Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, О дискретном спектре гамильтонианов n -частичных систем при $n \rightarrow \infty$ в пространствах функций различной перестановочной симметрии, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:20:44

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что условиям теоремы 2 удовлетворяют логарифмически выпуклые функции, эквивалентные в окрестности единицы функции $\xi(t) = (1-t)^\alpha$ с $\alpha < 0$ или функции $\xi(t) = (1-t)^\alpha (\ln(1-t))^\beta$ с $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Yano, J. Math. Soc. Japan., **3**:2 (1951), 296–305. [2] Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, Функци. анализ и его прил., **34**:3 (2000), 66–68. [3] М. Milman, *Extrapolation and Optimal Decompositions: with Applications to Analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1580, Springer-Verlag, Berlin, 1994. [4] B. Jawerth, M. Milman, Memoirs Amer. Math. Soc., **89**:440 (1991), 1–82. [5] G. E. Karadzhov, M. Milman, J. Approx. Theory, **133**:1 (2005), 38–99. [6] С. В. Асташкин, Сиб. матем. журн., **46**:2 (2005), 264–289.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
e-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
24 мая 2013 г.

УДК 519.4

О дискретном спектре гамильтонианов n -частичных систем при $n \rightarrow \infty$ в пространствах функций различной перестановочной симметрии*

© 2015. Г. М. Жислин

1. При исследовании дискретного спектра операторов энергии H_n системы n тождественных частиц (во внешнем поле или без него) с учетом перестановочной симметрии обычно сначала фиксируется тип α неприводимого представления симметрической группы S_n , затем строится пространство функций $A^{(\alpha)}$, преобразующихся при перестановках по представлению типа α , и, наконец, изучается спектр сужения оператора H_n на построенное подпространство. Однако в случае систем n тождественных частиц с короткодействующими потенциалами взаимодействия при $n \rightarrow \infty$ существующие методы не позволяют применить эту схему напрямую. Дело в том, что эти методы дают лишь «асимптотические» результаты и не говорят ничего о дискретном спектре при произвольном фиксированном n . А следовательно, мы не можем фиксировать тип α представления группы S_n , ибо α определяется разбиением

$$n = n_1 + \dots + n_p \quad (1)$$

числа n на p ($1 \leq p \leq n$) целых положительных чисел $n_1 \geq \dots \geq n_p$, в то время как n мы фиксировать не можем (в рамках существующих методов). Поэтому, чтобы учесть перестановочную симметрию, приходится ограничивать оператор H_n не на одно пространство $A^{(\alpha)}$, а на сумму $E_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, пространств $A^{(\alpha)}$

*Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00458_а).

по некоторому множеству типов $\alpha = \alpha(n)$, определенному при любом n . Наиболее полные результаты в этом направлении получены в [1], где $E_n^{(i)}$ есть сумма пространств $A^{(\alpha)}$ по всем α , отвечающим разбиениям (1) с ограничением или на число слагаемых ($p \leq \bar{p}$, $i = 2$), или на наибольшее слагаемое ($n_1 \leq \bar{n}$, $i = 1$). Эти ограничения диктовались потребностями приложений, ибо обеспечивали получение результатов как для фермионных ($p \leq \bar{p}$), так и для бозонных ($n_1 \leq \bar{n}$) систем¹). Однако с математической точки зрения представляет интерес изучение спектра оператора H_n не только в таких широких пространствах, как $E_n^{(i)}$, но и в их подпространствах, а также во многих подпространствах, не содержащихся в $E_n^{(i)}$. Именно такое изучение проводится в настоящей заметке (теорема 1), где спектр оператора H_n исследуется в очень широком (возможно близком к максимальному для существующих методов) классе подпространств с ограничениями на перестановочную симметрию содержащихся в них функций.

2. Рассмотрим квантовую систему Z_n , состоящую из n тождественных между собой частиц. Пусть m — масса частицы, $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ — радиус-вектор i -й частицы, $V(|r_i - r_j|)$ — потенциал взаимодействия i -й и j -й частиц. Тогда оператор энергии системы Z_n имеет вид

$$\mathcal{H}_n = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \Delta_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n V(|r_i - r_j|),$$

где $\Delta_i = \partial^2/\partial x_i^2 + \partial^2/\partial y_i^2 + \partial^2/\partial z_i^2$. Мы предполагаем, что потенциалы $V(|r_1|)$ вещественны, $V(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и $V(|r_1|) \rightarrow 0$ при $|r_1| \rightarrow \infty$.

