Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Мультисдвиг в гильбертовом пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 69–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa32>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:13:17

Мультидвиг в гильбертовом пространстве*

© 2005. П. А. ТЕРЕХИН

§1. Введение

В функциональном анализе и теории функций хорошо известен оператор (простого одностороннего) сдвига V в пространстве Харди H^2 аналитических в открытом единичном круге $|z| < 1$ функций, последовательность коэффициентов ряда Тейлора (в нуле) которых суммируема с квадратом:

$$Vf(z) = zf(z), \quad f \in H^2$$
$$\left(f \in H^2 \iff f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right).$$

Фундаментальные результаты об инвариантных подпространствах оператора сдвига и о связи мультипликативной структуры пространства Харди с геометрией оператора сдвига принадлежат Берлингу [1]. Халмош [2] предложил общий операторный подход к изучению сдвига как частного случая изометрии гильбертова пространства:

если V — изометрия комплексного сепарабельного гильбертова пространства H и существует такой элемент $e \in H$, что система векторов $\{V^n e : n \geq 0\}$ образует ортонормированный базис в H , то оператор V унитарно эквивалентен сдвигу.

Такая характеристика оператора сдвига приводит к следующему его обобщению на случай многих операторов. (Другое хорошо известное естественное обобщение оператора сдвига на случай нескольких операторов реализуется как операторы «умножения на независимое переменное z_j » в пространстве Харди $H^2(U^n)$ функций многих комплексных переменных, аналитических в единичном поликруге.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3]. Пусть V_0 и V_1 — изометрии гильбертова пространства H . Скажем, что пара $\{V_0, V_1\}$ определяет структуру мультидвига, если существует элемент $e \in H$, такой, что семейство векторов $\{V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} e : k \geq 0, \alpha_\nu \in \{0, 1\}, 1 \leq \nu \leq k\}$ образует ортонормированный базис в H .

Структура мультидвига допускает следующую каноническую модель, тесно связанную с семействами функций-всплесков на отрезке.

Пусть $H = L_0^2[0, 1]$ — подпространство в $L^2[0, 1]$, состоящее из функций $f(t)$ с носителем на отрезке $[0, 1]$, интеграл от которых на этом отрезке равен нулю,

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 03-01-00390, программы «Ведущие научные школы РФ», проект НШ-1295.2003.1, и INTAS, грант 99-00089.

$$\text{supp } f \subset [0, 1], \quad f \in L^2[0, 1], \quad \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Тогда изометрические операторы V_0, V_1 , такие, что

$$V_0 f(t) = 2^{1/2} f(2t), \quad V_1 f(t) = 2^{1/2} f(2t - 1),$$

образуют структуру мультисдвига в пространстве $H = L_0^2[0, 1]$. В самом деле, индукцией по $k = 0, 1, \dots$ нетрудно проверить равенство

$$V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} f(t) = 2^{k/2} f(2^k t - j) = f_{k,j}(t),$$

где $j = \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ — двоичное разложение, $\alpha_\nu = 0$ или 1 , $1 \leq \nu \leq k$, $j = 0, \dots, 2^k - 1$. В частности, если $\chi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$, то

$$\{V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} \chi : k \geq 0, \alpha_\nu \in \{0, 1\}, 1 \leq \nu \leq k\} = \{\chi_{k,j} : k \geq 0, 0 \leq j \leq 2^k - 1\}$$

— система функций Хаара (без постоянной 1), образующая ортонормированный базис в $H = L_0^2[0, 1]$.

Заметим, что аналогичные примеры мультисдвига могут быть построены не только на единичном отрезке, но и на множествах, обладающих так называемой структурой самоподобия. Нетрудно видеть, что все реализации мультисдвига унитарно эквивалентны и, таким образом, рассмотренный пример является, по существу, единственным.

В статье решается следующая основная задача: изучить структуру инвариантных подпространств мультисдвига и установить для мультисдвига аналог канонической факторизации аналитических функций из пространства Харди на внутренний и внешний множители (по поводу канонической факторизации см., например, [4, с. 118]).

Укажем одно естественное обобщение структуры мультисдвига.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конечное семейство изометрий $\{V_0, \dots, V_d\}$, $d \geq 1$, гильбертова пространства H назовем *кратным* (или *векторным*) *мультисдвигом*, если существует подпространство $E \subset H$, такое, что семейство подпространств $\{V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k} E : k \geq 0, 0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_k \leq d\}$ образует ортогональный базис (из подпространств) в H . Подпространство E называется *порождающим*, а его размерность $\dim E$ — *кратностью* мультисдвига.

