Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Гирао, В. Монтесинос, Полнота в топологии
Макки, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49,
выпуск 2, 21–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:03:27

Полнота в топологии Макки*

© 2015. А. Х. ГИРАО, В. МОНТЕСИНОС

К семидесятилетию Вацлава Зизлера

Х. Бонет и Б. Каскалес [Bull. Aust. Math. Soc., **81**, 3 (2010), 409–413], отвечая на вопрос М. Кунце и В. Арендта, привели пример нормирующего замкнутого по норме подпространства N пространства X^* , сопряженного к банахову пространству X , такого, что пространство X неполно в топологии Макки $\mu(X, N)$, ассоциированной с дуальной парой $\langle X, N \rangle$. В этой заметке мы в более общем контексте докажем как положительные, так и отрицательные результаты о полноте в такого рода топологиях и, следовательно, предложим широкие классы примеров такого типа. Более того, в наших примерах используются подпространства N пространства X^* , которые содержат предсопряженное к пространству X пространство P при условии что оно существует; это показывает, что явление неполноты, которым интересовались Кунце и Арендт, встречается относительно часто, причем даже для «хорошо расположенных» подпространств сопряженного пространства. Мы также конкретизируем эту ситуацию для типичного банахова пространства, не имеющего предсопряженных подпространств, — пространства c_0 — и для пространства Джеймса J .

§1. Введение

Топология Макки $\mu(E, F)$ на E , ассоциированная с дуальной парой $\langle E, F \rangle$, есть топология на E равномерной сходимости на семействе всех абсолютно выпуклых и $w(F, E)$ -компактных подмножеств пространства F , где $w(F, E)$ обозначает ограничение на F топологии поточечной сходимости в $\mathbb{R}^E$. По теореме Макки–Аренса (см., например, [9, §21.4(2)] или [2, теорема 3.41]) эта топология является сильнейшей локально выпуклой топологией на E , совместимой с дуальной парой $\langle E, F \rangle$ (т.е. такой, что сопряженное к $(E, \mu(E, F))$ пространство совпадает с F). Разумеется, задаваемая нормой топология нормированного пространства X совпадает с топологией Макки $\mu(X, X^*)$ в силу w^* -компактности замкнутого единичного шара сопряженного пространства.

Топологическое векторное пространство $(E, \mathcal{T})$ имеет ассоциированную равномерность, индуцирующую его топологию $\mathcal{T}$. Эта равномерность определена однозначно, если требовать, чтобы она имела трансляционно-инвариантную базу. Такая база — это в точности $\{N_U : U \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ есть база поглощающих уравновешенных окрестностей нуля 0 в $(E, \mathcal{T})$, а $N_U := \{(x, y) \in E \times E : y - x \in U\}$ для всех $U \in \mathcal{B}$. Соответственно, каждое топологическое векторное пространство может быть вложено в наименьшее полное топологическое

*Первый автор поддержан грантами MICINN и FEDER (проект MTM2008-05396), фондом Séneca (проект 08848/PI/08), Женеалитетом Валенсии (GV/2010/036) и Политехническим университетом Валенсии (проект PAID-06-09-2829). Второй автор поддержан грантами MICINN (проект MTM2011-22417), Женеалитетом Валенсии (GV/2010/036) и Политехническим университетом Валенсии (проект PAID-06-09-2829).

векторное пространство $(\widetilde{E}, \widetilde{\mathcal{T}})$, его *пополнение*, которое единственно с точностью до топологического изоморфизма (см. [9, §15.2 и §15.3] по поводу этого и близких результатов, а также терминологии). Гротендик дал характеристику пополнения локально выпуклого пространства (см., например, [9, §21.9]), которая в применении к $(E, \mu(E, F))$ звучит следующим образом:

(G) *Пополнение пространства $(E, \mu(E, F))$ может быть отождествлено с множеством всех линейных функционалов $f: F \rightarrow \mathbb{R}$, ограничения $f|_K$ которых на любые абсолютно выпуклые $w(F, E)$ -компактные подмножества K пространства F являются $w(F, E)$ -непрерывными.*

В частности, $(E, \mu(E, F))$ полно, если и только если для каждого линейного функционала $f: F \rightarrow \mathbb{R}$, который $w(F, E)$ -непрерывен на любом абсолютно выпуклом $w(F, E)$ -компактном подмножестве пространства F , найдется $x \in E$, такой, что $\langle x, x^* \rangle = f(x^*)$ для всех $x^* \in F$. Заметим, что если X — банахово пространство, то $(X^*, \mu(X^*, X))$ всегда полно, так как для непрерывности по норме линейного функционала $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ достаточно его непрерывности на абсолютно выпуклых $w(X, X^*)$ -компактных подмножествах пространства (следствие теоремы Крейна); см., например, [9] или [2].

Х. Бонет и Б. Каскалес [1], отвечая на вопрос М. Кунце и В. Арендта, дали пример замкнутого по норме и 1-нормирующего подпространства P пространства X^* , сопряженного к банахову пространству X , для которого $(X, \mu(X, P))$ неполно. Напомним, что *нормирующее* подпространство пространства X^* , сопряженного к банахову пространству X , есть подпространство P в X^* , такое, что для некоторого $C > 0$ выполняется неравенство $\|x\| \leq C \sup\{\langle x, x^* \rangle : x^* \in P, \|x^*\| \leq 1\}$ для всех $x \in X$; оно называется 1-нормирующим, если $C = 1$. Их пример был следующим: $P := C[0, 1]$, пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, рассматриваемое как замкнутое подпространство пространства $X^* := \ell_\infty[0, 1]$, сопряженного к $X := (\ell_1[0, 1], \|\cdot\|_1)$. Они использовали теорему Крейна и описание замкнутого единичного шара в $C[0, 1]^*$.

