Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джань-Дун Мэй, Цзи-Гэнь Пэн, Корректность одного класса популяционных уравнений с зависимостью от возраста, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:29:08

[5] A. Malchiodi, Boll. Unione Mat. Ital., Ser. B, **8**:3 (2005), 615–628. [6] N. Mizoguchi, T. Suzuki, Houston J. Math., **22**:1 (1996), 199–215. [7] А. И. Назаров, Труды С.-Петербург. МО, **10** (2004), 33–62. [8] А. И. Назаров, Пробл. матем. анализа, **20** (2000), 171–190.

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: sergey.kolonitskii@gmail.com

Поступила в редакцию
21 января 2014 г.

УДК 517.9

Корректность для одного класса популяционных уравнений с зависимостью от возраста*

© 2015. Джань-Дун Мэй, Цзи-Гэнь Пэн

1. Введение. Рассмотрим следующую задачу для популяционного уравнения с зависимостью от возраста и запаздыванием, описывающего процесс рождения и смерти с учетом смерти по причине беременности:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t, a)}{\partial t} = -\frac{\partial x(t, a)}{\partial a} - \mu(a)x(t, a) - \alpha(a)x(t - r, a), \\ x(t, 0) = \int_0^\infty \int_{-r}^0 \beta(\sigma, a)x(t + \sigma, a) d\sigma da, & t \geq 0, \\ x(s, a) = q(s, a), & s \in [-r, 0], a \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $r > 0$, $0 \leq \mu, \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\beta \in L^\infty([-r, 0] \times \mathbb{R}^+)$. Это уравнение представляет плотность населения возраста a в момент t . Функции μ и α — это смертность по естественным причинам и смертность по причине беременности соответственно, а β — коэффициент рождаемости. Уравнение

$$x(t, 0) =: B(t) = \int_0^\infty \int_{-r}^0 \beta(\sigma, a)x(t + \sigma, a) d\sigma da, \quad t \geq 0,$$

называется процессом рождения.

Для случая, когда $\alpha = 0$, такие модели были введены Лоткой в 1925 г. и изучались многими авторами. В [2] и [8] к популяционным уравнениям успешно применялась теория полугрупп. В частности, в [2] систематически изучено асимптотическое поведение решения задачи (1) для случая, когда процесс рождения задан соотношением $B(t) = \int_0^\infty \beta(a)x(t, a) da$, $t \geq 0$, где β — коэффициент рождаемости. В недавних работах [6] и [7] доказано, что задача (1) корректна при $\alpha = 0$, и изучены асимптотические свойства ее решения.

*Работа выполнена при поддержке Фонда естественных наук Китая (гранты 11301412 и 11131006), Исследовательского фонда для докторских программ высших школ Китая (грант 20130201120053), Фонда естественных наук провинции Шаньси Китая (грант 2014JQ1017), проекта Постдокторального научного фонда Китая (2014M550482) и Фонда фундаментальных исследований для центральных университетов (контракт 2012jdhz52). Часть работы была выполнена во время визита первого автора к профессору Биргит Якоб в Вуппертальский университет, Германия.

Однако в практических приложениях α не может быть нулевой, поскольку имеет место смертность по причине беременности. К сожалению, к настоящему времени авторам не известна ни одна работа, в которой доказывалась бы корректность соответствующей задачи. Цель настоящей заметки — доказать эту корректность. Нашим основным средством является теорема об инвариантности допустимости, установленная в нашей недавней работе [5]. Для этого нам надо ввести некоторые основополагающие понятия.

