Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Колоницкий, Множественность концентрирующихся на кривых положительных решений задачи Дирихле для уравнения с p -лапласианом, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 88–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:28:27

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$E' = E(n'; I_k, B_k).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Жислин, ТМФ, **157:1** (2008), 116–129. [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.

Научно-исследовательский радиопизический институт
Государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Н. Новгород
e-mail: gzhislin@yandex.ru

Поступила в редакцию
11 сентября 2013 г.

УДК 517.956.25

Множественность концентрирующихся на кривых положительных решений задачи Дирихле для уравнения с p -лапласианом*

© 2015. С. Б. Колоницкий

В заметке исследуется эффект множественности решений краевой задачи

$$-\Delta_p u = u^{q-1} \quad \text{в } \Omega_R, \quad u > 0 \quad \text{в } \Omega_R, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_R \quad (1)$$

в расширяющемся шаровом слое $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : R < |x| < R + 1\}$. Здесь $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ есть p -лапласиан, $1 < p < \infty$ и $q > p$.

Множественность решений задачи (1) в полулинейном случае $p = 2$ исследовалась во многих работах, начиная с [2]. Термин «множественность» означает, что для любого натурального K существует $R_0 = R_0(p, q, K)$, такое, что для всех $R > R_0$ задача (1) имеет не менее K неэквивалентных (т.е. не получаемых друг из друга вращениями) решений. Этот эффект был обнаружен в [2] для $n = 2$ и в [4] для $n \geq 4$. В этих статьях решения краевой задачи (1) получались как точки глобального минимума функционала энергии на пространствах функций с некоторыми симметриями. Случай $n = 3$ был исследован в [1], где решения искались как точки локального минимума функционала энергии. Решения, полученные во всех этих статьях, концентрируются в окрестности дискретного множества точек. В [5] были построены решения, концентрирующиеся в окрестности некоторых многообразий.

Однако методы этих статей не могут быть прямо перенесены на квазилинейную задачу (1) в случае произвольного $p \in (1, \infty)$. Наиболее часто используемый в этих работах метод основан на принципе сравнения. А именно, сравнивая решение со специально построенными барьерными функциями, авторы этих статей получают тонкие поточечные оценки решения, применяемые затем при доказательстве множественности. Такие барьеры легко строятся в полулинейном случае, но для квазилинейной задачи построить подходящие барьеры пока не удалось.

*Работа поддержана грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

Множественность решений задачи с p -лапласианом в случае произвольного $p \in (1, \infty)$ была установлена в [8] для $n = 2$ и в [7] для $n \geq 4$. Трехмерный случай был разобран в [3]. Методы, применяемые в этих статьях, не используют теоремы сравнения и опираются только на интегральные оценки решений и принцип концентрации. Построенные решения концентрируются в окрестности дискретного множества точек, и эффект множественности возникает только при $q \in (p, p_n^*)$ (здесь p_n^* — критический соболевский показатель вложения, определяемый соотношением $(p_n^*)^{-1} = (p^{-1} - n^{-1})_+$). В [7] было также доказано существование (но не множественность) решений, концентрирующихся в окрестности многообразий.

Мы устанавливаем множественность решений задачи (1) в случае $n = 4$ или $n \geq 6$, произвольного p и $q \in (p, p_{n-1}^*)$ (заметим, что $p_{n-1}^* > p_n^*$, если $p < n$). Построенные решения концентрируются в окрестности некоторых кривых.

Под решением понимается обобщенное решение из класса $\dot{W}_p^1(\Omega_R)$.

Будем говорить, что последовательность функций v_i концентрируется в окрестности последовательности множеств A_i , если выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, такое, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{\{x: \text{dist}(x, A_i) > N\}} |v_i|^q dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^n} |v_i|^q dx \right) < \varepsilon.$$

1. Результаты. В случае $n = 4$ рассмотрим группу $\mathcal{G}_j$, $j \geq 2$, порожденную матрицами

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_j = \begin{pmatrix} T_{2\pi/j} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} T_\varphi & 0 \\ 0 & T_\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{где } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Здесь I_2 — единичная матрица порядка 2, а T_φ — матрица вращения на угол φ :

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Точку $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$ обозначим через M . Отметим, что множество $\mathcal{G}_j M$ состоит из j непересекающихся замкнутых кривых.

Теорема 1. Пусть $n = 4$, $p \in (1, \infty)$, $q \in (p, p_3^*)$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. Тогда существует $R_0 = R_0(p, q, j)$, такое, что для всех $R > R_0$ краевая задача (1) имеет положительное $\mathcal{G}_j$ -инвариантное решение, концентрирующееся в окрестности множества $R \cdot \mathcal{G}_j M$.

В случае $n \geq 6$ введем разложение пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{n-4}$ и рассмотрим группу $\mathcal{G}'_j = \mathcal{G}_j \times \mathcal{O}(n-4)$. Точку $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$ обозначим через M . Отметим, что множество $\mathcal{G}'_j M$ состоит из j непересекающихся замкнутых кривых.