Естественно возник вопрос о достаточном общем способе получения «хорошо расположенного» замкнутого по норме и w^* -плотного подпространства Y в X^* , для которого топология $\mu(X, Y)$ является (или не является) полной¹⁾. Под «хорошо расположенным» подпространством мы подразумеваем подпространство, лежащее между предсопряженным (если оно существует) и сопряженным пространствами пространства X (отметим, что $\ell_1[0, 1]$ имеет предсопряженное пространство $c_0[0, 1]$, а использованное в [1] пространство $C[0, 1]$ никак не связано с $c_0[0, 1]$). Наш подход позволяет получать $\|\cdot\|_\infty$ -замкнутые подпространства $Y \subset \ell_\infty(\Gamma)$, содержащие $c_0(\Gamma)$, для которых $\mu(\ell_1(\Gamma), Y)$ является (не является) полной (см. следствие 5). Он также работает и для общих банаховых пространств X и топологий $\mu(X, Y)$, где Y замкнуто по норме и w^* -плотно в X^* , например, для предсопряженного Y , когда оно существует (теорема 1, а в сепарабельном случае следствие 3). Так как c_0 есть простейший пример пространства без предсопряженного, то возникает естественный вопрос, когда наиболее подходящие $\|\cdot\|_1$ -замкнутые w^* -плотные подпространства H сопряженного пространства ℓ_1 (а именно, ядра элементов из $\ell_\infty \setminus c_0$) дают полную или неполную $\mu(c_0, H)$ -топологию. Ответ на этот вопрос дает следствие 13. В конце статьи мы рассматриваем также специальный класс банаховых пространств,

¹⁾Здесь и иногда далее используется выражение «топология $\mu(X, P)$ полна (не полна)» вместо выражения «пространство $(X, \mu(X, P))$ полно (или не полно)».

имеющих коразмерность 1 при каноническом вложении в свое второе сопряженное, см. пространства Джеймса J .

Обозначения в статье стандартны. Для локально выпуклых пространств мы используем терминологию из теории банаховых пространств. Например, если E — локально выпуклое пространство, то E^* обозначает его топологическое сопряженное, а если $\langle E, F \rangle$ есть дуальная пара, то $w(E, F)$ обозначает топологию в E поточечной сходимости на элементах из F . Если X — банахово пространство и Y — его подпространство, то B_Y обозначает единичный шар в Y , т. е. $B_Y := Y \cap B_X$, где B_X есть замкнутый единичный шар в X . По поводу остальных не определенных понятий или не сформулированных результатов, см., например, [2].

§2. Полнота в топологии Макки относительно подпространств сопряженного пространства

Пусть X — банахово пространство. Топология $\mu(X, X^*)$ совпадает с топологией, индуцированной нормой, и потому является полной. Если X имеет предсопряженное $P \subset X^*$ (частный случай 1-нормирующего и поэтому $w(X^*, X)$ -плотного подпространства пространства X^*), то $\mu(X, P)$ полна (мы это отмечали во введении). Кунце и Арендт поставили вопрос о том, будет ли полна $\mu(X, Y)$ для любого замкнутого по норме $w(X^*, X)$ -плотного подпространства $Y \subset X^*$. Отметим, что $\mu(X, Y)$ -полнота пространства X не гарантирована даже в случае, когда существует предсопряженное P , а Y замкнуто по норме и $P \subset Y \subset X^*$. Ясно, что если $(E, \mathcal{T})$ — полное локально выпуклое пространство, а $\mathcal{T}'$ есть более сильная локально выпуклая топология на E с базой из $\mathcal{T}$ -замкнутых окрестностей нуля, то $(E, \mathcal{T}')$ также полно (см., например, [9, §18.4(4)]). Однако, вообще говоря, нет никаких оснований считать, что для Y , такого, что $P \subset Y \subset X^*$, топология $\mu(X, Y)$ имеет базу из $\mu(X, P)$ -замкнутых окрестностей. Поэтому усиление вопроса Кунце–Арендта формулируется так: будет ли или не будет полна топология $\mu(X, Y)$ для любого замкнутого по норме подпространства, расположенного между предсопряженным P (если оно существует) и X^* . Пример из [1] не отвечает на вопрос в такой постановке.

Пусть X — банахово пространство, а P есть w^* -плотное замкнутое по норме подпространство в X^* . Пусть

$$\mathcal{K} := \{K : K \text{ — абсолютно выпуклый } w^*\text{-подкомпакт в } X^*\} \quad (1)$$

и

$$S := \{x^* \in X^* : \text{существует } K \in \mathcal{K}, \text{ такой,} \\ \text{что } K \subset P \oplus \text{span}\{x^*\} \text{ и } x^* \in \overline{K \cap P}^{w^*}\}. \quad (2)$$

Ясно, что S содержит P .

В следующей теореме в утверждении (i) важно иметь в виду сказанное в начале этого параграфа. Что касается утверждения (ii), напомним, что сумма замкнутого и конечномерного подпространств нормированного пространства всегда замкнута, но в общем случае сумма двух замкнутых подпространств нормированного пространства может оказаться незамкнутой.

Теорема 1. Пусть X — банахово пространство и P — замкнутое по норме и w^* -плотное подпространство сопряженного пространства X^* . Тогда

- (i) если пространство $(X, \mu(X, P))$ полно, $S_0 \subset S$ и $Y := \overline{P \oplus \text{span}(S_0)}^{\|\cdot\|}$, то пространство $(X, \mu(X, Y))$ полно;
- (ii) если $x^* \in X^* \setminus S$, то пространство $(X, \mu(X, P \oplus \text{span}\{x^*\}))$ не полно.

Доказательство. (i) Как только мы докажем утверждение о том, что для любого линейного отображения $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение $f|_K$ которого w^* -непрерывно для каждого $K \in \mathcal{K}$, $K \subset Y$, найдется $x \in X$, такой, что $\langle x, y^* \rangle = f(y^*)$ для всех $y^* \in Y$, то применение приведенного выше критерия Гротендика (G) завершит доказательство п. (i). Проведем доказательство этого утверждения.

Шаг 1. Проверим сначала, что такое отображение f непрерывно по норме. В самом деле, пусть $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ — сходящаяся к нулю по норме последовательность в Y . Тогда $A := \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ есть компакт в X^* . Полнота пространства $(X^*, \|\cdot\|)$ и теорема Крейна показывают, что $B := \overline{\Gamma(A)}^{\|\cdot\|} \subset Y$ также есть компакт. Так как w^* -топология и норм-топология совпадают на B , а $f|_K$ w^* -непрерывно, то $f(y_n^*) \rightarrow 0$, и поэтому f непрерывно по норме.

Шаг 2. Докажем наше утверждение для подпространства $Y := P \oplus \text{span}\{x^*\}$, $x^* \in S$, замкнутого по норме. Так как по условию, в частности, ограничение $f|_K$ w^* -непрерывно для каждого $K \in \mathcal{K}$, $K \subset P$, то из полноты топологии $\mu(X, P)$ следует наличие $x \in X$, такого, что $\langle x, p^* \rangle = f(p^*)$ для всех $p^* \in P$. Так как $x^* \in S$, мы можем найти $K \in \mathcal{K}$, $K \subset P \oplus \text{span}\{x^*\}$, такое, что $x^* \in \overline{K} \cap \overline{P}^{w^*}$.