Пусть $R_0 = \{r \mid r = (r_1, \dots, r_n), \sum_{i=1}^n r_i = 0\}$ и H_n — сужение оператора $\mathcal{H}_n$ на пространство $\mathcal{L}_2(R_0)$. Очевидно, что H_n — оператор энергии относительного движения системы Z_n . Определим оператор H_n на множестве финитных дважды непрерывно дифференцируемых в R_0 функций и расширим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

3. Пусть $k \geq 1$ — любое число. Обозначим через $B_k = (b_1, \dots, b_k)$ и $I_k = (i_1, \dots, i_k)$ произвольные фиксированные наборы, состоящие каждый из k целых чисел, обладающих следующими свойствами:

$i_1 \geq 1$, $i_s < i_t$, $b_t \leq b_s$ при $s < t$;

$b_s > 0$ при $s < k$, $b_k \geq 0$; если $b_k = 0$, то $i_1 \geq 2$.

Для любых n и k обозначим через $E(n, I_k, B_k)$ множество всех типов α неприводимых представлений группы S_n , определяемых такими разбиениями (1) числа n , для которых

(i) число p слагаемых n_s в равенстве (1) произвольно, если $b_k \neq 0$, и $p \leq i_k - 1$ при $b_k = 0$;

(ii) для чисел n_t справедливы неравенства

$$n_{i_s} \leq b_s, \quad s = 1, \dots, q,$$

где $q = k$ при $b_k \neq 0$, $q = k - 1$ при $b_k = 0$ и $k \geq 2$; при $b_1 = 0$ ограничения на числа n_t отсутствуют.

На языке схем Юнга множество $E(n, I_k, B_k)$ — это совокупность всех типов α неприводимых представлений группы S_n , которые отвечают схемам Юнга

¹)В терминах схем Юнга [2] данные ограничения означали, что типы $\alpha(n)$ отвечают всем схемам Юнга с числом строк не больше $\bar{p}$ или с числом столбцов не больше $\bar{n}$.

с p строками, причем при $b_k \neq 0$ число строк произвольно (но, разумеется, $p \leq n$) и $p \leq i_k - 1$ при $b_k = 0$, а длины строк с номерами i_s не превосходят b_s , $s = 1, 2, \dots, q$, где $q = k$ при $b_k \neq 0$, $q = k - 1$ при $b_k = 0$ и $k \geq 2$; при $b_1 = 0$ ограничения на длины строк отсутствуют.

Обозначим через $P^{(\alpha)}$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций, преобразующихся при перестановках аргументов по представлению типа α группы S_n (см. [1]). Положим

$$H_n^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} H_n, \quad H_n(I_k, B_k) = \sum_{\alpha \in E(n; I_k, B_k)} H_n^{(\alpha)}.$$

Очевидно, что оператор $H_n(I_k, B_k)$ есть ограничение оператора H_n на подпространство

$$M(n; I_k, B_k) = \sum_{\alpha \in E(n; I_k, B_k)} P^{(\alpha)} \mathcal{L}_2(R_0).$$

4. Имеет место

Теорема 1. Пусть

$$V(|r_1|) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3) \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}^3} V(|r_1|) dr_1 < 0. \quad (2)$$

Тогда для каждой пары фиксированных наборов I_k, B_k существует такая последовательность чисел N_j , $j = 1, 2, \dots$, $N_j \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$, что оператор $H_n(I_k, B_k)$ при $n = N_j$ имеет непустой дискретный спектр.

Если дополнительно предположить, что $\inf_{r_1} V(|r_1|) > -\infty$, то $\sup_j N_{j+1} N_j^{-1} < +\infty$.

