Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Арутюнян, Е. Д. Косов, Пространства квазиинвариантности продакт-мер, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 2, 79–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:35:11

Пространства квазиинвариантности продакт-мер*

© 2015. Л. М. АРУТЮНЯН, Е. Д. КОСОВ

Известные результаты Шеппа [1] и Фельдмана [2] (см. также [3]) дают критерий того, что продакт-мера, являющаяся счетной степенью меры на прямой с положительной плотностью ϱ , эквивалентна своим сдвигам на векторы из ℓ^2 . Этот критерий состоит в существовании конечной информации Фишера плотности ϱ , т.е. в локальной абсолютной непрерывности плотности ϱ и интегрируемости функции $|\varrho'|^2/\varrho$. Нами исследован аналогичный вопрос для сдвигов меры на векторы из ℓ^q при $1 \leq q < 2$. Оказывается, что здесь неверен напрашивающийся аналог упомянутого результата, но удастся получить компактную характеристику. Отметим, что подобный вопрос рассматривался в [3], но в нашей работе ответ дан непосредственно в терминах плотности ϱ .

Пусть μ и ν — две вероятностные меры, абсолютно непрерывные относительно меры λ , $\varphi = d\mu/d\lambda$, $\psi = d\nu/d\lambda$. Интеграл Хеллингера этих мер (см. [4, т. 1, с. 364]) задается равенством $H(\mu, \nu) := \int (\varphi\psi)^{1/2} d\lambda$. Он не зависит от выбора меры λ , причем верна оценка $2(1 - H(\mu, \nu)) \leq \|\mu - \nu\| \leq 2\sqrt{1 - H^2(\mu, \nu)}$, где $\|\cdot\|$ — вариация меры. Эта оценка показывает, что меры взаимно сингулярны (обозначение: $\mu \perp \nu$) в точности тогда, когда $H(\mu, \nu) = 0$.

Для борелевской вероятностной меры μ на счетной степени $\mathbb{R}^\infty$ прямой через μ^h обозначим сдвиг на вектор h , т.е. $\mu^h(B) = \mu(B - h)$. Представляет интерес множество $Q(\mu)$ всех таких h , что $\mu^{th} \sim \mu$ при всех t , где символ $\mu \sim \nu$ означает эквивалентность мер. Это множество называется подпространством квазиинвариантности меры μ (о его свойствах см. [5]–[7], [8, гл. 5], [12], где даны дополнительные ссылки).

Какутани [10] установил следующий результат (см. также [4, т. 2, с. 437]). Пусть μ_n и ν_n — вероятностные меры на прямой, причем $\mu_n \sim \nu_n$ при всех n . Тогда если $\mu = \bigotimes_n \mu_n$ и $\nu = \bigotimes_n \nu_n$, то либо $\mu \sim \nu$, либо $\mu \perp \nu$, причем $H(\mu, \nu) = \prod H(\mu_n, \nu_n)$.

Если вероятностная плотность f почти всюду положительна и локально абсолютно непрерывна, зададим число $I_q(f)$ формулой $I_q(f) = \int |f'(x)|^q / f^{q-1}(x) dx$, где $q > 1$; при $q = 2$ получаем информационное количество Фишера.

Для $r \in (0, 1)$ введем пространство

$$E^r = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists C : \|f(\cdot + h) - f\|_{L^2} \leq C|h|^r \forall h\}.$$

Это пространство Бесова $B_{2,+\infty}^r$ (см. [9]).

Лемма. Пусть $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\sum F(s_n) < \infty$ для всякого сходящегося ряда из чисел $s_n > 0$. Тогда для некоторых $s_0 > 0$ и $C > 0$ при всех $s \in (0, s_0)$ верна оценка $F(s) < Cs$.

Доказательство. Предположив противное, для всякого n найдем такое $s_n < 2^{-n}$, что $F(s_n) > 2^n s_n$. Пусть $c_n \in \mathbb{N}$ таково, что $2^{-n} \leq c_n s_n < 2^{-n+1}$. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, в которой сначала c_1 раз стоит число s_1 , затем c_2 раз число s_2 и так далее, число s_n встречается c_n раз. Ясно, что $\sum a_n = \sum c_n s_n < \infty$ и $\sum c_n F(s_n) > \sum 2^n s_n c_n = \infty$, что дает противоречие. $\square$

Следствие. Пусть $q > 0$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\sum F(s_n) < \infty$, если $\sum s_n^q < \infty$. Тогда для некоторых s_0 и C при всех $s \in (0, s_0)$ верна оценка $F(s) < C|s|^q$.

Теорема. Пусть f — почти всюду положительная вероятностная плотность на прямой и $\mu = \bigotimes_n \mu_n$, где $\mu_n(dx) = f dx$ при всех n . Если $1 \leq q < 2$, то условие $\sqrt{f} \in E^{q/2}$ равносильно тому, что $\mu \sim \mu^h$ для всякого $h \in \ell^q$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{f} \in E^{q/2}$ и $h \in \ell^q$. Заметим, что $H(\mu, \mu^h) = \prod H(\nu, \nu^{h_n})$, где $h = (h_n)$. Сходимость этого произведения равносильна сходимости ряда $\sum (1 - H(\nu, \nu^{h_n}))$. По определению пространства E^r имеем

$$1 - H(\nu, \nu^s) = \frac{1}{2} \int |\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)}|^2 dx \leq C s^q, \quad s \geq 0;$$

значит,

$$\sum (1 - H(\nu, \nu^{h_n})) \leq C \sum |h_n|^q < \infty.$$

В обратную сторону, пусть $\mu \sim \mu^h$ для всех $h \in \ell^q$. Поскольку $\sum (1 - H(\nu, \nu^{h_n}))$ сходится для всех $\{h_n\}$ с $\sum |h_n|^q < \infty$, то функция $F(s) = (1 - H(\nu, \nu^s))$ удовлетворяет условиям следствия 1; поэтому

$$\int |\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)}|^2 dx = F(s) < C|s|^q,$$

что завершает доказательство. $\square$

Случай $q > 2$ охватывается теоремой Шеппа из [1]: при $h \in \ell^q \setminus \ell^2$ нет эквивалентности.