Пусть теперь $\{p_i^* : i \in I, \leq\}$ — сеть в $K \cap P$, для которой $p_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Так как $\{p_i^* : i \in I\} \cup \{x^*\}$ есть подмножество множества K , то $f(p_i^*) \rightarrow f(x^*)$. При этом $(f(p_i^*) =) \langle x, p_i^* \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle$, откуда следует, что $\langle x, x^* \rangle = f(x^*)$ и потому $\langle x, y^* \rangle = f(y^*)$ для всех $y^* \in Y$. Значит, утверждение доказано для этого случая.

Шаг 3. Пусть $Y := P \oplus \text{span}\{S_0\}$, где $S_0 \subset S$. Справедливость утверждения в этом случае следует из шага 2. Действительно, если $y^* \in Y$, то можно найти конечное подмножество S_{00} , такое, что $y^* \in P \oplus \text{span}\{S_{00}\}$. Шаг 2 обеспечивает существование для каждого $y_0^* \in S_{00}$ элемента $x(y_0^*) \in X$, для которого $\langle x(y_0^*), z^* \rangle = f(z^*)$ при всех $z^* \in P \oplus \{y_0^*\}$. Поскольку P w^* -плотно, найдется $x \in X$, такой, что $x = x(y_0^*)$ при всех $y_0^* \in S_{00}$ и, следовательно, $\langle x, y^* \rangle = f(y^*)$ для всех $y^* \in Y$.

Шаг 4. Наконец, возьмем $z^* \in Y := \overline{P \oplus \text{span}\{S_0\}}^{\|\cdot\|}$, где $S_0 \subset S$. Тогда в $P \oplus \text{span}(S_0)$ найдется последовательность $\{z_n^*\}$, по норме сходящаяся к z^* . По шагу 3 имеется $x \in X$, для которого $f(z_n^*) = \langle x, z_n^* \rangle$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность отображения f (см. шаг 1) позволяет перейти к пределу, получить, что $f(z^*) = \langle x, z^* \rangle$, и, тем самым, завершить доказательство.

(ii) Отметим, что алгебраическая прямая сумма $Y := P \oplus \text{span}\{x^*\}$ есть топологическая (по норме) прямая сумма в X^* . Для доказательства п. (ii) мы построим w^* -разрывное линейное отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, такое, что $f|_K$ w^* -непрерывно для каждого $K \in \mathcal{K}$, $K \subset Y$. По критерию Гротендика (G) отсюда следует (ii). Оказывается, достаточно взять $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, такое, что $f|_P \equiv 0$ и $f(x^*) \neq 0$. Так как $x^* \in \overline{P}^{w^*}$, то f является w^* -разрывным на Y . Теперь фиксируем $K \in \mathcal{K}$, лежащее в Y . Лемма, принадлежащая Гротендику (см., например, [9, §21.6 (5)]), показывает, что w^* -непрерывность ограничения $f|_K$ следует из его w^* -непрерывности в 0. Пусть $\{x_\delta^* : \delta \in \Delta, \leq\}$ есть сеть в K , w^* -сходящаяся к нулю, и пусть $\{x_i^* : i \in I, \leq\}$ — любая ее подсеть. Положим $x_i^* = p_i^* + \lambda_i x^*$, где $p_i^* \in P$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$ для всех $i \in I$. Так как K ограничено, то ограничены и множество $\{p_i^* : i \in I\} \subset X^*$, и множество

$\{\lambda_i : i \in I\}$, скажем $|\lambda_i| \leq M$ для всех $i \in I$ и некоторого $M > 0$. Тогда найдется подсеть $\{p_{i_j}^* : j \in J, \leq\}$ в $\{p_i^* : i \in I, \leq\}$, которая w^* -сходится к элементу $z^* \in X^*$. В таком случае $\{\lambda_{i_j} : j \in J, \leq\}$ сходится к некоторому $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и потому $0 = z^* + \lambda_0 x^*$. Проверим, что $\lambda_0 = 0$. Пусть это не так. Множество $B := K/\lambda_0 + [-M/|\lambda_0|, M/|\lambda_0|]x^*$ — абсолютно выпуклое и w^* -компактное подмножество в Y . Заметим, что

$$\frac{-1}{\lambda_0} p_{i_j}^* = \frac{-1}{\lambda_0} x_{i_j}^* + \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_0} x^* \rightarrow x^* \quad \text{в } w^*\text{-топологии,}$$

и

$$\frac{-1}{\lambda_0} x_{i_j}^* + \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda_0} x^* \in B \cap P \quad \text{для всех } j \in J.$$

Это противоречит условию $x^* \notin S$. Значит, $\lambda_0 = 0$, и тогда $f(x_{i_j}^*) = f(p_{i_j}^*) + \lambda_{i_j} f(x^*) = \lambda_{i_j} f(x^*) \rightarrow 0$. Так как подсеть $\{x_i^* : i \in I, \leq\}$ сети $\{x_\delta^* : \delta \in \Delta, \leq\}$ была произвольной, мы заключаем, что $f(x_\delta^*) \rightarrow 0$, а это и требовалось проверить. Окончательно, получаем, что $(X, \mu(X, Y))$ не полно. $\square$

Позже мы покажем (см. п. (ii) в следствии 5 и замечании 6), что п. (ii) из теоремы 1 — содержательное утверждение: существуют банаховы пространства X , такие, что множество S , заданное в (2), есть собственное подмножество пространства X^* .

Следующий результат показывает, что для замкнутых по норме w^* -плотных подпространств $P \subset X^*$ множество S , определенное формулой (2), содержит некоторое естественное подпространство пространства X^* , а именно, подпространство, состоящее из всех w^* -пределов всех w^* -фундаментальных последовательностей из P . В сепарабельном случае в качестве следствия получаем характеристику множества S .

Предложение 2. Пусть X — банахово пространство, а $P \subset X^*$ есть w^* -плотное и замкнутое по норме подпространство. Положим

$$Z := \{x^* \in X^* : \text{существует последовательность } \{p_n^*\}_{n=1}^\infty \text{ в } P, \text{ такая, что } p_n^* \xrightarrow{w^*} x^*\}. \quad (3)$$

Тогда

- (i) $Z \subset S$, где S есть подмножество в X^* , определенное в (2);
- (ii) если X сепарабельно, то $Z = S$.