По поводу понятия базиса из подпространств, в частности ортогонального базиса из подпространств, см., например, [5, с. 401–403].

Заметим, что образы $V_0 H, \dots, V_d H$ операторов, образующих кратный мультисдвиг, попарно ортогональны и это вместе с условием изометричности этих операторов может быть записано в следующем виде:

$$V_i^* V_j = \delta_{ij} I, \quad 0 \leq i, j \leq d, \quad (1)$$

где V_i^* — сопряженный оператор, I — тождественный оператор, а δ — символ Кронекера. Соотношения (1) показывают, что операторы, образующие простой (кратности 1) или кратный мультисдвиг, не могут коммутировать между собой. Сделаем несколько общих замечаний относительно конечномерных аналогов структуры мультисдвига.

Очевидно, что непосредственный аналог структуры мультисдвига отсутствует при условии, что $\dim H < \infty$. Это связано с тем обстоятельством, что изометрический оператор, отображающий конечномерное пространство в себя, является унитарным. Поэтому соотношения (1) в конечномерном пространстве

не могут выполняться. Столь же очевидно, что соотношения (1) могут выполняться для некоторых систем операторов $\{V_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{i=0}^d$ при условии, что $m \geq (d+1)n$. Нетривиальная задача в классическом действительном случае евклидова пространства возникает при замене оператора $V_i^* V_j$ в (1) его действительной частью:

$$\frac{V_i^* V_j + V_j^* V_i}{2} = \delta_{ij} I, \quad 0 \leq i, j \leq d,$$

где $V_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $0 \leq i \leq d$. Вопрос о существовании такой системы операторов непосредственно связан с существованием нормированного билинейного отображения (НБО) вида $\Phi: \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (нормированность означает выполнение равенства $|\Phi(x, y)| = |x| \cdot |y|$). При $m = n$ эта задача восходит к теореме Гурвица–Радона о композиции квадратичных форм (см. [6]) и тесно связана с задачей о числе линейно независимых линейных векторных полей на сфере (см., например, [7, с. 209–216], а также [8, с. 295]). При $m > n$ частным случаем этой задачи является так называемая обобщенная проблема Гурвица (см. [9]), для которой известно лишь несколько частных решений. Для $m = n+1$ общее решение задачи о существовании НБО $\Phi: \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ получено в работе [10].

Всюду в дальнейшем под словом «мультидвиг» будем понимать структуру из определения 1. Рассмотрение кратного мультидвига будем оговаривать особо.

§2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Условимся о следующих обозначениях:

$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k$ — семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустую последовательность);

$|\alpha|$ — длина последовательности $\alpha \in A$, т.е. $|\alpha| = k$, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$; длину пустой последовательности полагаем равной нулю;

$\alpha\beta$ — конкатенация последовательностей $\alpha, \beta \in A$: если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$;

$V^\alpha = V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_k}$ — произведение операторов, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$, первым действует оператор V_{α_k} , последним — V_{α_1} ; пустое произведение считаем равным тождественному оператору I ;

$h_\alpha = V^\alpha h$ для $h \in H$, в частности, $e_\alpha = V^\alpha e$, $\alpha \in A$;

$L_\alpha = V^\alpha L$ для подпространства $L \subset H$, $\alpha \in A$;

E — одномерное подпространство, натянутое на вектор e ;

$\oplus$ — знак ортогональной суммы;

$L \ominus L' = L''$ означает, что $L = L' \oplus L''$.

Установим некоторые простейшие свойства мультидвига $\{V_0, V_1\}$, непосредственно вытекающие из определения 1.

Во-первых, ясно, что образы $V_0 H$ и $V_1 H$ ортогональны между собой и справедливо разложение

$$H \ominus E = V_0 H \oplus V_1 H. \quad (2)$$

Отсюда видно, что порождающее подпространство E определяется мультидвигом $\{V_0, V_1\}$ однозначно и вектор e в определении 1 задан с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице.

