Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. О. Василевский, Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:36:00

Можно также вычислить матрицы Q^- и Q^+ :

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & \frac{1}{2}\sin t \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos t \sin t & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & -\frac{1}{2}\cos t \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cos t \sin t & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить матрицы K_n . Ненулевые собственные числа матрицы ρ_n равны собственным числам матрицы K_n и равны

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}.$$

Предел энтропий фон Неймана равен $\ln 4$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Аккарди, Функц. анализ и его прил., **9:1** (1975), 1–8. [2] L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. Mat. Pura Appl., **184:3** (2005), 327–346. [3] M. Fannes, B. Nachtergaele, R. F. Werner, Comm. Math. Phys., **144:3** (1992), 443–490. [4] З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326** (2005), 28–47. [5] A. Jamiolkowski, Rep. Mathematical Phys., **3:4** (1972), 275–278. [6] M. D. Choi, Linear Algebra Appl., **10** (1975), 285–290.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: zbejaeva@hse.ru

Поступила в редакцию
30 ноября 2014 г.

Финансовый университет при Правительстве РФ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oseled@gmail.com

УДК 514.84

Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе*

© 2015. Б. О. ВАСИЛЕВСКИЙ

Интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии была установлена в работе Дубровина, Кричевера и Новикова [1]. Большой интерес вызывает задача построения ин-

*Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации 2010-220-01-077.

тегрируемых дискретизаций этого оператора. Интегрируемая гиперболическая дискретизация конечнозонного оператора на квадратной решетке была найдена Кричевером [2]. Эллиптическая дискретизация как специальная редукция гиперболической была построена в статье Доливы, Гриневича, Нешпорского и Сантини [3]. Эта редукция оказалась аналогичной найденной Веселовым и Новиковым [4] для непрерывного случая.

Построенные в [3] решения отвечали голоморфной инволюции на кривой с двумя неподвижными точками. Из работы Кричевера и Грушевского [5], в частности, следует, что общие решения отвечают инволюции без неподвижных точек, а решения из [3] являются специальными. Тем не менее именно этот специальный случай мы будем обсуждать. Результат данной работы для инволюций с произвольным количеством неподвижных точек — тема для дальнейших исследований.

Напомним основные определения из теории дискретного комплексного анализа. Подробности можно найти в [7]. Квад-графом называется клеточное разбиение плоскости $\mathbb{C}$, каждая грань которого является четырехугольником. Это интересное обобщение квадратной решетки на плоскости. Существует непустой класс подграфов, допускающих такое вложение к комплексную плоскость, при котором каждая грань является ромбом [7, теорема 6]. Если вложение является квазикристаллическим, то соответствующий квад-граф можно представить в виде подкомплекса стандартного клеточного комплекса на $\mathbb{Z}^d$ с клетками размерности не более двух [7, гл. 3]. Теорема 6 из [7] дает также критерий представимости двумерного подкомплекса решетки $\mathbb{Z}^d$ в виде ромбовидного квазикристаллического вложения квад-графа в $\mathbb{C}$. Далее везде мы требуем, чтобы данный квад-граф $\mathcal{Q}$ представлялся в виде двумерного подкомплекса решетки $\mathbb{Z}^d$. Будем использовать следующие обозначения: $V(\mathcal{Q})$ — множество вершин графа $\mathcal{Q}$, $E(\mathcal{Q})$ — множество его ребер, $F(\mathcal{Q})$ — множество его положительно ориентированных граней, причем ориентация индуцируется с плоскости $\mathbb{C}$. Отображение вершин графа в узлы решетки при таком представлении обозначим через $\mathbf{n}: V(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$.

Пусть на диагоналях граней данного квад-графа $\mathcal{Q}$ определена комплекснозначная функция ν , причем для двух диагоналей e, e^* одной грани значения функции обратны: $\nu(e)\nu(e^*) = 1$. Мы будем называть такую функцию ν весовой функцией. Комплекснозначная функция $f: V(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ на вершинах квад-графа называется дискретной голоморфной (относительно ν), если для любой положительно ориентированной грани (x_0, y_0, x_1, y_1)

$$\frac{f(y_1) - f(y_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = i\nu(x_0, x_1) = -\frac{1}{i\nu(y_0, y_1)}.$$

Квад-граф $\mathcal{Q}$ является двудольным, в каждой грани одной доле принадлежат противоположные вершины [7, гл. 2]. Таким образом строятся два графа $\mathcal{G}, \mathcal{G}^*$, являющиеся клеточными разбиениями плоскости $\mathbb{C}$, грани которых имеют произвольное число вершин. Ребра каждого из графов являются диагоналями граней квад-графа $\mathcal{Q}$. Определим оператор Лапласа на функциях $f: V(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле

$$(\Delta f)(x_0) = \sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x)(f(x) - f(x_0)),$$

где суммирование проходит по всем соседним с x_0 вершинам в $\mathcal{G}$. Функция f называется дискретной гармонической (относительно ν), если $\Delta f \equiv 0$.