Теорема 2. Пусть $n \geq 6$, $p \in (1, \infty)$, $q \in (p, p_{n-1}^*)$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$. Тогда существует $R_0 = R_0(n, p, q, j)$, такое, что для всех $R > R_0$ краевая задача (1) имеет положительное $\mathcal{G}'_j$ -инвариантное решение, концентрирующееся в окрестности множества $R \cdot \mathcal{G}'_j M$.

Следствие 1. Пусть $n = 4$ или $n \geq 6$, $p \in (1, \infty)$, $q \in (p, p_{n-1}^*)$. Тогда для любого натурального K существует $R_0 = R_0(n, p, q, K)$, такое, что для

всех $R > R_0$ задача (1) имеет не менее K неэквивалентных положительных решений.

Замечание 1. Если $p < n$, то $p_{n-1}^* > p_n^*$ и теоремы 1 и 2 устанавливают множественность решений задачи (1) при суперкритическом росте правой части.

Замечание 2. Вопрос о справедливости утверждения, аналогичного теоремам 1 и 2, в размерности $n = 5$ остается открытым.

Если n достаточно велико, можно рассмотреть более общие группы симметрий и получить решения, отличные от полученных в предыдущих теоремах.

Пусть, например, $n = 2m$, и пусть группа $\widetilde{\mathcal{G}}_j$ порождена $n \times n$ -матрицами

$$\mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} T_\varphi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_\varphi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_j = \begin{pmatrix} T_{2\pi/j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \delta_{1,\sigma(1)} I_2 & \delta_{1,\sigma(2)} I_2 & \dots & \delta_{1,\sigma(m)} I_2 \\ \delta_{2,\sigma(1)} I_2 & \delta_{2,\sigma(2)} I_2 & \dots & \delta_{2,\sigma(m)} I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m,\sigma(1)} I_2 & \delta_{m,\sigma(2)} I_2 & \dots & \delta_{m,\sigma(m)} I_2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma \in S(m)$ — произвольная перестановка.

Точку $(\underbrace{1/\sqrt{l}, 0, \dots, 1/\sqrt{l}, 0}_{l \text{ раз}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2l \text{ раз}})$, $l = 2, \dots, m$, обозначим через M_l . Отметим, что множество $\widetilde{\mathcal{G}}_j M_l$ состоит из $j^{l-1} \cdot C_m^l$ непересекающихся замкнутых кривых, причем выпуклая оболочка каждой кривой имеет размерность $2l$.

Теорема 3. Пусть $m \geq 3$, $n = 2m$, $p \in (1, \infty)$, $q \in (p, p_{n-1}^*)$, $l \in \{2, \dots, m\}$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k_0(m)$. Тогда существует $R_0 = R_0(p, q, n, j)$, такое, что для всех $R > R_0$ краевая задача (1) имеет положительное $\widetilde{\mathcal{G}}_j$ -инвариантное решение, концентрирующееся в окрестности множества $R \cdot \mathcal{G}_j M_l$.

В общем случае можно ввести разложение пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{n-2m}$, $n-2m \geq 2$, рассмотреть группу $\widetilde{\mathcal{G}}'_j = \widetilde{\mathcal{G}}_j \times \mathcal{O}(n-2m)$ и также получить решения, отличные от построенных при доказательстве теоремы 2.

2. Схема доказательства. Основная идея доказательства состоит в следующем: показывается, что существует одна или несколько последовательностей точек, в окрестности орбит которых при $R \rightarrow \infty$ концентрируется последовательность минимайзеров функционала энергии

$$J[u] = \int_{\Omega_R} |\nabla u|^p dx \Big/ \left(\int_{\Omega_R} |u|^q dx \right)^{p/q}.$$

Эти последовательности назовем последовательностями концентрации. Для них оказываются верными два принципа, которые можно условно назвать принципом единственной орбиты и принципом минимальной орбиты.

Принцип единственной орбиты формулируется так: при прочих равных одна последовательность концентрации энергетически выгоднее, чем две.

Принцип минимальной орбиты формулируется так: при прочих равных энергетически выгоднее та последовательность концентрации, у орбит членов которой меньше размерность, а из последовательностей с орбитами минимальной размерности k энергетически выгодна та, орбиты проекций членов которой на единичную сферу имеют наименьшую хаусдорфову меру $\mathcal{H}_k$.

Таким образом, глобальные минимайзеры функционала энергии обязаны иметь при $R \rightarrow \infty$ единственную последовательность концентрации, причем проекция ее членов на единичную сферу постоянна и орбита этой проекции имеет наименьшую размерность и меру $\mathcal{H}_k$. Такие орбиты мы будем называть (глобально) минимальными для группы. Локально минимальной орбитой мы будем называть такую, что в некоторой ее окрестности все остальные орбиты либо имеют большую размерность, либо имеют большую меру $\mathcal{H}_k$.

Подход с использованием глобального минимума функционала энергии сработал для точечной концентрации: при $n \neq 3$ легко строятся группы симметрий, такие, что их минимальные орбиты имеют размерность 0 и существенно различны.

При этом для $n = 3$ в [6] доказано, что подход с использованием глобального минимума энергии не может дать более 6 различных решений. В работах [1] и [3] решение строилось как локальный минимайзер функционала энергии. Этот же подход применен и в настоящей работе.

