Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Нурсултанов, М. В. Ружанский, С. Ю. Тихонов, Неравенство Никольского и функциональные классы на компактных группах Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:53:46

Этот факт (аппроксимативная расщепляемость) можно рассматривать как вариант разложимости произвольного представления в «прямую сумму» последовательности унитарных представлений (в $E_k = H_{k-1} \oplus H_k$) и представления в конечномерном (возможно, вырожденном) подпространстве $\bigcap_m H_m$. Отметим, что для группы Лоренца подобный результат был получен в [2].

Представляет интерес и другой вариант разложимости (уже в конечную J -ортогональную прямую сумму). Будем называть представление в Π_k -пространстве H Π -разложимым, если $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 и H_2 инвариантны и не положительны. В противном случае скажем, что представление Π -неразложимо. Ясно, что всякое представление является прямой суммой конечного числа Π -неразложимых. Для представлений в конечномерных пространствах такое разложение единственно (с точностью до изоморфизма), а в общем случае ответ пока не известен. Вопрос о классификации конечномерных Π -неразложимых представлений тоже пока далек от полного решения.

Назовем представление примарным, если его сужение на максимальное инвариантное нейтральное подпространство монотетично. Следующий результат является ответом на один из вопросов, которые привели к появлению данной работы.

Теорема 9. (i) *Если группа G коммутативна, то все ее Π -неразложимые представления примарны.*

(ii) *Существует Π -неразложимое представление группы Гейзенберга T_3 , не являющееся примарным.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. С. Исмагилов, Матем. заметки, **35**:1 (99–105). [2] Р. С. Исмагилов, Изв. АН СССР, сер. матем., **30**:3 (1966), 497–522. [3] А. А. Кириллов, Функц. анализ и его прил., **2**:1 (1968), 96–98. [4] E. R. Kolchin, Ann. of Math., **49**:1 (1948), 1–42. [5] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **27**:6 (1963), 1181–1185.

STORM, London Metropolitan University
e-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Поступила в редакцию
27 августа 2014 г.

Вологодский государственный университет
e-mail: shulman.victor80@gmail.com

УДК 517.5

Неравенство Никольского и функциональные классы на компактных группах Ли*

© 2015. Е. Д. НУРСУЛТАНОВ, М. В. РУЖАНСКИЙ, С. Ю. ТИХОНОВ

1. Введение. Классическое неравенство Никольского для тригонометрических полиномов T_L степени не выше, чем L , записывается следующим образом [7]:

$$\|T_L\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq 2L^{1/p-1/q} \|T_L\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

*Первый автор был поддержан грантами МОН РК 4080 ГФ-4, 3311 ГФ-4. Второй автор был поддержан EPSRC Leadership Fellowship, EPSRC грант EP/K039407/1, и Leverhulme Grant RPG-2014-02. Третий автор был поддержан грантами 2014-SGR-289 от AGAUR (Generalitat de Catalunya), MTM2014-59174-P и РФФИ-13-01-00043.

где $1 \leq p < q \leq \infty$. Неравенство Никольского играет важную роль в изучении свойств различных функциональных пространств (см., например, [14]) и в теории приближений (см., например, [3]).

В более общем случае для функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, таких, что $\text{supp}(\hat{f})$ есть компакт (см. [6]), имеем

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq (C(p)\mu(\text{conv}[\text{supp}(\hat{f})]))^{1/p-1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (1)$$

где $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\mu(E)$ — мера Лебега множества E и $\text{conv}[E]$ — выпуклая оболочка этого множества. Неравенства типа (1) часто называют неравенствами Планшереля–Пойа–Никольского.

Недавно Песенсон в работе [10] получил неравенство Бернштейна–Никольского на некомпактных симметрических пространствах, а в работе [9] — на компактных однородных пространствах.

Пусть G — компактная группа Ли размерности $\dim G$; ее (унитарное) дуальное пространство обозначим через $\hat{G}$. Фиксируя базис в пространствах представлений, мы можем работать с матричным представлением $\xi: G \rightarrow \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$ степени d_ξ . По теореме Петера–Вейля система $\{\sqrt{d_\xi} \xi_{ij} : [\xi] \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq d_\xi\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(G)$ по отношению к нормализованной мере Хаара на G . Интегралы ниже и пространства $L^p(G)$ всегда рассматриваются по отношению к нормализованной биинвариантной мере Хаара на G .