ЛЕММА 1. Для любого $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} E_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha| = k} H_\alpha. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ соотношение (3) обращается в тривиальное равенство $H \ominus \{0\} = H$, а при $k = 1$ — в уже выписанное соотношение (2). Предположим, что при некотором $k \geq 1$ соотношение (3) уже доказано. Применяя к нему изометрические операторы V_0 и V_1 , получаем

$$V_0 H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} V_0 E_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha| = k} V_0 H_\alpha, \quad V_1 H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} V_1 E_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha| = k} V_1 H_\alpha.$$

Отсюда, взяв ортогональную сумму левых и соответственно правых частей равенств, получим

$$(V_0 H \oplus V_1 H) \ominus \left(\bigoplus_{0 < |\alpha| < k+1} E_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha| = k+1} H_\alpha.$$

Учитывая (2), окончательно будем иметь

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k+1} E_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha| = k+1} H_\alpha.$$

Доказано соотношение (3) с заменой k на $k + 1$. По индукции заключаем, что соотношение (3) выполняется для любого k .

ЛЕММА 2. Справедливо соотношение

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha| = k} H_\alpha = \{0\}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $h \in H$ принадлежит подпространству $\bigoplus_{|\alpha| = k} H_\alpha$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Тогда в силу соотношения (3) леммы 1 вектор h ортогонален всем подпространствам E_α , $\alpha \in A$. Это означает, что $(h, e_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in A$, т. е. $h = 0$.

ЛЕММА 3. Для $\alpha, \beta \in A$ и вектора $h \in H$ имеем

$$(h_\beta, e_\alpha) = \begin{cases} (h, e_\gamma), & \text{если } \alpha = \beta\gamma, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим вектор h по ортонормированному базису $\{e_\gamma : \gamma \in A\}$,

$$h = \sum_{\gamma \in A} (h, e_\gamma) e_\gamma.$$

Тогда

$$h_\beta = V^\beta h = \sum_{\gamma \in A} (h, e_\gamma) V^\beta e_\gamma = \sum_{\gamma \in A} (h, e_\gamma) e_{\beta\gamma}.$$

Таким образом, если $\alpha = \beta\gamma$ для некоторого $\gamma \in A$ (если такой набор γ существует, то он единствен согласно определению конкатенации), то $(h_\beta, e_\alpha) =$

(h, e_γ) . Если же α не представим в виде $\alpha = \beta\gamma$ ни при каком $\gamma \in A$, то $(h_\beta, e_\alpha) = 0$.

§3. Инвариантные подпространства мультидвига и внутренние функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подпространство $M \subset H$ назовем *инвариантным относительно мультидвига*, если $V_0M \subset M$ и $V_1M \subset M$.

Ясно, что если M — инвариантное подпространство, то $M_\alpha \subset M$ для любого $\alpha \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подпространство $N \subset H$ назовем *блуждающим относительно мультидвига*, если подпространства N_α , $\alpha \in A$, попарно ортогональны.

Нетрудно видеть, что, для того чтобы N было блуждающим подпространством, достаточно его ортогональности каждому из подпространств N_α , $\alpha \in A$, $|\alpha| \geq 1$.

Если N — блуждающее подпространство, то

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} N_\alpha \quad (5)$$

— инвариантное подпространство. При этом по аналогии с (2) имеем

$$M \ominus N = V_0M \oplus V_1M. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Если M — ненулевое инвариантное подпространство, то существует (и при том единственное) блуждающее подпространство N , для которого имеет место представление (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подпространства V_0M и V_1M ортогональны и M — инвариантное подпространство, то

$$V_0M \oplus V_1M \subset M. \quad (7)$$

Покажем, что последнее включение является строгим. Предположим противное, т. е. пусть

$$V_0M \oplus V_1M = M.$$

Отсюда индукцией по k получаем соотношение

$$\bigoplus_{|\alpha|=k} M_\alpha = M, \quad k = 0, 1, \dots$$

Используя лемму 2, будем иметь

$$\{0\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha \supset \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} M_\alpha = M,$$

что противоречит условию теоремы. Следовательно, включение (7) строгое и соотношение (6) корректно определяет ненулевое подпространство N . Далее, точно так же, как из (2) вытекает (3), из (6) вытекает соотношение

$$M \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} N_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} M_\alpha, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда видно, что подпространство N блуждающее и справедливо представление (5), поскольку

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} M_{\alpha} \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} H_{\alpha} = \{0\}$$

согласно (4).