Пусть $1 < p < \infty$, а X , U и Y — банаховы пространства. *Корректной линейной системой* на (X, U, Y) в смысле Саламона [9] и Вейса [12] называется такая четверка $\Sigma = (M, \Phi, \Psi_\infty, F_\infty)$, что

- (i) $M = (M(t))_{t \geq 0}$ есть C_0 -полугруппа, порождаемая оператором K на X ;
- (ii) $\Phi = (\Phi(t))_{t \geq 0}$ — такое семейство ограниченных линейных операторов из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ в X , что $\Phi(t + \tau)u = M(t)\Phi(\tau)u + \Phi(t)u(\cdot + \tau)$ для любого u из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ и любых неотрицательных τ и t ;
- (iii) Ψ_∞ — такой непрерывный линейный оператор из X в $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, Y)$, что $(\Psi_\infty x)(s) = (\Psi_\infty M(\tau)x)(s - \tau)$ для любого $x \in X$ и любых $s > \tau \geq 0$;
- (iv) F_∞ — такой непрерывный линейный оператор из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ в $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, Y)$, что $(F_\infty u)(s) = (\Psi_\infty \Phi(\tau)u + F_\infty u(\cdot + \tau))(s - \tau)$ для любого u из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ и любых s и τ , таких, что $s > \tau \geq 0$.

Если пара (M, Φ) удовлетворяет условиям (i) и (ii), то она называется *абстрактной линейной системой управления* на (X, U) . Каждой системе управления соответствует единственный оператор управления $\mathfrak{B} \in L(U, X_{-1})$, удовлетворяющий условию $\int_0^t M_{-1}(t-s)\mathfrak{B}u(s)ds \in X$ для любого u из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ и любого неотрицательного t (он называется *допустимым оператором управления*); см. [10]. Здесь $M_{-1} = (M_{-1}(t))_{t \geq 0}$ — экстраполяционная полугруппа. Для любого $t \geq 0$ оператор $M_{-1}(t)$ является непрерывным продолжением оператора $M(t)$ на экстраполяционное пространство X_{-1}^K , где X_{-1}^K — пополнение пространства X по норме $\|R(\lambda_0, K) \cdot\|$, а $R(\lambda_0, K)$ — резольвента оператора K , λ_0 — произвольный заданный элемент из резольвентного множества оператора K . Генератор полугруппы M_{-1} является продолжением оператора K на X_{-1}^K ; обозначим указанный генератор через K_{-1} (см. [1]). В этом случае будем говорить, что $(K, \mathfrak{B})$ порождает систему (M, Φ) . Если (M, Ψ_∞) удовлетворяет условиям (i) и (iii), то существует единственный оператор $\mathfrak{C}$ из $L(D(K), Y)$, удовлетворяющий неравенству $\int_0^T \|\mathfrak{C}M(t)x\|^p dt \leq c(T)\|x\|^p$ для любого x из $D(K)$ и соотношению $(\Psi_\infty x)(t) = \mathfrak{C}M(t)x$ для любого x из $D(M)$ и любого неотрицательного t ; этот оператор называется *допустимым оператором наблюдения* (см. [11]). В этом случае мы также будем говорить, что (M, Ψ_∞) является *абстрактной линейной системой наблюдения* на (X, Y) , порождаемой парой $(K, \mathfrak{C})$. Корректная линейная система $\Sigma = (M, \Phi, \Psi_\infty, F_\infty)$ называется *регулярной линейной системой*, если $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s (F_\infty u_0)(\sigma) d\sigma = 0$ в Y при постоянной входной функции $u_0(t) = z$, $z \in U$, $t \geq 0$. Будем говорить, что тройка $(K, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ порождает эту регулярную линейную систему. Нетрудно доказать, что тройка $(K, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ порождает регулярную линейную систему тогда и только тогда, когда

- (i) K порождает C_0 -полугруппу;
- (ii) $\mathfrak{B}$ является допустимым для K ;
- (iii) $\mathfrak{C}$ является допустимым для K ;

(iv) $\Phi(t)u \in D(\mathfrak{C}_\Lambda^K)$ для любого u из $L^p(\mathbb{R}^+, U)$ и п. в. $t \geq 0$, а $\mathfrak{C}_\Lambda^K \Phi \cdot \in L(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^+, U), L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^+, Y))$ (см. [12]). Здесь $\mathfrak{C}_\Lambda^K x = \lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{C}\lambda R(\lambda, K)x$, а $D(\mathfrak{C}_\Lambda^K) = \{x \in X : \text{предел } \lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{C}\lambda R(\lambda, K)x \text{ существует}\}$.