Обсудим определение несингулярности оператора Δ . Выберем в графе $\mathcal{G}$ простой цикл $p = (x_1, \dots, x_n, x_1)$. Он делит $V(\mathcal{G}) \setminus p$ на две части, выберем одну из них в качестве внутренней. Рассмотрим дискретную краевую задачу: продолжить функцию f с вершин цикла p на внутренние вершины так, чтобы внутри выполнялось равенство $\Delta f = 0$. Если весовая функция принимает только положительные (либо только отрицательные) значения, то несложно показать выполнение дискретного аналога принципа максимума модуля, из которого следует единственность для краевой задачи. В связи с этим логично называть оператор Δ несингулярным, если соответствующая ему весовая функция $\nu: E(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ принимает только значения одного знака.

Итак, пусть дан квад-граф $\mathcal{Q}$, реализуемый в виде подкомплекса стандартного клеточного комплекса на $\mathbb{Z}^d$ с клетками размерности не более двух. Используя конечнозонный подход, аналогичный используемому в [8], мы строим по спектральным данным весовую функцию ν . Далее мы представляем результат статьи — достаточное условие несингулярности соответствующего оператора Лапласа в терминах спектральных данных и отображения $\mathbf{n}$.

1. Многоточечная волновая функция. Мы приступаем к описанию того, как, используя конечнозонный подход, по отображению $\mathbf{n}$ построить весовую функцию ν , через которую выписываются уравнения Коши–Римана на квад-графе $\mathcal{Q}$, а также волновую функцию для этих уравнений. Весовая функция ν , в свою очередь, определяется через обобщенные спектральные данные, о которых сейчас пойдет речь.

Описанная ниже конструкция является частным случаем построений, описанных еще в [8]. Кроме этого, она обобщает построения, сделанные в [2] и в [3]. А именно, в указанных работах рассматривается случай квадратной решетки на плоскости и $d = 2$.

Рассмотрим компактную регулярную риманову поверхность Γ рода g . Фиксируем на ней точку нормировки R_1 , γ -дивизор общего положения $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ и коллекцию из d пар выделенных точек $A_1^+, A_1^-, \dots, A_d^+, A_d^-$. Все точки должны быть попарно различны.

По теореме Римана–Роха для любого целочисленного вектора $\mathbf{m} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ существует единственная функция $\Psi(\mathbf{m}; \lambda)$, $\lambda \in \Gamma$, такая, что: (1) при каждом $\mathbf{m}$ функция Ψ является мероморфной функцией от λ ; (2) Ψ имеет полюсы не более первого порядка в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$; (3) для каждого $j = 1, \dots, d$ функция Ψ имеет полюс порядка не более чем m_j в точке A_j^+ и нуль по крайней мере порядка m_j в точке A_j^- ; (4) выполняется условие нормировки $\Psi(\mathbf{m}; R_1) \equiv 1$. Будем называть Ψ *волновой функцией*. Она естественно переносится на вершины $p \in V(\mathcal{Q})$ графа: $\Psi(p, \lambda) = \Psi(\mathbf{n}(p); \lambda)$.

Напомним, что при отображении $\mathbf{n}$ каждое ребро графа $\mathcal{Q}$ переходит в единственный отрезок, параллельный одной из осей координат в $\mathbb{Z}^d$. Ориентируем ребра графа $\mathcal{Q}$ по возрастанию координаты. Другими словами, ориентация ребра должна совпадать с ориентацией соответствующего ему единичного вектора e_x , $x = 1, \dots, d$.

Определение 1. Будем говорить, что это ребро имеет метку e_x .

Рассмотрим произвольную грань $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$. Пусть ребро (p_1, p_2) имеет метку e_x , а ребро (p_1, p_3) — метку e_y , $1 \leq x, y \leq d$, $x \neq y$. Проверим, что

$$\Psi(p_4, \lambda) + \alpha_1(p_1, p_2)\Psi(p_2, \lambda) + \alpha_2(p_1, p_3)\Psi(p_3, \lambda) + \alpha_3(p_1, p_4)\Psi(p_1, \lambda) = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты α_j не зависят от λ и определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_1(p_1, p_2) &= - \lim_{\lambda \rightarrow A_x^+} \frac{\Psi(p_4, \lambda)}{\Psi(p_2, \lambda)}, & \alpha_2(p_1, p_3) &= - \lim_{\lambda \rightarrow A_y^+} \frac{\Psi(p_4, \lambda)}{\Psi(p_3, \lambda)}, \\ \alpha_3(p_1, p_4) &= -1 - \alpha_1(p_1, p_2) - \alpha_2(p_1, p_3). \end{aligned}$$

Действительно, левая часть в (1) удовлетворяет всем условиям для $\Psi(p, \lambda)$ за исключением того, что в R_1 она обращается в нуль. Тогда по теореме Римана–Роха сумма равна нулю при любом $\lambda \in \Gamma$.