Замечания. 1. Требования (2) можно заменить более слабым условием, а именно, пусть $C(d)$ — куб в $\mathbb{R}^3$ с ребром $2d$, гранями, параллельными координатным плоскостям и центром в точке $(0,0,0)$. Тогда для справедливости теоремы 1 вместо условий (2) достаточно потребовать, чтобы для некоторого $d > 0$ выполнялось условие

$$\int_{r_1, r_2 \in C(d)} V(|r_1 - r_2|) dr_1 dr_2 < 0.$$

2. Утверждение теоремы 1 означает, что система Z_n устойчива в классе состояний из $M(n; I_k, B_k)$ при $n = N_j$, т. е. что для каждого $n = N_j$ существует $\alpha \in E(n; I_k, B_k)$, такой, что дискретный спектр $\sigma_d(H_n^{(\alpha)})$ оператора $H_n^{(\alpha)}$ непуст и что наименьшее собственное значение оператора $H_n^{(\alpha)}$ лежит слева от нижней границы существенного спектра оператора $H_n(I_k, B_k)$.

3. Теорема 1 справедлива и для n -частичных псевдорелятивистских систем.

4. Вопрос о зависимости чисел N_j от наборов I_k, B_k остается открытым.

5. Ранее аналогичный теореме 1 результат был известен лишь при $B_k = (b_1)$, $I_k = (i_1)$ и только в случаях, когда $b_1 \geq 1$, $i_1 = 1$ и $b_1 = 0$, $i_1 \geq 2$ [1].

В доказательстве теоремы 1 существенно используется следующая лемма 1.

Пусть $n' < n$, а α' и α — типы неприводимых представлений групп $S_{n'}$ и S_n . Будем писать $\alpha' < \alpha$, если неприводимое представление группы $S_{n'}$ типа α' содержится в представлении группы S_n типа α после сужения его с S_n на $S_{n'}$. Пусть $E' = \{\alpha' \mid \alpha' < \alpha, \alpha \in E(n; I_k, B_k)\}$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$E' = E(n'; I_k, B_k).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Жислин, ТМФ, **157:1** (2008), 116–129. [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.

Научно-исследовательский радиопизический институт
Государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Н. Новгород
e-mail: gzhislin@yandex.ru

Поступила в редакцию
11 сентября 2013 г.

УДК 517.956.25

Множественность концентрирующихся на кривых положительных решений задачи Дирихле для уравнения с p -лапласианом*

© 2015. С. Б. Колоницкий

В заметке исследуется эффект множественности решений краевой задачи

$$-\Delta_p u = u^{q-1} \quad \text{в } \Omega_R, \quad u > 0 \quad \text{в } \Omega_R, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_R \quad (1)$$

в расширяющемся шаровом слое $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : R < |x| < R + 1\}$. Здесь $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ есть p -лапласиан, $1 < p < \infty$ и $q > p$.

Множественность решений задачи (1) в полулинейном случае $p = 2$ исследовалась во многих работах, начиная с [2]. Термин «множественность» означает, что для любого натурального K существует $R_0 = R_0(p, q, K)$, такое, что для всех $R > R_0$ задача (1) имеет не менее K неэквивалентных (т.е. не получаемых друг из друга вращениями) решений. Этот эффект был обнаружен в [2] для $n = 2$ и в [4] для $n \geq 4$. В этих статьях решения краевой задачи (1) получались как точки глобального минимума функционала энергии на пространствах функций с некоторыми симметриями. Случай $n = 3$ был исследован в [1], где решения искались как точки локального минимума функционала энергии. Решения, полученные во всех этих статьях, концентрируются в окрестности дискретного множества точек. В [5] были построены решения, концентрирующиеся в окрестности некоторых многообразий.

Однако методы этих статей не могут быть прямо перенесены на квазилинейную задачу (1) в случае произвольного $p \in (1, \infty)$. Наиболее часто используемый в этих работах метод основан на принципе сравнения. А именно, сравнивая решение со специально построенными барьерными функциями, авторы этих статей получают тонкие поточечные оценки решения, применяемые затем при доказательстве множественности. Такие барьеры легко строятся в полулинейном случае, но для квазилинейной задачи построить подходящие барьеры пока не удалось.

*Работа поддержана грантом СПбГУ 6.38.670.2013.