Доказательство. (i) Для фиксированного $x^* \in Z$ найдем последовательность $\{p_n^*\}_{n=1}^\infty$ в P , такую, что $p_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Положим $Y := P \oplus \text{span}\{x^*\}$. Ясно, что Y замкнуто по норме в X^* . Множество $K := \overline{\Gamma(\{p_n^* : n \in \mathbb{N}\})}^{w^*}$ есть w^* -компакт, так как оно w^* -замкнуто и ограничено в X^* . Мы проверим, что $K \subset Y$. Так как $x^* \in \overline{K \cap P}^{w^*}$, отсюда будет следовать, что $x^* \in S$. Проверка основана на рассуждениях, использующих идеи из [9, §20.9 (6)] (см. также [6, с. 17, лемма]). Положим $d_n^* := x^* - p_n^*$ для $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{d_n^*\}_{n=1}^\infty$ w^* -сходится к нулю (а значит, ограничена по норме), мы можем определить ограниченное линейное отображение $T : X \rightarrow c_0$ равенством $Tx := (\langle x, d_n^* \rangle)$ для $x \in X$. Тогда сопряженное отображение $T^* : \ell_1 \rightarrow X^*$ ограничено и w^* - w^* -непрерывно. Заметим, что $T^*(e_n^*) = d_n^*$, $n \in \mathbb{N}$, где e_n^* есть n -й вектор канонического

базиса в ℓ_1 . Отметим, что

$$\{d_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset T^*(B_{\ell_1}) = T^*(\overline{\Gamma(\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\})^{\|\cdot\|}}) \subset \overline{\Gamma(\{d_n^* : n \in \mathbb{N}\})^{\|\cdot\|}} \subset Y.$$

Так как $T^*(B_{\ell_1})$ есть w^* -компакт, то $\overline{\Gamma(\{d_n^* : n \in \mathbb{N}\})}^{w^*} \subset Y$. Отсюда сразу получается, что $K \subset Y$.

(ii) Пусть X сепарабельно. Пусть $x^* \in S$, а K есть произвольное абсолютно выпуклое w^* -компактное подмножество в $P \oplus \text{span}\{x^*\}$, где $x^* \in \overline{K \cap P}^{w^*}$. Так как X сепарабельно, то (K, w^*) метризуемо. Поэтому существует последовательность $\{p_n^*\}_{n=1}^\infty$ в $K \cap P$, которая w^* -сходится к x^* . Значит, $x^* \in Z$. $\square$

Для сепарабельных банаховых пространств теорема 1 и предложение 2 приводят к следующему результату. В его доказательстве по существу показано, что множество S , определенное в (2), на самом деле совпадает с X^* .

Следствие 3. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, а $P \subset X^*$ — замкнутое по норме нормирующее подпространство, такое, что $(X, \mu(X, P))$ полно. Тогда $(X, \mu(X, Y))$ полно для всякого замкнутого по норме подпространства $Y \subset X^*$, для которого $P \subset Y$.

Доказательство. Так как P — нормирующее подпространство, то найдутся $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что $B_{X^*} \subset \alpha \overline{B_P}^{w^*} \subset \beta B_{X^*}$, где B_P есть замкнутый единичный шар в P . Фиксируем $x^* \in B_{X^*}$. Так как X сепарабельно, то (B_{X^*}, w^*) метризуемо. Значит, существует последовательность $\{p_n^*\}_{n=1}^\infty$ в αB_P , такая, что $p_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Это показывает, что $Z = X^*$, где Z определено в (3). По предложению 2 получаем, что $S = X^*$, и использование п. (i) из теоремы 1 завершает рассуждение. $\square$

Замечание 4. 1. Следствие 3 применимо, например, к сепарабельным банаховым пространствам X , имеющим предсопряженное P . Условие сепарабельности можно снять, заменив его w^* -секвенциальной плотностью множества P в Y .

2. Идея, лежащая в основе доказательства предложения 2, несложна. Более кратко, но с использованием более тонкой техники, можно действовать так. Множество $K := \overline{\Gamma(\{p_n^* : n \in \mathbb{N}\})}^{w^*}$ есть w^* -компакт. Если $A := \{p_n^* : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x^*\}$, то ясно, что $B := A \cup (-A)$ есть (счетная) граница Джеймса множества K . По результату из [7] (см. также [2, теорема 3.122]) получаем, что B на самом деле есть *строгая граница*, т. е. $K = \text{conv}(\overline{B})^{\|\cdot\|}$. Значит, $K \subset Y$.

В следующем утверждении мы рассмотрим банаховы пространства $X := \ell_1(\Gamma)$ и $P := c_0(\Gamma)$ для произвольного бесконечного (счетного или несчетного) множества Γ . В нем часть (ii) дает примеры 1-нормирующих замкнутых по норме подпространств Y сопряженного к $\ell_1(\Gamma)$ пространства, для которых $\mu(\ell_1(\Gamma), Y)$ не полна и при этом Y содержит $c_0(\Gamma)$.

Следствие 5. Верны следующие утверждения.

(i) Пусть $S_0 \subset S \subset \ell_\infty(\Gamma)$, где S определено в (2), и $Y := \overline{c_0(\Gamma) \oplus \text{span}\{S_0\}}^{\|\cdot\|}$. Тогда пространство $(\ell_1(\Gamma), \mu(\ell_1(\Gamma), Y))$ полно. В частности, пространство $(\ell_1(\Gamma), \mu(c_0(\Gamma) \oplus \text{span}\{x^*\}))$ полно для каждого $x^* \in \ell_\infty(\Gamma)$ со счетным носителем $\text{supp } x^*$.

(ii) Пусть Γ несчетно и x^* — элемент из $\ell_\infty(\Gamma)$ с несчетным носителем $\text{supp } x^*$. Тогда пространство $(\ell_1(\Gamma), \mu(\ell_1(\Gamma), c_0(\Gamma) \oplus \text{span}\{x^*\}))$ не полно.