Проделанные к этому моменту алгебро-геометрические построения аналогичны [2]. Займемся приведением формулы (1) к виду дискретного уравнения Коши–Римана.

Лемма 1. Пусть на Γ существует голоморфная инволюция σ с двумя неподвижными точками $R_+ = R_1$ и R_- и выполняется равенство $\sigma A_j^+ = A_j^-$ для $j = 1, \dots, d$. Кроме того, пусть существует мероморфный дифференциал Ω с двумя полюсами первого порядка в неподвижных точках R_+ , R_- и $2g$ нулями в $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(p, R_-) &= (-1)^{n_1(p) + \dots + n_d(p)}, \\ \alpha_1(p_1, p_2) &= -\alpha_2(p_1, p_3), & \alpha_3(p_1, p_4) &= -1. \end{aligned}$$

Хочется отметить, что многоточечная волновая функция вместе с уравнением (1) были построены еще в [8] при более общих предположениях. В этой работе они использовались для построения дискретного аналога решетки Дарбу–Егорова, размерность которой равна половине от количества неподвижных точек инволюции σ .

Пусть условия леммы выполнены. Определим ν на всех диагоналях граней из $F(\mathcal{D})$ по формулам

$$\nu(p_1, p_4) = \frac{1}{i\alpha_1(p_1, p_2)} = \frac{i}{\alpha_2(p_1, p_3)}, \quad \nu(p_2, p_3) = \frac{1}{\nu(p_1, p_4)}.$$

Тогда равенство (1) примет вид

$$\frac{\Psi(p_3, \lambda) - \Psi(p_2, \lambda)}{\Psi(p_4, \lambda) - \Psi(p_1, \lambda)} = i\nu(p_1, p_4) = -\frac{1}{i\nu(p_2, p_3)}.$$

Таким образом, волновая функция $\Psi(p, \lambda)$ является дискретной голоморфной на графе $\mathcal{D}$ с весовой функцией ν при любом фиксированном $\lambda \in \Gamma$.

В работе [7] неоднократно отмечается особый интерес случая положительной весовой функции. Для начала мы обсудим вещественность.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть на Γ существует антиголоморфная инволюция τ со следующими свойствами: $\tau\sigma = \sigma\tau$, $\tau R_+ = R_-$, точки $A_1^+, A_1^-, \dots, A_d^+, A_d^-$ являются неподвижными относительно τ , γ -дивизор как множество переходит в себя. Тогда весовая функция ν принимает вещественные значения и

$$\Psi(p, \tau\lambda) = (-1)^{|\mathbf{n}(p)|} \overline{\Psi(p, \lambda)}.$$

Проделанные к текущему моменту алгебро-геометрические построения аналогичны приведенным в [3]. Инволюция τ также используется и в [8] как условие вещественности решетки.

2. Достаточное условие несингулярности оператора Лапласа. Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Пусть также Γ является М-кривой. Это означает, что антиголоморфная инволюция τ имеет $g + 1$ неподвижных овалов $a_1, \dots, a_g, c$. Потребуем еще, чтобы все выделенные точки попадали на один овал: $A_j^\pm \in c$, $j = 1, \dots, d$. Отсюда следует, что $\sigma c = c$. При подходящей нумерации точек $A_j^\pm$ они располагаются на овале c в порядке

$$A_1^+, A_2^+, \dots, A_d^+, A_1^-, A_2^-, \dots, A_d^-.$$

Будем считать, что именно такая нумерация была выбрана изначально.

Лемма 3. Пусть $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$ — произвольная грань. Не умаляя общности, будем считать, что ребра этой грани ориентированы в сторону вершин с большими индексами (см. определение 1). Пусть ребро (p_1, p_2) имеет метку e_x , а ребро (p_1, p_3) — метку e_y . Тогда

$$\lim_{A_x^+} \frac{\Psi(p_2, \lambda)}{\Psi(p_4, \lambda)} \frac{\Psi(p_3, \lambda)}{\Psi(p_1, \lambda)} > 0, \quad \lim_{A_y^+} \frac{\Psi(p_3, \lambda)}{\Psi(p_4, \lambda)} \frac{\Psi(p_2, \lambda)}{\Psi(p_1, \lambda)} > 0.$$

При доказательстве активно используется тот факт, что на овале c волновая функция вещественна либо чисто мнима. Основным методом является подсчет вычетов дифференциалов вида $\Psi(\lambda, p_i) \Psi(\sigma \lambda, p_j) \Omega(\lambda)$ в выделенных точках.