Известно, что в случае оператора сдвига блуждающее подпространство N , соответствующее ненулевому инвариантному подпространству M , является одномерным (см., например, [11, с. 84]). Следующие примеры показывают, что для мультисдвига это, вообще говоря, не так.

ПРИМЕР 1. Пусть M — замкнутая линейная оболочка векторов e_{α} , $|\alpha| \geq k$. Очевидно, что M является инвариантным подпространством. Ему соответствует блуждающее подпространство

$$N = M \ominus (V_0 M \oplus V_1 M) = \bigoplus_{|\alpha|=k} E_{\alpha}.$$

Мы видим, что $\dim N = 2^k$. Несколько видоизменив рассуждения, можно получить примеры инвариантных подпространств M , для которых соответствующее блуждающее подпространство N имеет произвольную конечную размерность. Следующий пример показывает, что размерность блуждающего подпространства N может быть бесконечной.

ПРИМЕР 2. Пусть M — замкнутая линейная оболочка векторов вида $V^{\alpha} V_0 V_1^m e$, $\alpha \in A$, $m = 0, 1, \dots$. Очевидно, что M является инвариантным подпространством. Так как $V^{\alpha} V_0 V_1^m = V^{\beta} V_0 V_1^n e$ только при $m = n$ и $\alpha = \beta$, соответствующее блуждающее подпространство N есть замкнутая линейная оболочка векторов $V_0 V_1^m e$, $m = 0, 1, \dots$, так что $\dim N = \infty$.

Учитывая определение 2 кратного мультисдвига, теорему 1 можно сформулировать следующим образом:

сужение мультисдвига на инвариантное подпространство M является кратным мультисдвигом с порождающим пространством N конечной или бесконечной кратности.

Для вектора $f \in H$ обозначим через $M(f)$ замкнутую линейную оболочку $\overline{\text{span}}\{f_{\alpha} : \alpha \in A\}$ векторов f_{α} . Очевидно, что подпространство $M(f)$ инвариантно относительно мультисдвига.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Подпространства вида $M(f)$ назовем *элементарными инвариантными подпространствами*.

ТЕОРЕМА 2. *Ненулевому элементарному инвариантному подпространству $M(f)$ соответствует одномерное блуждающее подпространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \neq 0$, найдется индекс $\beta \in A$, такой, что $(f, e_{\beta}) \neq 0$. Будем считать индекс β выбранным таким образом, что $|\beta|$ принимает наименьшее из всех возможных значений, т. е. $(f, e_{\gamma}) = 0$ при $|\gamma| < |\beta|$. Спроецируем вектор e_{β} на подпространство $M(f)$ и обозначим через g проекцию вектора e_{β} . Так как $(f, e_{\beta}) \neq 0$, то $g \neq 0$. По определению $g \in M(f)$. Установим принадлежность $g \in N$, где N — блуждающее подпространство, соответствующее инвариантному подпространству $M(f)$ согласно теореме 1. Ввиду

соотношения (6) требуется доказать ортогональность вектора g подпространствам $V_0M(f)$ и $V_1M(f)$. Пусть $\alpha \in A$. По лемме 3 имеем

$$(V_0f_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} (f, e_\gamma), & \text{если } (\beta_1, \dots, \beta_l) = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_m), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как здесь $|\gamma| = |\beta| - |\alpha| - 1 < |\beta|$, то $(f, e_\gamma) = 0$ согласно выбору индекса β . Таким образом, $(V_0f_\alpha, e_\beta) = 0$ для всех $\alpha \in A$. Аналогично, $(V_1f_\alpha, e_\beta) = 0$. Следовательно,

$$(V_if_\alpha, g) = (V_if_\alpha, e_\beta) + (V_if_\alpha, g - e_\beta) = 0, \quad i = 0, 1$$

(мы учли ортогональность вектора $g - e_\beta$ подпространству $M(f)$). Этим доказана ортогональность вектора g подпространствам $V_0M(f)$ и $V_1M(f)$. Тем самым принадлежность $g \in N$ установлена. Для доказательства одномерности подпространства N предположим, что некоторый вектор $h \in N$ ортогонален g , и покажем, что $h = 0$. Положим

$$M_k(f) = \bigoplus_{|\alpha|=k} M_\alpha(f), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $M_\alpha(f) = (M(f))_\alpha$. Докажем индукцией по k , что $h \in M_k(f)$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Принадлежность $h \in M_0(f) = M(f)$ очевидна. Пусть при некотором k имеем $h \in M_k(f)$. Это означает, что существуют такие полиномы

$$P_n(f) = \sum_{|\alpha|=k}^{k+n} c_{n,\alpha} f_\alpha,$$

что $h = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f)$. Пусть $|\alpha| = k$. Вычислим

$$(P_n(f), V^\alpha e_\beta) = \sum_{|\gamma|=k}^{k+n} c_{n,\gamma} (f_\gamma, V^\alpha e_\beta).$$