Для $f \in C^\infty(G)$ коэффициент Фурье при $\xi \in [\xi] \in \hat{G}$ определяется так:

$$\hat{f}(\xi) = \int_G f(x) \xi(x)^* dx.$$

Таким образом, $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$. Ряд Фурье функции f записывается в виде

$$f(x) = \sum_{[\xi] \in \hat{G}} d_\xi \text{Tr}(\hat{f}(\xi) \xi(x)). \quad (2)$$

Для $[\xi] \in \hat{G}$ через $\langle \xi \rangle$ мы обозначаем собственное значение оператора $(I - \mathcal{L}_G)^{1/2}$, соответствующее классу представлений $[\xi] \in \hat{G}$, где $\mathcal{L}_G$ — оператор Лапласа на G , см., например, [13, гл. 1.7].

Следуя [11], определим пространства Лебега $\ell^p(\hat{G})$ на $\hat{G}$, используя коэффициенты Фурье функции f :

$$\|\hat{f}\|_{\ell^p(\hat{G})} = \left(\sum_{[\xi] \in \hat{G}} d_\xi^{p(2/p-1/2)} \|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\hat{G})} = \sup_{[\xi] \in \hat{G}} d_\xi^{-1/2} \|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}},$$

где $\|\hat{f}(\xi)\|_{\text{HS}} = \text{Tr}(\hat{f}(\xi) \hat{f}(\xi)^*)^{1/2}$. Для этих пространств справедливы неравенства Хаусдорфа–Юнга:

$$\|\hat{f}\|_{\ell^{p'}(\hat{G})} \leq \|f\|_{L^p(G)}, \quad \|f\|_{L^{p'}(G)} \leq \|\hat{f}\|_{\ell^p(\hat{G})}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

Пусть $N(L)$ — функция Вейля для эллиптического псевдодифференциального оператора $(1 - \mathcal{L}_G)^{1/2}$, обозначающая число его собственных значений, не

превосходящих L , с учетом их кратности. Тогда

$$N(L) = \sum_{\langle \xi \rangle \leq L, [\xi] \in \widehat{G}} d_{\xi}^2.$$

Для достаточно больших L асимптотическая формула Вейля показывает, что

$$N(L) \sim C_0 L^n, \quad C_0 = (2\pi)^{-n} \int_{\sigma_1(x, \omega) < 1} dx d\omega,$$

где $n = \dim G$ и интеграл берется по отношению к мере на кокасательном расслоении $T^*(G)$, индуцированном канонической симплектической структурой. Здесь σ_1 обозначает главный символ оператора $(1 - \mathcal{L}_G)^{1/2}$, см., например, [12].

Полные доказательства результатов этой заметки будут опубликованы в [8].

2. Неравенство Никольского. Пусть T — тригонометрический полином на компактной группе Ли G , т. е. функция, у которой только конечное число коэффициентов Фурье не обращается в нуль. Обозначим через D ядро типа Дирихле, т. е. $D \in C^\infty(G)$, такое, что

$$\widehat{D}(\xi) := \begin{cases} I_{d_\xi} & \text{для } \langle \xi \rangle \leq L, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $I_{d_\xi} \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$ — единичная матрица.

Теорема 1. Пусть $0 < p < q \leq \infty$. Для $0 < p \leq 2$ положим $\rho := 1$, а для $2 < p < \infty$ определим ρ как наименьшее целое, большее или равное $p/2$. Тогда

$$\|T\|_{L^q(G)} \leq \left(\sum_{\widehat{T^p}(\xi) \neq 0} d_{\xi}^2 \right)^{1/p-1/q} \|T\|_{L^p(G)}.$$

Более того, это неравенство является строгим для $p = 2$ и $q = \infty$, а для $T = D$ имеет место равенство.

Заметим, что для тригонометрических полиномов нескольких переменных неравенство Никольского хорошо известно [7].

Замечание. Заметим, что если $T = T_L$, т. е. если $\widehat{T}(\xi) = 0$ для $\langle \xi \rangle > L$, то $\sum_{\widehat{T}(\xi) \neq 0} d_{\xi}^2 \leq N(L)$ и, следовательно,

$$\|T_L\|_{L^q(G)} \leq N(\rho L)^{1/p-1/q} \|T_L\|_{L^p(G)} \asymp (\rho L)^{n(1/p-1/q)} \|T_L\|_{L^p(G)}.$$

Для частичной суммы ряда Фурье функции f

$$S_L f(x) = \sum_{\langle \xi \rangle \leq L} d_{\xi} \operatorname{Tr}(\widehat{f}(\xi) \xi(x))$$

можно доказать следующий результат.