Рассмотрим теперь две произвольные соседние грани $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in F(\mathcal{D})$, $(p_2, p_5, p_6, p_4) \in F(\mathcal{D})$ квад-графа. Пусть ребро (p_1, p_2) имеет метку e_x , ребро (p_2, p_4) — метку e_y , ребро (p_2, p_5) — метку e_z . Ориентация ребра (p_2, p_4) может быть произвольной. Потребуем, чтобы ребра (p_1, p_2) и (p_2, p_5) имели общий конец или общее начало тогда и только тогда, когда точка A_y^+ лежит между A_x^+ , A_z^+ на овале c . Назовем это условием С.

Теорема 1 (достаточное условие положительности весовой функции). Пусть выполняются описанные выше условия на спектральные данные. Все значения весовой функции ν имеют один знак тогда и только тогда, когда выполняется условие С.

Будем доказывать положительность отношения значений ν на соседних гранях. При доказательстве необходимо разобрать три случая взаимной ориентации ребер (p_1, p_2) , (p_2, p_5) . Для краткости разберем только тот, в котором они ориентированы в сторону вершин с большими индексами. Тогда

$$\frac{\nu(p_1, p_4)}{\nu(p_2, p_6)} = \lim_{A_x^+} \frac{-\Psi(p_2, \lambda)}{\Psi(p_4, \lambda)} \lim_{A_z^+} \frac{\Psi(p_6, \lambda)}{-\Psi(p_5, \lambda)}.$$

Рассмотрим мероморфную функцию $f(\lambda) = \Psi(p_2, \lambda) / \Psi(p_4, \lambda)$. По лемме 3, примененной ко второй грани, левая часть последнего равенства больше нуля, если и только если $f(A_x^+) / f(A_z^+) > 0$. Нетрудно видеть, что это эквивалентно тому, что точка A_y^+ не лежит между A_x^+ , A_z^+ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **229**:1 (1976), 15–18. [2] И. М. Кричевер, Докл. АН СССР, **285**:1 (1985), 31–36. [3] A. Doliwa,

P. Grinevich, M. Nieszporiski, P. M. Santini, J. Math. Phys., **48**:1 (2007), 013513. [4] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **279**:1 (1984), 20–24; 279:4 (1984), 784–788. [5] S. Grushevsky, I. Krichever, Duke Math. J., **152**:2 (2010), 317–371. [6] J. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 352, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973. [7] A. Bobenko, C. Mercat, Y. Suris, J. Reine Angew. Math., **583** (2005), 117–161. [8] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, в кн.: Труды МИАН, т. 225, Наука, М., 1999, 21–45.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vasilevskiy.boris@gmail.com

Поступила в редакцию
11 ноября 2013 г.

УДК 517.587+517.588

Детерминантные меры, связанные с большими полиномами q -Якоби*

© 2015. В. Е. Горин, Г. И. Ольшанский

Детерминантные меры образуют специальный класс вероятностных мер на пространствах локально конечных точечных конфигураций (см. обзор Бородина [1]). Ключевое свойство детерминантной меры состоит в том, что ее корреляционные функции всех порядков выражаются некоторым простым образом через одну функцию двух переменных, которая называется корреляционным ядром.

В работе Бородина и Ольшанского [2] изучалось семейство детерминантных мер, названных *zw-мерами*. Они связаны с задачей гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$, которая была поставлена в работе Ольшанского [12]. Аналоги *zw-мер* существуют также для других бесконечномерных классических групп и для бесконечномерных симметрических пространств (Ольшанский–Осиненко [14]). *zw-меры* играют фундаментальную роль в бесконечномерном гармоническом анализе, поскольку их скейлинговые пределы управляют спектральным разложением некоторых выделенных унитарных представлений.

С другой стороны, *zw-меры* являются красивыми комбинаторными объектами, у которых есть много общего с так называемыми *z-мерами* — некоторым частным случаем введенных Окуньковым мер Шура на разбиениях. Как и меры Шура, *zw-меры* допускают обобщение, в котором возникает дополнительный деформационный параметр, аналогичный дайсоновскому β -параметру в теории случайных матриц или непрерывному параметру в симметрических функциях Джека (Ольшанский [13]).

Наша цель — показать, что понятие *zw-мер* можно обобщить в другом направлении, а именно, у *zw-мер* существует (неочевидный) q -аналог. Наш первый результат состоит в том, что у « N -частичных q -*zw-мер*» есть предел при $N \rightarrow \infty$ и предельная вероятностная мера является детерминантной мерой на некотором пространстве бесконечных точечных конфигураций. Мы нахо-

*Исследование Г. И. Ольшанского выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150).