По лемме 3 имеем

$$(f_\gamma, V^\alpha e_\beta) = \begin{cases} (f, e_\delta), & \text{если } \alpha\beta = \gamma\delta, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как здесь $|\delta| = |\alpha| + |\beta| - |\gamma|$ и $|\alpha| = k$, $k \leq |\gamma| \leq k + n$, то при $|\gamma| > k$ будем иметь $|\delta| < |\beta|$ и $(f, e_\delta) = 0$ согласно выбору индекса β . Если же $|\gamma| = k$, то из равенства $\alpha\beta = \gamma\delta$ и определения конкатенации вытекает, что $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. Поэтому единственный случай, когда $(f_\gamma, V^\alpha e_\beta) \neq 0$, — это тот случай, при котором $\alpha = \gamma$ и $(f_\gamma, V^\alpha e_\beta) = (f, e_\beta)$. Итак,

$$(P_n(f), V^\alpha e_\beta) = c_{n,\alpha} (f, e_\beta),$$

откуда следует, что

$$c_{n,\alpha} = \frac{(P_n(f), V^\alpha e_\beta)}{(f, e_\beta)}.$$

Устремив здесь n к ∞ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,\alpha} = \frac{(h, V^\alpha e_\beta)}{(f, e_\beta)}, \quad |\alpha| = k. \quad (8)$$

Поскольку $h \in M_k(f)$, по определению пространства $M_k(f)$ имеем

$$h = \sum_{|\gamma|=k} V^\gamma h^{(\gamma)},$$

где $h^{(\gamma)} \in M(f)$. Так как $|\alpha| = |\gamma| = k$, то

$$(h, V^\alpha e_\beta) = \sum_{|\gamma|=k} (V^\gamma h^{(\gamma)}, V^\alpha e_\beta) = (h^{(\alpha)}, e_\beta).$$

Так как вектор $g - e_\beta$ ортогонален $M(f)$, то

$$(h, V^\alpha e_\beta) = (h^{(\alpha)}, e_\beta) = (h^{(\alpha)}, g).$$

Далее,

$$(h, V^\alpha e_\beta) = (h^{(\alpha)}, g) = (V^\alpha h^{(\alpha)}, V^\alpha g) = \sum_{|\gamma|=k} (V^\gamma h^{(\gamma)}, V^\alpha g) = (h, V^\alpha g).$$

Теперь заметим, что $(h, V^\alpha g) = 0$ для всех $\alpha \in A$. Действительно, если $|\alpha| = 0$, то $(h, g) = 0$ согласно выбору вектора h . Если же $|\alpha| \geq 1$, то подпространства N и N_α ортогональны, так как N — блуждающее подпространство. Значит, ортогональны и векторы $h \in N$ и $V^\alpha g \in N_\alpha$. Таким образом, окончательно находим, что $(h, V^\alpha e_\beta) = 0$. Итак, возвращаясь к (8), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,\alpha} = 0, \quad |\alpha| = k. \quad (9)$$

Полиномы $P_n^{(0)}(f)$ и $P_n^{(1)}(f)$ определим, исходя из равенств

$$P_n(f) = \sum_{|\alpha|=k}^{k+n} c_{n,\alpha} f_\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \dots + \sum_{|\alpha|=k+1}^{k+n} \dots = P_n^{(0)}(f) + P_n^{(1)}(f).$$

Ввиду (9) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\|P_n^{(0)}(f)\| = \|f\| \cdot \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_{n,\alpha}|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $h = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(1)}(f)$. Так как $P_n^{(1)}(f) \in M_{k+1}(f)$, то $h \in M_{k+1}(f)$. По индукции заключаем, что $h \in M_k(f)$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Осталось заметить, что по лемме 3

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} M_k(f) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} M_\alpha(f) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha = \{0\}.$$

Итак, $h = 0$, т. е. $\dim N = 1$.