Следствие 2. Пусть G — компактная группа Ли, и пусть p, q удовлетворяют условиям $1 \leq p < q \leq \infty$ и $1/p > 1/q + 1/2$. Для $f \in L^p(G)$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^{1-1/p+1/q} \sup_{N(L) \geq k} (N(L))^{-1} \|S_L f\|_{L^q(G)})^p}{k} \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{L^p(G)}.$$

В частности, $N(L)^{1/q-1/p} \|S_L f\|_{L^q(G)} = o(1)$ при $L \rightarrow \infty$.

3. Вложение функциональных классов. Ниже мы исследуем теоремы вложения и интерполяционные свойства функциональных классов на компактных группах Ли G . Используя определение ряда Фурье (2), мы введем пространства Соболева, Бесова и Трибеля–Лизоркина соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} H_p^r &= H_p^r(G) = \{f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_{H_p^r} := \|(1 - \mathcal{L}_G)^{r/2} f\|_p < \infty\}, \\ B_{p,q}^r &= B_{p,q}^r(G) \\ &= \left\{ f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_{B_{p,q}^r} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{srq} \left\| \sum_{2^s \leq \langle \xi \rangle < 2^{s+1}} d_{\xi} \operatorname{Tr}(\widehat{f}(\xi) \xi(x)) \right\|_p^q \right)^{1/q} < \infty \right\}, \\ F_{p,q}^r &= F_{p,q}^r(G) \\ &= \left\{ f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_{F_{p,q}^r} := \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{srq} \left\| \sum_{2^s \leq \langle \xi \rangle < 2^{s+1}} d_{\xi} \operatorname{Tr}(\widehat{f}(\xi) \xi(x)) \right\|_p^q \right)^{1/q} \right\|_p < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 3. Пусть G — компактная группа Ли размерности n . Тогда

- (i) $B_{p_1,q}^{r_1} \hookrightarrow B_{p_2,q}^{r_2}$, $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $r_2 = r_1 - n(1/p_1 - 1/p_2)$;
- (ii) $B_{p,\min\{p,2\}}^r \hookrightarrow H_p^r \hookrightarrow B_{p,\max\{p,2\}}^r$, $r \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$;
- (iii) $B_{p,q}^r \hookrightarrow L_q$, $1 < p < q < \infty$, $r = n(1/p - 1/q)$;
- (iv) $B_{p,1}^r \hookrightarrow L_{\infty}$, $0 < p \leq \infty$, $r = n/p$;
- (v) $B_{p,\min\{p,q\}}^r \hookrightarrow F_{p,q}^r \hookrightarrow B_{p,\max\{p,q\}}^r$, $1 < p < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$;
- (vi) $(B_{p,\beta_0}^{r_0}, B_{p,\beta_1}^{r_1})_{\theta,q} = (H_p^{r_0}, H_p^{r_1})_{\theta,q} = (F_{p,\beta_0}^{r_0}, F_{p,\beta_1}^{r_1})_{\theta,q} = B_{p,q}^r$, $0 < r_1 < r_0 < \infty$, $0 < \beta_0, \beta_1, q \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $r = (1 - \theta)r_0 + \theta r_1$, $0 < \theta < 1$.

Для функций на многомерном торе соответствующие результаты можно найти, например, в монографии [14].

Далее, используя нормы (3) и (4), мы исследуем теоремы вложения классов Винара и Берлинга

$$A^{\beta}(\widehat{G}) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(G) : \|f\|_{A^{\beta}} := \|\widehat{f}\|_{\ell^{\beta}(\widehat{G})} = \left(\sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_{\xi}^{\beta(2/\beta - 1/2)} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}}^{\beta} \right)^{1/\beta} < \infty \right\}$$

и

$$A^{*,\beta}(\widehat{G}) = \left\{ f : \|f\|_{A^{*,\beta}(\widehat{G})} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{ns} \left(\sup_{2^s \leq \langle \xi \rangle} d_{\xi}^{-1/2} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}} \right)^{\beta} \right)^{1/\beta} < \infty \right\},$$

где $0 < \beta < \infty$. Для периодических функций, т. е. при $G = \mathbb{T}^n$, $d_{\xi} \equiv 1$ с $\widehat{G} \simeq \mathbb{Z}^n$ и $\|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{HS}} = |\widehat{f}(\xi)|$ эти классы изучались, например, в [2], [1] и [15, гл. 6].