Полугруппа левых сдвигов определяется на $L^p([-r, 0], X)$ следующим образом:

$$(S_U(t)g)(\theta) := \begin{cases} g(t + \theta), & \text{если } t + \theta \leq 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

при $t \geq 0$ и $-r \leq \theta \leq 0$. Ее генератор определяется формулой $Q_U := d/d\theta$; его область определения $D(Q_U)$ есть множество $\{g \in W^{1,p}([-r, 0], U) : g(0) = 0\}$. Рассмотрим оператор $\phi(t) : L^p(\mathbb{R}^+, U) \rightarrow L^p([-r, 0], U)$, заданный формулой

$$(\phi(t)u)(\theta) = \begin{cases} u(t + \theta), & \text{если } t + \theta \geq 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

при $t \geq 0$ и $-1 \leq \theta \leq 0$. Хадд доказал, что (S_U, ϕ) есть абстрактная линейная система управления на $(L^p([-r, 0], U), U)$ с таким оператором управления $\beta_U \in L(U, (L^p([-r, 0], U))_{-1}^{Q_U})$, что $e^{\lambda \cdot} = (\lambda - (Q_U)_{-1})\beta_U$. Здесь оператор $e^{\lambda \cdot} : U \rightarrow L^p([-r, 0], U)$ удовлетворяет условию $(e^{\lambda \cdot} x)(t) = e^{\lambda t} x$, $x \in U$, $t \in [-r, 0]$.

2. Основные результаты. Пусть $U = L^1(\mathbb{R}^+)$. Определим оператор A_m формулой $(A_m f)(a) := -f'(a) - \mu(a)f(a)$ для почти всех положительных a , причем $D(A_m) := W^{1,1}(\mathbb{R}^+)$. Введем оператор $P : D(A_m) \rightarrow \mathbb{C}$, действующий следующим образом: $Pf := f(0)$. Определим функцию $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow U$ формулой $\xi(t) = x(t, \cdot)$, а $\xi_t : [-r, 0] \rightarrow U$ — формулой $\xi_t(\sigma) =: \xi(t + \sigma)$, $\sigma \in [-r, 0]$. Положим $\int_0^\infty \int_{-r}^0 \beta(\sigma, a)x(t + \sigma, a) d\sigma da := \mathcal{K}\xi_t$, $t \geq 0$, где $\mathcal{K} : L^1([-r, 0] \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$. Очевидно, что $E := L^p([-r, 0], U)$ — банахово пространство, а оператор $\mathcal{K} \in L(E, \mathbb{C})$ ограничен. В этих обозначениях задача (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\xi(t)}{dt} = A_m \xi(t) + L\xi_t, & P\xi(t) = \mathcal{K}\xi_t, & t \geq 0, \\ \xi(0) = f, \xi_0 = F, \end{cases} \quad (2)$$

где $L = -\alpha(\cdot)\delta_{-r}$ — ограниченный линейный оператор из $W^{1,p}([-r, 0], U)$ в U , $f \in U$, $F \in E$. По аналогии с работой [6] преобразуем (2) в абстрактную задачу Коши на $\mathcal{E} = E \times U$

$$\begin{cases} \mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}_L \mathcal{X}, & t \geq 0, \\ \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_0. \end{cases}$$

Здесь

$$\mathcal{A}_L := \begin{pmatrix} G_m & 0 \\ L & A_m \end{pmatrix}, \quad D(\mathcal{A}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix} \in D(G_m) \times D(A_m) : QF = f, Pf = \mathcal{K}F \right\},$$

$$(G_m F)(\sigma, a) = \frac{\partial}{\partial \sigma} F(\sigma, a), \quad D(G_m) = W^{1,1}([-r, 0], U),$$

а $Q : D(G_m) \rightarrow X$ определен формулой $QF = F(0, \cdot)$. В частности, при $L = 0$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{A}_0$. Функция $\mathcal{X} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{E}$ задана формулой $\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} \xi_t \\ \xi(t) \end{pmatrix}$.