Доказанная теорема 2 характеризует (ненулевые) элементарные инвариантные подпространства как в точности те инвариантные подпространства, для которых соответствующее им блуждающее подпространство одномерно. Произвольное инвариантное подпространство есть, таким образом, ортогональная сумма конечного или счетного числа элементарных инвариантных подпространств. Это обстоятельство является принципиальным отличием структуры инвариантных подпространств мультисдвига от структуры инвариантных подпространств оператора сдвига.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функцию (вектор) $\varphi \in H$ назовем *внутренней*, если семейство $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ ортонормированное.

Укажем тривиальные примеры внутренних функций:

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha e_\alpha, \quad \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2 = 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

В §5 будет указан способ построения нетривиальных примеров внутренних функций. Обозначим через φH элементарное инвариантное подпространство $\overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$, порожденное внутренней функцией φ . Рассмотрим $Q(\varphi)$ — линейный оператор в H , определяемый соотношениями

$$Q(\varphi)e_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \alpha \in A.$$

Поскольку φ — внутренняя функция, $Q(\varphi)$ — изометрический оператор. Ясно, что $\varphi H = Q(\varphi)H$ — образ оператора $Q(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 3. *Всякое ненулевое элементарное инвариантное подпространство $M(f)$ имеет вид φH для некоторой внутренней функции φ .*

Если φ и ψ — такие внутренние функции, что $\varphi H \subset \psi H$, то найдется внутренняя функция θ , для которой $Q(\varphi) = Q(\psi)Q(\theta)$.

Если $\varphi H = \psi H$, то внутренние функции φ и ψ отличаются постоянным множителем, по модулю равным единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение является переформулировкой теоремы 2.

Пусть $\varphi H \subset \psi H$. Так как $\psi H = Q(\psi)H$, то $\varphi = Q(\psi)\theta$ для некоторого вектора $\theta \in H$. Оператор $Q(\psi)$ перестановочен с операторами V^α ; поэтому

$$Q(\varphi)e_\alpha = \varphi_\alpha = V^\alpha \varphi = V^\alpha Q(\psi)\theta = Q(\psi)V^\alpha \theta = Q(\psi)\theta_\alpha = Q(\psi)Q(\theta)e_\alpha.$$

Значит, $Q(\varphi) = Q(\psi)Q(\theta)$. В силу изометричности операторов $Q(\varphi)$ и $Q(\psi)$ имеем $Q^*(\varphi)Q(\varphi) = Q^*(\psi)Q(\psi) = I$, откуда

$$Q^*(\theta)Q(\theta) = Q^*(\theta)Q^*(\psi)Q(\psi)Q(\theta) = Q^*(\varphi)Q(\varphi) = I.$$

Таким образом, $Q(\theta)$ — изометрический оператор, т. е. θ — внутренняя функция. Второе утверждение доказано. Докажем третье.

Пусть $\varphi H = \psi H$. Тогда по уже доказанному найдутся внутренние функции θ и θ^* , такие, что $Q(\varphi) = Q(\psi)Q(\theta)$ и $Q(\psi) = Q(\varphi)Q(\theta^*)$. Отсюда

$$Q(\theta) = Q^*(\psi)Q(\psi)Q(\theta) = Q^*(\psi)Q(\varphi),$$

$$Q(\theta^*) = Q^*(\varphi)Q(\varphi)Q(\theta^*) = Q^*(\varphi)Q(\psi).$$

Следовательно, $Q^*(\theta) = Q(\theta^*)$. Поэтому вместе с равенством $Q^*(\theta)Q(\theta) = I$ справедливо равенство $Q(\theta)Q^*(\theta) = Q^*(\theta^*)Q(\theta^*) = I$, т. е. $Q(\theta)$ — унитарный оператор. Это означает, что ортонормированное семейство $\{\theta_\alpha : \alpha \in A\}$ является полным в H . Это возможно лишь в том случае, когда вектор θ отличается от вектора e на постоянный множитель κ , $|\kappa| = 1$. Итак, $Q(\theta) = \kappa I$, откуда $Q(\varphi) = \kappa Q(\psi)$ и $\varphi = \kappa \psi$.

Доказанная теорема является аналогом соответствующих утверждений об инвариантных подпространствах оператора сдвига (см., например, [11, с. 85, 86]).