Замечание 1. Пусть f — почти всюду положительная вероятностная плотность на прямой, $I_q(f) < \infty$, $1 \leq q < 2$. Положим $\mu = \bigotimes_n \mu_n$, где $\mu_n(dx) = f dx$ при всех n . Тогда при $h \in \ell^q$ имеем $\mu \sim \mu^h$. В самом деле, $|a^{1/p} - b^{1/p}|^p \leq |a^{1/q} - b^{1/q}|^q$ при $a, b > 0$, $1 \leq q < p$. Тогда

$$\int |\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x-s)}|^2 dx \leq \int |f^{1/q}(x) - f^{1/q}(x-s)|^q dx \leq |s|^q \int \left| \frac{d}{dx} f^{1/q}(x) \right|^q dx.$$

Последний интеграл равен $I_q(f)$, и по теореме 1 имеем $\mu \sim \mu^h$ при $h \in \ell^q$.

Приведем примеры, показывающие, что условие $I_q(f) < \infty$ не является необходимым для включения $\ell^q \subset Q(\mu)$.

(1) При $q = 1$ достаточно рассмотреть плотность

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{a \in \mathbb{Z}} 2^{-|a|} I_{[0;1]}(x-a).$$

Она не является локально абсолютно непрерывной.

(2) Пусть $1 < q < 2$. Найдется такая функция f , что для меры $\mu = \bigotimes \mu_n$, где $\mu_n(dt) = f dt$, имеет место эквивалентность $\mu \sim \mu^h$ при $h \in \ell^q$, но функция f не является даже локально абсолютно непрерывной.

Доказательство. Рассмотрим такую функцию φ , что $1 \leq \varphi \leq 2$ и φ лежит в классе Гёльдера с показателем $q/2$, но при этом не является локально абсолютно непрерывной. Рассмотрим функцию $f = m e^{-4x^2} \varphi(x)$, где $m^{-1} = \int e^{-4x^2} \varphi(x) dx$. Очевидно, что f не является абсолютно непрерывной. Для эквивалентности мер μ и μ^h при $h \in \ell^q$ по теореме 1 достаточно показать, что $\int |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2 dx < Ch^q$. Действительно

$$\begin{aligned} \int |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2 dx &= \int |\sqrt{\varphi(x+h)} e^{-2(x+h)^2} - \sqrt{\varphi(x)} e^{-2x^2}|^2 dx \\ &\leq 2 \int |\sqrt{\varphi(x+h)} e^{-2(x+h)^2} - \sqrt{\varphi(x+h)} e^{-(x+h)^2 - x^2}|^2 dx \\ &\quad + |\sqrt{\varphi(x+h)} e^{-(x+h)^2 - x^2} - \sqrt{\varphi(x)} e^{-2x^2}|^2 dx. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся липшицевостью функции e^{-x^2} и $q/2$ -гёльдеровостью функции $\sqrt{\varphi(x)} e^{-x^2}$ ($|\sqrt{a}| - \sqrt{b}| \leq |a - b|$ при $|a|, |b| \geq 1$, $0 < r < 1$):

$$\int |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2 dx \leq C_1 h^2 \int \sqrt{\varphi(x+h)} e^{-(x+h)^2} dx + C_2 h^q \int e^{-x^2} dx < Ch^q.$$

Замечание 2. Стоит также отметить, что условие $\int |\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}|^2 dx \leq Ch^q$ равносильно оценке $\int_{|x| > R} |\widehat{\sqrt{f(x)}}|^2 dx \leq cR^{-q}$ на преобразование Фурье корня из плотности.

В частности, для выполнения первоначальной оценки достаточно выполнения условия $\int |x|^q |\widehat{\sqrt{f(x)}}|^2 dx < \infty$.

Авторы признательны рецензенту за ценные замечания и за существенное упрощение в построении примера (2).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. A. Shepp, Ann. Math. Statist., **36**:4 (1965), 1107–1112. [2] J. Feldman, Trans. Amer. Soc., **99** (1961), 342–349. [3] Н. Shimomura, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **11**:3 (1976), 749–773. [4] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, 2, РХД, Москва–Ижевск, 2006. [5] В. Н. Судаков, УМН, **18**:1 (1963), 188–190. [6] А. М. Вершик, В. Н. Судаков, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **12** (1969), 7–67. [7] Н. Shimomura, J. Math. Kyoto Univ., **21**:4 (1981), 703–713. [8] В. И. Богачев, *Дифференцируемые меры и исчисление Малляэна*, РХД, Москва–Ижевск, 2008. [9] Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, в кн.: Итоги науки и техники, Соврем. пробл. матем., Фундам. направления, т. 26, ВИНТИ, М., 1988, 5–157. [10] S. Kakutani, Ann. of Math., **49**:1 (1948), 214–224. [11] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985. [12] А. М. Вершик, Докл. АН СССР, **170** (1966), 497–500.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
e-mail: lavrentin@ya.ru

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
e-mail: ked_2006@mail.ru

Поступила в редакцию
29 июля 2014 г.