Доказательство. Первая часть из п. (i) есть прямое следствие п. (i) из теоремы 1. Действительно, если $P := c_0(\Gamma) (\subset \ell_\infty(\Gamma))$, то $P^* = \ell_1(\Gamma)$. Поэтому P есть $\|\cdot\|_\infty$ -замкнутое и w^* -плотное подпространство в $\ell_\infty(\Gamma)$, для которого $\mu(\ell_1(\Gamma), c_0(\Gamma))$ полна. Для проверки частного случая выберем $x^* \in \ell_\infty(\Gamma)$ со счетным $\text{supp } x^*$. Мы проверим, что $x^* \in S$, откуда и будет следовать утверждение. Так как B_{c_0} является w^* -плотным в B_{ℓ_∞} , а (B_{ℓ_∞}, w^*) метризуемо, то имеется последовательность $\{c_n^*\}_{n=1}^\infty$ в $\|x^*\|_{B_{c_0(\Gamma)}}$, которая w^* -сходится к x^* . Значит, $x^* \in Z$, где Z определено в (3), и поэтому по п. (i) предложения 2 получаем, что $x^* \in S$.

(ii) Пусть $X := \ell_1(\Gamma)$ и $x^* \in \ell_\infty(\Gamma)$ с несчетным $\text{supp } x^*$. Пусть $Y := c_0(\Gamma) \oplus \{x^*\}$, и допустим, что $x^* \in S$. Тогда существует $K \in \mathcal{K}$, такое, что $K \subset Y$ и $x^* \in \overline{K \cap c_0(\Gamma)}^{w^*}$. Отметим, что найдется $\varepsilon > 0$, для которого множество $\Gamma_\varepsilon := \{\gamma \in \Gamma : |x^*(\gamma)| > \varepsilon\}$ несчетно. Действительно, в противном случае множество $\Gamma_{1/n}$ будет счетным для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. и $\text{supp } x^*$ будет счетным, что противоречит условию. Фиксируем счетное (бесконечное) подмножество N из Γ_ε . Найдется последовательность $\{c_n^*\}_{n=1}^\infty$ в $K \cap c_0(\Gamma)$, которая поточечно сходится к x^* на N . Эта последовательность ограничена в $\ell_\infty(\Gamma)$ и поэтому имеет w^* -предельную точку $x_N^* \in \ell_\infty(\Gamma)$. Очевидны следующие факты о x_N^* : (a) $\text{supp } x_N^*$ — счетное множество; (b) $|x_N^*(\gamma)| \geq \varepsilon$ для всех $\gamma \in N$ (в частности, $x_N^* \notin c_0(\Gamma)$); (c) $x_N^* \in K (\subset Y)$, а значит, $x_N^* = c^* + \lambda x^*$, где $c^* \in c_0(\Gamma)$ и $\lambda \neq 0$. Ясно, что (a), (b) и (c) вместе приводят к противоречию. Отсюда следует, что $x^* \notin S$ и можно использовать п. (ii) теоремы 1. $\square$

Замечание 6. Доказательство следствия 5 дает описание множества S , определенного в (2), для случая подпространства $P := c_0(\Gamma)$ пространства $\ell_\infty(\Gamma)$ с несчетным Γ . Множество S оказывается собственным замкнутым подпространством в $\ell_\infty(\Gamma)$, состоящим из всех его векторов со счетным носителем (для счетного Γ см. абзац перед следствием 3)

§3. Дуализация полноты и несколько примеров

Это технический параграф. Он далее используется при исследовании полноты топологий Макки вида $\mu(c_0, H)$, где H есть $\|\cdot\|_1$ -замкнутая гиперплоскость в ℓ_1 , или вида $\mu(J, H)$, где J — пространство Джеймса, а H — замкнутое по норме нормирующее подпространство его сопряженного, см. §4. Изложенные здесь результаты связывают полноту пространства и полноту его сопряженного пространства. Лемма 8 относится к пространству c_0 и «переносит» полноту с сопряженного к нему на само пространство. Более общая лемма 9 действует в обратном направлении.

За необходимыми определениями и фактами мы отсылаем читателя, например, к [3]. Пусть E — локально выпуклое пространство, а E^* — его топологически сопряженное пространство. Диск есть абсолютно выпуклое и ограниченное множество B в E . Каждый диск B порождает нормированное пространство $(E_B, \|\cdot\|_B)$, где $E_B := \bigcup_{n=1}^\infty nB$ и $\|\cdot\|_B$ есть функционал Минковского множества B в E_B , т.е. $\|x\|_B := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$, $x \in E_B$. Диск называется *банаховым диском*, если $(E_B, \|\cdot\|_B)$ есть банахово пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в E называется *локально фундаментальной (локально сходящейся)*, если в E найдется диск B , для которого $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ будет $\|\cdot\|_B$ -фундаментальной последовательностью в E_B (соответственно для которого она $\|\cdot\|_B$ -сходится к

некоторому элементу $x \in E_B$; в случае, если $x := 0$, такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется *локально сходящейся к нулю*). Пространство E называется *локально полным*, если каждая локально фундаментальная последовательность в нем является локально сходящейся. Нам потребуются следующие стандартные факты.

(А) Пространство E локально полно, если и только если каждый замкнутый диск в нем является банаховым диском [3, предложение 5.1.6].

(В) Свойство пространства E быть локально полным зависит только от дуальной пары $\langle E, E^* \rangle$ [3, следствие 5.1.7].

(С) Всякое секвенциально полное локально выпуклое пространство является локально полным [3, следствие 5.1.8].

В дальнейшем будет полезен еще один результат из теории локально выпуклых пространств (см. [3, теорема 5.1.11]):

Теорема 7. Пусть $(E, \mathcal{T})$ — локально выпуклое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $(E, \mathcal{T})$ локально полно;
- (ii) замкнутая абсолютно выпуклая оболочка любой локально сходящейся к нулю последовательности в E есть $\mathcal{T}$ -компакт;
- (iii) замкнутая абсолютно выпуклая оболочка любой $w(E, E^*)$ -сходящейся к нулю последовательности есть $w(E, E^*)$ -компакт;
- (iv) замкнутая абсолютно выпуклая оболочка любой сходящейся к нулю последовательности в $(E, \mathcal{T})$ есть $\mathcal{T}$ -компакт.

Напомним, что гиперплоскость H в сопряженном пространстве X^* банахова пространства X является замкнутой по норме и нормирующей, если и только если найдется $x^{**} \in X^{**} \setminus X$, для которого $H = \ker\{x^{**}\}$ (см., например, [2, упражнение 3.88]).

Лемма 8. Пусть $x^{**} \in \ell_\infty \setminus c_0$ и $H := \ker\{x^{**}\} \subset \ell_1$. Если $(H, w(H, c_0))$ локально полно, то $(c_0, \mu(c_0, H))$ полно.