Теорема 4. Пусть G — компактная группа Ли размерности n .

(А) Пусть $\alpha > 0$ и $1/\beta = n/\alpha + 1/p'$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{A^{\beta}} &\leq C \|f\|_{B_{p,\beta}^{\alpha}}, & 1 < p \leq 2, \\ \|f\|_{B_{p,\beta}^{\alpha}} &\leq C \|f\|_{A^{\beta}}, & 2 \leq p < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

(В) Пусть $0 < \beta < \infty$ и $p \geq 2$. Тогда

$$C_1 \|f\|_{B_{p,\beta}^{n(1/\beta - 1/p')}} \leq \|f\|_{A^{*,\beta}} \leq C_2 \|f\|_{B_{1,\beta}^{n/\beta}}.$$

Как следствие имеем

$$C_1 \|f\|_{A^\beta} \leq \|f\|_{B_{2,\beta}^{n(1/\beta-1/2)}} \leq C_2 \|f\|_{A^{*,\beta}}.$$

Левое неравенство — аналог теоремы Бернштейна об абсолютной сходимости рядов Фурье — усиливает следующее утверждение, доказанное Фаро в [4] для унитарной группы G : если $f \in C^k(G)$ для четного $k > (\dim G)/2$, то $\widehat{f} \in \ell^1(\widehat{G})$, т. е. $f \in A(G)$. Для периодических функций нескольких переменных неравенство (5) следует из результатов работы [5].

Наконец, мы исследуем следующие классы типа классов Берлинга:

$$A_r^{*,\beta} = \left\{ f : \|f\|_{A_r^{*,\beta}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{rns} \sup_{2^s \leq \xi} d_\xi^{-1/2} \|\widehat{f}(\xi)\|_{\text{нс}} \right)^\beta \right)^{1/\beta} < \infty \right\}.$$

Заметим, что $A_{1/\beta}^{*,\beta} = A^{*,\beta}$. Данные классы являются интерполяционными в следующем смысле.

Теорема 5. Пусть $0 < r_1 < r_0 < \infty$, $0 < \beta_0, \beta_1, q \leq \infty$, $r = (1 - \theta)r_0 + \theta r_1$ и $0 < \theta < 1$. Тогда

$$(A_{r_0}^{*,\beta_0}, A_{r_1}^{*,\beta_1})_{\theta,q} = A_r^{*,q}.$$

В частности,

$$(A^{*,1/r_0}, A^{*,1/r_1})_{\theta,1/r} = A^{*,1/r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. S. Belinskii, E. R. Liflyand, R. M. Trigub, J. Fourier Anal. Appl., **3**:2 (1997), 103–129. [2] A. Beurling, Acta Math., **81**:1 (1949), 225–238. [3] Z. Ditzian, S. Tikhonov, J. Approx. Theory, **133**:1 (2005), 100–133. [4] J. Faraut, *Analysis on Lie Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. [5] S. Minakshisundaram, O. Szász, Trans. Amer. Math. Soc., **61** (1947), 36–53. [6] R. J. Nessel, G. Wilmes, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **25**:1 (1978), 7–18. [7] С. М. Никольский, в кн.: Труды МИАН, т. 38, Изд-во АН СССР, М., 1951, 244–278. [8] E. Nursultanov, M. Ruzhansky, S. Tikhonov, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (to appear); <http://arxiv.org/abs/1403.3430>. [9] I. Pesenson, J. Approx. Theory, **150**:2 (2008), 175–198. [10] I. Pesenson, Math. Nachr., **282**:2 (2009), 253–269. [11] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-differential Operators and Symmetries. Background Analysis and Advanced Topics*. Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications, Vol. 2, Birkhäuser, Basel, 2010. [12] М. А. Пшубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978. [13] E. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood–Paley Theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970. [14] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983. [15] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова (Казахстанский филиал)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, Астана
e-mail: er-nurs@yandex.ru

Department of Mathematics Imperial College London
e-mail: m.ruzhansky@imperial.ac.uk

ICREA and Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Barcelona
e-mail: stikhonov@crm.cat

Поступила в редакцию
20 сентября 2013 г.