Для получения основных результатов воспользуемся теоремой об инвариантности допустимости относительно перекрестных возмущений, доказанной в нашей недавней работе [5].

Теорема 1. *Предположим, что $(A, \Delta A, C)$ порождает регулярную линейную систему на (X, X, Y) . Тогда $((A_{-1} + \Delta A)|_X, C_\Lambda^A)$ порождает абстрактную линейную систему наблюдения, причем $C_\Lambda^{(A_{-1} + \Delta A)|_X} = C_\Lambda^A$. Здесь $(A_{-1} + \Delta A)|_X$ — сужение оператора $A_{-1} + \Delta A$ на X .*

Теорема 2. *Оператор $(\mathcal{A}_L, D(\mathcal{A}_L))$ порождает C_0 -полугруппу на $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \right)_{-1} \begin{pmatrix} 0 & K_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\mathcal{E}}.$$

Здесь $(A_0, D(A_0))$ — сужение оператора A_m на ядро оператора P (указанное сужение порождает C_0 -полугруппу T_0), $(G_0, D(G_0)) = (Q_E, D(Q_E))$ порождает C_0 -полугруппу S_0 , K_0 определяется формулой $K_0(f) = -f\chi_{[-r,0]}$, $f \in V$, где $\chi_{[-r,0]}$ — характеристическая функция отрезка $[-r, 0]$, а

$$L_0(F) = -\mathcal{K}(F)e^{-\int_0^\cdot \mu(s) ds}.$$

В силу [6] оператор $\mathcal{B}$ допустим для $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}_0 = (\mathcal{A}_{-1} + \mathcal{B})|_{\mathcal{E}}$ порождает C_0 -полугруппу. Из результатов работы [4] можно вывести, что L допустим для $G_0 = Q_E$. Таким образом, существуют такие постоянные T и $c(T)$, что

$$\int_0^T \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(t) & 0 \\ 0 & T_0(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix} \right\|^p dt \leq c(T) \|F\|^p, \quad \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_L).$$

Отсюда следует, что $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ порождает абстрактную линейную систему наблюдения.

Возьмем $g_1 \in L^p([0, t], E)$, $g_2 \in L^p([0, t], X)$ и $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$. Можно показать, что $-\int_0^t S_0(t-s)[g_2(s)\chi_{[-r,0]}] ds \in W^{1,p}([-r, 0], X)$ и $(-\int_0^t S_0(t-s)[g_2(s)\chi_{[-r,0]}] ds)(0) = 0$, из чего следует, что $-\int_0^t S_0(t-s)[g_2(s)\chi_{[-r,0]}] ds \in D(G_0)$. Далее,

$$G_0 \left(-\int_0^t S_0(t-s)[g_2(s)\chi_{[-r,0]}] ds \right) (\cdot) = \begin{cases} g_2(\cdot + t), & \cdot + t \geq 0, \\ 0, & \cdot + t < 0 \end{cases} = (\phi(t)g_2)(\cdot).$$

Согласно [4], тройка (Q_E, β_E, L) порождает регулярную линейную систему. Отсюда следует, что $\phi(t)g_2 \in D(L_\Lambda^{G_0})$ при п. в. $t \geq 0$ и $L_\Lambda^{G_0}\phi(\cdot) \in L(L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^+, E), L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^+, X))$. Тогда легко видеть, что $\mathcal{L}_\Lambda^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_\Lambda^{G_0} & 0 \end{pmatrix}$, где $D(\mathcal{L}_\Lambda^{\mathcal{A}}) = D(L_\Lambda^{G_0}) \times X$.