Доказательство. Предположим, что $(H, w(H, c_0))$ локально полно. Пусть $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный функционал, ограничение которого на каждое абсолютно выпуклое $w(H, c_0)$ -компактное подмножество в H является $w(H, c_0)$ -непрерывным. Проверим, что $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ является $\|\cdot\|_1$ -непрерывным (а следовательно, элементом сопряженного к $(H, \|\cdot\|_1)$ пространства). Действительно, если $\{h_n^*\}_{n=1}^\infty$ есть $\|\cdot\|_1$ -сходящаяся к нулю последовательность в H , то банаховость пространства $(H, \|\cdot\|_1)$ показывает, что подмножество $\overline{\Gamma\{h_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_1}$ в H есть $\|\cdot\|_1$ -компакт, а значит, $w(H, c_0)$ -компакт (и абсолютно выпукло). Поэтому $f(h_n^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\tilde{f}$ — продолжение функции f (по теореме Хана–Банаха) на все ℓ_1 , т. е. $\tilde{f} \in \ell_\infty$. По критерию (G) Гротендика доказательство леммы будет завершено, как только мы докажем, что $\tilde{f} \in c_0$. Для этого обозначим через e_n^* n -й вектор канонического базиса в ℓ_1 , $n \in \mathbb{N}$, и возьмем некоторую строго возрастающую последовательность $\{j_n\}_{n=1}^\infty$ натуральных чисел, такую, что предел $\lim_n \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle$ существует.

Рассуждение разделим на два случая.

Случай 1. Пусть $\lim_n \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle = 0$. Выберем $x^* \in \ell_1$ так, чтобы $\langle x^{**}, x^* \rangle = 1$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор $z_n^* := e_{j_n}^* - \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle x^*$ принадлежит H , и

ясно, что $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty$ есть $w(H, c_0)$ -сходящаяся к нулю последовательность. Из локальной полноты пространства $(H, w(H, c_0))$ следует, что $\overline{\Gamma\{z_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{w(H, c_0)}$ есть $w(H, c_0)$ -компакт в H (см. теорему 7). Поэтому $f(z_n^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и, в частности, получаем, что $\{\tilde{f}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ есть сходящаяся к нулю последовательность.

Случай 2. Пусть $\lim_n \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенство $|\langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle| > \varepsilon$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем любую такую последовательность $\{(n_k, m_k)\}_{k=1}^\infty$ пар натуральных чисел, что $n_k \rightarrow \infty$ и $m_k \rightarrow \infty$. Ясно, что последовательность $\{y_k^*\}_{k=1}^\infty$, определенная равенством

$$y_k^* := \langle x^{**}, e_{j_{n_k}}^* \rangle^{-1} e_{j_{n_k}}^* - \langle x^{**}, e_{j_{m_k}}^* \rangle^{-1} e_{j_{m_k}}^* \quad \text{при } k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

лежит в H и сходится к 0 в $w(H, c_0)$ -топологии. Снова из локальной полноты пространства $(H, \mu(H, c_0))$ следует, что $B := \overline{\Gamma\{y_k^* : k \in \mathbb{N}\}}^{w(H, c_0)}$ есть $w(H, c_0)$ -компакт (см. теорему 7), и поэтому

$$f(y_k^*) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Так как $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольные стремящиеся к $+\infty$ последовательности, то из (5) получаем, что $\{\langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle^{-1} \tilde{f}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна и поэтому сходится, скажем, к $l \in \mathbb{R}$. Поэтому, если положить $\tilde{g} := \tilde{f} - lx^{**}$, то получится, что $\{\tilde{g}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ — сходящаяся к нулю последовательность.

Мы утверждаем, что $l \in \mathbb{R}$ не зависит от выбора строго возрастающей последовательности $\{j_n\}_{n=1}^\infty$, для которой предел $\lim_n \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle$ существует и отличен от нуля 0. В самом деле, возьмем другую последовательность $\{i_n\}_{n=1}^\infty$ такого типа. Как и выше, $\{\langle x^{**}, e_{i_n}^* \rangle^{-1} \tilde{f}(e_{i_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ сходится, скажем, к $l' \in \mathbb{R}$. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ есть строго возрастающая последовательность, составленная из последовательностей $\{j_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{i_n\}_{n=1}^\infty$. Как и выше, для последовательности $\{e_{r_n}^*\}_{n=1}^\infty$ получаем, что $\{\langle x^{**}, e_{r_n}^* \rangle^{-1} \tilde{f}(e_{r_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ также сходится (в проверке нуждается только тот факт, что последовательность $\{\langle x^{**}, e_{r_n}^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ равномерно отделена от 0, см. (4)). Значит, $l = l'$ и утверждение доказано.

Для завершения всего доказательства покажем, что $\tilde{g}$, которое, как и $\tilde{f}$, продолжает f на ℓ_1 и, значит, совпадает с $\tilde{f}$ на H , принадлежит c_0 . Действительно, раз $\tilde{g}$ лежит в ℓ_∞ , то можно выбрать строго возрастающую последовательность индексов $\{j_n\}_{n=1}^\infty$, для которой $\{\tilde{g}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ сходится, скажем, к $a \in \mathbb{R}$. Поскольку x^{**} также лежит в ℓ_∞ , переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $\{\langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle\}_{n=1}^\infty$ сходится, скажем к $b \in \mathbb{R}$. Если $b = 0$, то, согласно случаю 1, $\{\tilde{f}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ есть сходящаяся к нулю последовательность и потому

$$a = \lim_n \tilde{g}(e_{j_n}^*) = \lim_n (\tilde{f}(e_{j_n}^*) - l \langle x^{**}, e_{j_n}^* \rangle) = 0.$$

Если, напротив, $b \neq 0$, то, согласно случаю 2, $\{\tilde{g}(e_{j_n}^*)\}_{n=1}^\infty$ есть сходящаяся к нулю последовательность и потому $a = 0$. Так как $\{\tilde{g}(e_n^*)\}_{n=1}^\infty$ — ограниченная последовательность с единственной предельной точкой 0, то она сходится к нулю. Следовательно, $\tilde{g} \in c_0$, что, с учетом совпадения $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на H , завершает доказательство. $\square$

Лемма 9. Пусть X — сепарабельное нереплексивное банахово пространство, не содержащее изоморфных копий пространства ℓ_1 , и пусть $x^{**} \in X^{**} \setminus X$. Положим $H := \ker\{x^{**}\}$, и пусть $(X, \mu(X, H))$ локально полно. Тогда $(H, \mu(H, X))$ полно.

