal., **264** (2013), 713–734.
- [3] O. Hatori, *Isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, Studia Math., **194** (2009), 293–304.
- [4] O. Hatori, *Algebraic properties of isometries between groups of invertible elements in Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl., **376**:1 (2011), 84–93.
- [5] D. H. Hyers, S. M. Ulam, *On approximate isometries*, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 288–292.
- [6] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., **20** (1972), 367–371.
- [7] P. Šemrl, *Hyers–Ulam stability of isometries on Banach spaces*, Aequationes Math., **58**:1–2 (1999), 157–162.
- [8] P. Šemrl, J. Väisälä, *Nonsurjective nearisometries of Banach spaces*, J. Funct. Anal., **198**:1 (2003), 268–278.

School of Mathematics and Computer,
Wuhan Textile University, Wuhan, China
e-mail: baiyunmu301@126.com

School of Mathematical Sciences,
Dalian University of Technology, Dalian, China
e-mail: ruishi@dlut.edu.cn

Поступила в редакцию
9 сентября 2013 г.