Применяя [6, теорема 5], получаем, что $-\int_0^t T_0(t-s)[\mathcal{K}(g_1(s))e^{-\int_0^\cdot \mu(\sigma) d\sigma}] ds \in D(A_0)$. Прямое вычисление показывает, что

$$\Phi(t)g = \begin{pmatrix} G_0 \left(-\int_0^t S_0(t-s)[g_2(s)\chi_{[-r,0]}] ds \right) \\ A_0 \left(-\int_0^t T_0(t-s)[\mathcal{K}(g_1(s))e^{-\int_0^\cdot \mu(\sigma) d\sigma}] ds \right) \end{pmatrix} \in D(\mathcal{L}_\Lambda^{\mathcal{A}})$$

при почти всех неотрицательных t . Кроме того, существуют такие положительные постоянные t_0 и d , что

$$\int_0^{t_0} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L & 0 \end{pmatrix}_{\Lambda}^{\mathcal{A}} \Phi(t)g \right\|^p dt \leq d \|g\|^p.$$

Следовательно, $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \mathcal{L})$ порождает регулярную линейную систему. По теореме 1 оператор $\mathcal{L}_{\Lambda}^{\mathcal{A}}$ является допустимым для $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{L}_{\Lambda}^{\mathcal{A}_0} = \mathcal{L}_{\Lambda}^{\mathcal{A}}$. Таким образом, $\mathcal{L}_{\Lambda}^{\mathcal{A}_0} = \mathcal{L}$ на $D(\mathcal{A}_0)$ и $\mathcal{L}$ является допустимым для $\mathcal{A}_0$. Следовательно, $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_0 + \mathcal{L}$ порождает C_0 -полугруппу [3, теорема 2.1]. $\square$

Аналогично тому, как это делается в [6, теорема 2], мы получаем из теоремы 2, что система (1) корректна, т. е. для любого $\begin{pmatrix} F \\ g \end{pmatrix} \in D(\mathcal{A}_L)$ существует единственная функция $\xi: [-r, \infty) \rightarrow U$, непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ и такая, что (2) выполняется, причем решение непрерывно зависит от начальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K.-J. Engel, R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolutional Equations*, Springer-Verlag, New York, 2000. [2] G. Greiner, in: *Infinite-Dimensional Systems* (Retzhof, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1076, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 86–100. [3] S. Hadd, *Semigroup Forum*, **70**:3 (2005), 451–465. [4] S. Hadd, A. Idrissi, A. Rhandi, *Math. Control Signals Syst.*, **18**:3 (2006), 272–291. [5] Z. D. Mei, J. G. Peng, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138** (2010), 4455–4468. [6] S. Piazzera, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:4 (2004), 427–439. [7] S. Piazzera, L. Tonetto, *J. Evol. Equ.*, **5**:1 (2005), 61–77. [8] H. Prüß, W. Schappacher, in: *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, Vieweg, Braunschweig, 1994, 74–90. [9] D. Salamon, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **300**:2 (1987), 383–431. [10] G. Weiss, *SIAM J. Control Optimization*, **27**:3 (1989), 527–545. [11] G. Weiss, *Israel J. Math.*, **65**:1 (1989), 17–43. [12] G. Weiss, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **342**:2 (1994), 827–854.

School of Mathematics and Statistics,
Xi'an Jiaotong University, China
e-mail: zhdmei@mail.xjtu.edu.cn

School of Mathematics and Statistics,
Xi'an Jiaotong University, China
e-mail: jgpeng@mail.xjtu.edu.cn

Поступила в редакцию
7 декабря 2012 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 24.04.2015. Дата выхода в свет 20.05.2015. Формат 70 × 100/16
Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,7 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 160 экз. Заказ 121.

Учредитель: Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. (499) 941-01-88
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6