Доказательство. Возьмем линейное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $f|_K$ является $w(X, H)$ -непрерывным на каждом абсолютно выпуклом $w(X, H)$ -компакте K в X . Мы утверждаем, что f принадлежит H , и это по критерию (G) завершит доказательство. Для проверки этого утверждения сначала отметим, что f непрерывно по норме, а значит, $f \in X^*$. Так как X сепарабельно и не содержит копий пространства ℓ_1 , то в X есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к x^{**} в $w(X^{**}, X^*)$ -топологии (см., например, [5, с. 215]). Ясно, что эта последовательность $w(X, H)$ -сходится к нулю. Так как $(X, \mu(X, H))$ локально полно, то множество $B := \overline{\Gamma(A)}^{w(X, H)}$ есть $w(X, H)$ -компакт (теорема 7). Тогда ограничение отображения f на B будет $w(X, H)$ -непрерывным. Поэтому $\langle x_n, f \rangle \rightarrow 0$, и так как $\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x^{**}, f \rangle$, то $f \in H$, что доказывает утверждение. $\square$

Замечание 10. Лемма 9 показывает, в частности, что $(H, \mu(H, c_0))$ полно, если $(c_0, \mu(c_0, H))$ локально полно, где H есть собственная нормирующая $\|\cdot\|_1$ -замкнутая гиперплоскость в ℓ_1 .

§4. Еще два примера: c_0 и пространство Джеймса J

Пространство c_0 не имеет предсопряженных, и поэтому не работают предыдущие результаты о полноте пространства c_0 в топологии $\mu(c_0, H)$ для $\|\cdot\|_1$ -замкнутых нормирующих подпространств H . В этом параграфе мы покажем, что для всех $\|\cdot\|_1$ -замкнутых нормирующих гиперплоскостей H в ℓ_1 пространства $(c_0, \mu(c_0, H))$ полны. Также будет рассмотрен частный случай пространств, имеющих коразмерность 1 в своем втором сопряженном.

В предложении 12 потребуется следующая лемма.

Лемма 11. Пусть X — банахово пространство и N — замкнутое по норме нормирующее подпространство в X^* . Тогда всякое $w(X, N)$ -ограниченное множество $S \subset X$ ограничено по норме.

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство $(N, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ есть норма на N , индуцированная дуальной нормой $\|\cdot\|$ на X . Множество $S|_N := \{x|_N : x \in S\}$ есть поточечно ограниченное множество непрерывных линейных функционалов на $(N, \|\cdot\|)$. По теореме Банаха–Штейнгауза $S|_N$ ограничено по норме, т. е. существует $C > 0$, для которого

$$\sup\{|\langle x, b^* \rangle| : b^* \in B_N\} \leq C \quad \text{для всех } x \in S.$$

Так как N — нормирующее подпространство, то для некоторого $B > 0$

$$B\|x\| \leq \sup\{|\langle x, b^* \rangle| : b^* \in B_N\} \quad \text{для всех } x \in X.$$

В частности, $B\|x\| \leq C$ для всех $x \in S$. Значит, $\|x\| \leq C/B$ для всех $x \in S$. $\square$

Предложение 12. (i) Пусть N есть $\|\cdot\|_1$ -замкнутое нормирующее подпространство в ℓ_1 . Тогда $(c_0, w(c_0, N))$ локально полно.

(ii) Пусть H есть собственная $\|\cdot\|_1$ -замкнутая нормирующая гиперплоскость в ℓ_1 . Тогда $(c_0, w(c_0, H))$ локально полно, но не секвенциально полно.

Доказательство. (i) Пусть B есть замкнутый диск в $(c_0, w(c_0, N))$. По лемме 11 B есть замкнутый диск в $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Так как $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ банахово, то B есть банахов диск, см. утверждение (B) перед теоремой 7. Утверждение (A) тогда завершает доказательство.

(ii) Локальная полнота пространства $(c_0, w(c_0, H))$ уже доказана в (i). Существует $x^{**} \in \ell_\infty \setminus c_0$, для которого $H := \ker\{x^{**}\}$. Пусть $y^{**} \in \ell_\infty$ и $y^{**} \notin c_0 \oplus \text{span}(x^{**})$. Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в c_0 , которая $w(l_\infty, l_1)$ -сходится к y^{**} . В частности, она $w(c_0, H)$ -фундаментальна. Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ $w(c_0, H)$ -сходится, скажем, к $x \in c_0$. Тогда $y^{**} - x$ лежит в $H^\perp (= \text{span}\{x^{**}\})$. Противоречие. Поэтому $(c_0, w(c_0, H))$ не секвенциально полно. $\square$

Следствие 13. Пусть H есть $\|\cdot\|_1$ -замкнутая нормирующая гиперплоскость в ℓ_1 . Тогда $(c_0, \mu(c_0, H))$ полно.

Доказательство. Пространство $(c_0, \mu(c_0, H))$ локально полно в силу п. (i) из предложения 12 и того факта, что локальная полнота зависит только от дуальной пары, см. утверждение (B) выше). Лемма 9 гарантирует полноту пространства $(H, \mu(H, c_0))$ и, в частности, его локальную полноту, см. утверждение (C) выше. Для завершения доказательства остается использовать лемму 8. $\square$

Два последних результата работы касаются n -квазирефлексивных [4] пространств, т.е. тех пространств, которые имеют конечную коразмерность n при каноническом вложении в свое второе сопряженное. Пример для $n = 1$ построил Джеймс ([8], см. также [2, определение 4.43]). Нетрудно видеть, что если X n -квазирефлексивно, то каждое w^* -плотное замкнутое по норме подпространство в X^* является нормирующим (см., например, [2, упражнение 5.5]).

Нам требуется следующий результат.

(D) [4, теорема 3.3] Для банахова пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- (i) X n -квазирефлексивно;
- (ii) на X есть эквивалентная норма, для которой $X^* = P \oplus R$, где P есть w^* -плотное замкнутое по норме подпространство, такое, что замкнутый единичный шар в X является $w(X, P)$ -компактом, а R есть n -мерное подпространство в X^* .