Заметим, что в использованных группах глобально минимальные орбиты одни и те же при всех $j \in \mathbb{N}$, но локально минимальные орбиты различны для различных j , причем как те, так и другие имеют размерность 1 (именно это и не удастся обеспечить в случае $n = 5$). Поэтому сначала среди всех орбит под действием данной группы $\mathcal{G}$ на единичной сфере выделяются две орбиты: глобально минимальная $\mathcal{G}y$ и локально минимальная $\mathcal{G}z$. Желательно, чтобы решение концентрировалось вблизи $R \cdot \mathcal{G}z$. Для этого вводится открытый конус $A_{\mathcal{K}}$, содержащий $\mathcal{G}y$ и отделенный от $\mathcal{G}z$. Функционал энергии $J[u]$ минимизируется на функциях из $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_R)$, инвариантных относительно $\mathcal{G}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\int_{A_{\mathcal{K}} \cap \Omega_R} |u|^q dx \leq \delta \int_{\Omega_R} |u|^q dx. \quad (2)$$

Затем доказывается, что при $\delta < \mathcal{H}_1(\mathcal{G}y)/(\mathcal{H}_1(\mathcal{G}y) + \mathcal{H}_1(\mathcal{G}z))$ для минимайзера u при достаточно больших R в (2) выполняется строгое неравенство. Поэтому ограничение (2) неактивно и соответствующий множитель Лагранжа равен нулю. Из этого следует, что u является локальным минимайзером функционала энергии и, следовательно, решением краевой задачи (1). Положительность u следует из неравенства Харнака для супер- p -гармонических функций. Наконец, так как для разных групп множества концентрации (локально минимальные орбиты) имеют разную форму, минимайзеры с различными группами симметрий различны при достаточно больших R .

Автор признателен А. И. Назарову и В. Г. Осмоловскому за замечания, которые способствовали улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Byeon, J. Differential Equations, **136**:1 (1997), 136–165. [2] C. V. Coffman, J. Differential Equations, **54** (1984), 429–437. [3] С. Б. Колоницкий, Алгебра и анализ, **22**:3 (2010), 206–221. [4] Y. Y. Li, J. Differential Equations, **83**:2 (1990), 348–367.

[5] A. Malchiodi, Boll. Unione Mat. Ital., Ser. B, **8**:3 (2005), 615–628. [6] N. Mizoguchi, T. Suzuki, Houston J. Math., **22**:1 (1996), 199–215. [7] А. И. Назаров, Труды С.-Петербург. МО, **10** (2004), 33–62. [8] А. И. Назаров, Пробл. матем. анализа, **20** (2000), 171–190.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: sergey.kolonitskii@gmail.com

Поступила в редакцию
21 января 2014 г.

УДК 517.9

Корректность для одного класса популяционных уравнений с зависимостью от возраста*

© 2015. Джань-Дун Мэй, Цзи-Гэнь Пэн

1. Введение. Рассмотрим следующую задачу для популяционного уравнения с зависимостью от возраста и запаздыванием, описывающего процесс рождения и смерти с учетом смерти по причине беременности:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t, a)}{\partial t} = -\frac{\partial x(t, a)}{\partial a} - \mu(a)x(t, a) - \alpha(a)x(t - r, a), \\ x(t, 0) = \int_0^\infty \int_{-r}^0 \beta(\sigma, a)x(t + \sigma, a) d\sigma da, & t \geq 0, \\ x(s, a) = q(s, a), & s \in [-r, 0], a \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $r > 0$, $0 \leq \mu, \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\beta \in L^\infty([-r, 0] \times \mathbb{R}^+)$. Это уравнение представляет плотность населения возраста a в момент t . Функции μ и α — это смертность по естественным причинам и смертность по причине беременности соответственно, а β — коэффициент рождаемости. Уравнение

$$x(t, 0) =: B(t) = \int_0^\infty \int_{-r}^0 \beta(\sigma, a)x(t + \sigma, a) d\sigma da, \quad t \geq 0,$$

называется процессом рождения.

Для случая, когда $\alpha = 0$, такие модели были введены Лоткой в 1925 г. и изучались многими авторами. В [2] и [8] к популяционным уравнениям успешно применялась теория полугрупп. В частности, в [2] систематически изучено асимптотическое поведение решения задачи (1) для случая, когда процесс рождения задан соотношением $B(t) = \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da$, $t \geq 0$, где β — коэффициент рождаемости. В недавних работах [6] и [7] доказано, что задача (1) корректна при $\alpha = 0$, и изучены асимптотические свойства ее решения.

*Работа выполнена при поддержке Фонда естественных наук Китая (гранты 11301412 и 11131006), Исследовательского фонда для докторских программ высших школ Китая (грант 20130201120053), Фонда естественных наук провинции Шаньси Китая (грант 2014JQ1017), проекта Постдокторального научного фонда Китая (2014M550482) и Фонда фундаментальных исследований для центральных университетов (контракт 2012jdzh52). Часть работы была выполнена во время визита первого автора к профессору Биргит Якоб в Вуппертальский университет, Германия.