Так как фрагменты доказательства утверждения (D) потребуются в дальнейшем, мы приведем его схему. Сначала предположим, что X есть n -квазирефлексивное пространство, т.е. $X^{**} = \pi(X) \oplus F$, где $\pi: X \rightarrow X^{**}$ — каноническое вложение, а размерность пространства F равна n . Положим $P := F_\perp (\subset X^*)$. Нетрудно видеть, что отображение $\phi: X \rightarrow P^*$, заданное равенством $\phi(x)(p^*) := \langle \pi(x), p^* \rangle$ для всех $p^* \in P$, есть изоморфизм. Определим на X эквивалентную норму $\| \cdot \|$ формулой $\|x\| := \|\phi(x)\|$ для всех $x \in X$. Ясно, что изометрия $\phi: (X, \| \cdot \|) \rightarrow (P^*, \| \cdot \|)$ является $w(X, P)$ - $w(P^*, P)$ -непрерывной. Тогда $(B_X, w(X, P))$ есть компакт в силу компактности $(B_{P^*}, w(P^*, P))$.

Наоборот, допустим, что $X^* = P \oplus R$, см. п. (ii). Пусть $R := \text{span}\{x_k^* : k = 1, \dots, n\}$ для какого-то $x_k^* \in X^*$, $k = 1, \dots, n$. Для $k = 1, \dots, n$ выберем $x_k^{**} \in X^{**}$ так, чтобы $x_k^{**}|_P = 0$ и $\langle x_k^{**}, x_j^* \rangle = \delta_{k,j}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Тогда $P = \bigcap_{k=1}^n \ker x_k^{**}$. Для заданного $x^{**} \in B_{(X^{**}, \| \cdot \|)}$ найдется сеть $\{x_i : i \in I, \leq\}$ в $B_{(X, \| \cdot \|)}$, которая w^* -сходится к x^{**} . Так как $B_{(X, \| \cdot \|)}$ есть $w(X, P)$ -компакт, то найдется $x \in B_{(X, \| \cdot \|)}$, для которого $x_i \rightarrow x$ в топологии $w(X, P)$. Очевидно,

что $x^{**} - x \in P^\perp$. Так как $P^\perp = \text{span}\{x_k^{**} : k = 1, \dots, n\}$, то $x^{**} \in X \oplus \text{span}\{x_k^{**} : k = 1, \dots, n\}$. Поэтому $X^{**} = X \oplus \text{span}\{x_k^{**} : k = 1, \dots, n\}$.

Предложение 14. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и X есть n -квазирефлексивное банахово пространство. Тогда для любого замкнутого по норме и w^* -плотного подпространства $P \subset X^*$ коразмерности n пространство $(X, w(X, P))$ секвенциально полно, а $(P, \mu(P, X))$ полно.

Доказательство. Пусть $F := P^\perp$. Тогда $X^{**} = X \oplus F$. Если $\|\cdot\|$ — эквивалентная норма из утверждения (D), то $B_{(X, \|\cdot\|)}$ есть $w(X, P)$ -компакт. В частности, $(X, w(X, P))$ секвенциально полно.

Поэтому $\mu(P, X)$ есть топология на P , индуцированная нормой, и, следовательно, она полна. $\square$

Локально выпуклое пространство $(E, \mathcal{T})$ назовем *пространством Макки*, если $\mathcal{T}$ совпадает с топологией Макки $\mu(E, E^*)$, где E^* — топологически сопряженное к $(E, \mathcal{T})$. Вторую часть следующего результата стоит сравнить с [3, теоремы 5.2.1 и 5.2.4].

Следствие 15. Пусть X есть 1-квазирефлексивное банахово пространство. Тогда $(X, \mu(X, H))$ полно для каждой собственной замкнутой по норме w^* -плотной гиперплоскости $H \subset X^*$. В частности, если X сепарабельно, то никакая собственная замкнутая по норме нормирующая гиперплоскость $H \subset X^*$ не является пространством Макки.

Доказательство. Обозначим через E локально выпуклое пространство $(X, \mu(X, H))$, и пусть $x^{**} \in X^{**}$ таков, что $H = \ker\{x^{**}\} \subset X^*$. Тогда $x^{**} \in X^{**} \setminus X$. Пусть $\hat{E}$ — пополнение пространства E и $f \in \hat{E}$. Заметим, что $\hat{E} \subset H^*$. Действительно, если $\{h_n^*\}_{n=1}^\infty$ — последовательность в H , которая по норме сходится к 0, то $B := \Gamma\{h_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ есть компакт (по норме) в H , а следовательно, $w(H, X)$ -компакт. Поэтому $f(h_n^*) \rightarrow 0$. Пусть $\tilde{f}$ — непрерывное по норме линейное продолжение функционала f на X^* , т.е. $\tilde{f} \in X^{**}$. Тогда существуют $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $\tilde{f} = x + \lambda x^{**}$. Тем самым показано, что $\tilde{f}(h^*) = f(h^*) = \langle x, h^* \rangle$ для всех $h^* \in H$, а потому E полно по критерию полноты Гротендика. Для проверки второй части следствия заметим, что H является $\mu(X^*, X)$ -плотным и потому $(H, \mu(X^*, X)|_H)$ не полно. Однако по лемме 9 пространство $(H, \mu(H, X))$ полно. $\square$

Это следствие 15 применимо, например, к пространству Джеймса J .

Вопрос. Нам неизвестны w^* -плотные и $\|\cdot\|_1$ -замкнутые подпространства $Y \subset \ell_1$, для которых $\mu(c_0, Y)$ не является полной.

Благодарности. Мы благодарны рецензенту за замечания и предложения, которые помогли в целом улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Bonnet, B. Cascales, *Non-complete Mackey topologies on Banach spaces*, Bull. Aust. Math. Soc., **81**:3 (2010), 409–413.
- [2] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Math., Springer-Verlag, New York, 2011.

- [3] P. Pérez-Carreras, J. Bonet, *Barreled Locally Convex Spaces*, North-Holland Mathematical Studies, vol. 131, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [4] P. Civin, B. Yood, *Quasi-reflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8**:5 (1957), 906–911.
- [5] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Math., vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] K. Floret, *Weakly Compact Sets*, Lecture Notes in Math., vol. 801, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [7] G. Godefroy, *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Ann., **277**:2 (1987), 173–184.
- [8] R. C. James, *A nonreflexive Banach space isometric with its second conjugate*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37** (1951), 174–177.
- [9] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1969.

Universitat Politècnica de València
Instituto de Matemática Pura y Aplicada
e-mail: anguisa2@mat.upv.es
Universitat Politècnica de València
Instituto de Matemática Pura y Aplicada
e-mail: vmontesinos@mat.upv.es

Поступила в редакцию
13 марта 2013 г.