§4. Теорема факторизации

Обозначим через H_0 линейную оболочку $\text{span}\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ векторов e_α . Для каждого вектора $f \in H$ определим линейный оператор $Q(f)$. А именно, для вектора

$$h = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha$$

положим

$$Q(f)h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha f_\alpha,$$

если последний ряд сходится. Оператор $Q(f)$ не обязательно всюду определен, но его область определения включает в себя линейное многообразие H_0 . Нетрудно проверить, что оператор $Q(f)$ перестановочен с мультисдвигом, т. е. $Q(f)V_0 = V_0Q(f)$, $Q(f)V_1 = V_1Q(f)$ и, вообще, $Q(f)V^\alpha = V^\alpha Q(f)$ для всех $\alpha \in A$. Обратно, если линейный оператор Q , заданный на линейном многообразии H_0 , перестановочен с мультисдвигом, то для вектора $f = Qe$ имеем $Q = Q(f)$ (по крайней мере на H_0).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функцию (вектор) $F \in H$ назовем *внешней*, если семейство $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ является полным в H .

Справедлива следующая теорема факторизации операторов, перестановочных с мультисдвигом, на внутренний и внешний множители, являющаяся аналогом канонической факторизации аналитических функций из пространства Харди.

ТЕОРЕМА 4. Для любого ненулевого вектора $f \in H$ справедливо представление

$$Q(f) = Q(\varphi)Q(F), \quad (10)$$

где φ — внутренняя функция, а F — внешняя функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементарное инвариантное подпространство $M(f)$ и соответствующее ему (по теореме 1) блуждающее подпространство N . По теореме 2 подпространство N одномерно. Пусть φ — нормированный ($\|\varphi\| = 1$) вектор из N . Тогда φ — внутренняя функция и справедливо представление

$$f = \sum_{\alpha \in A} (f, \varphi_\alpha) \varphi_\alpha.$$

Положим

$$F = \sum_{\alpha \in A} (f, \varphi_\alpha) e_\alpha.$$

Определение функции F корректно, так как $\|F\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(f, \varphi_\alpha)|^2 = \|f\|^2 < \infty$. Покажем, что F — внешняя функция. Для этого заметим, что $Q(\varphi)F = f$ и, следовательно, $Q(\varphi)F_\alpha = f_\alpha$. Пусть вектор $h \in H$ таков, что $(h, F_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in A$. Отсюда в силу изометричности оператора $Q(\varphi)$ получаем $(Q(\varphi)h, Q(\varphi)F_\alpha) = (Q(\varphi)h, f_\alpha) = 0$, $\alpha \in A$. Поскольку $Q(\varphi)h \in \varphi H = M(f)$, то $Q(\varphi)h = 0$, откуда $h = 0$. Таким образом, семейство $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ является полным в H , т. е. F — внешняя функция. Проверим справедливость представления (10):

$$Q(\varphi)Q(F)e_\alpha = Q(\varphi)F_\alpha = f_\alpha = Q(f)e_\alpha, \quad \alpha \in A.$$

Отсюда вытекает равенство $Q(\varphi)Q(F)h = Q(f)h$ для всех h из общей (ввиду изометричности оператора $Q(\varphi)$) области определения операторов $Q(f)$ и $Q(F)$.

Следует отметить, что факторизация (10) единственна с точностью до постоянного множителя, по модулю равного единице. В самом деле, предположим, что наряду с (10) имеет место представление

$$Q(f) = Q(\psi)Q(G),$$

где ψ — внутренняя функция, а G — внешняя функция. Тогда $M(f) = \varphi H = \psi H$ и по теореме 3 $\varphi = \kappa\psi$, $|\kappa| = 1$, так что $F = \kappa G$.

§5. Оператор сдвига, индуцированный структурой мультидвига

Рассмотрим изометрический оператор

$$W = 2^{-1/2}(V_0 + V_1).$$

Имеем $W^k = 2^{-k/2} \sum_{|\alpha|=k} V^\alpha$, $k = 0, 1, \dots$, и система векторов

$$W^k e = 2^{-k/2} \sum_{|\alpha|=k} e_\alpha, \quad k = 0, 1, \dots,$$

ортонормированная. Положим

$$H(W) = \overline{\text{span}}\{W^k e : k = 0, 1, \dots\}.$$

Каждому вектору $f \in H(W)$ вида

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W^k e, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

поставим в соответствие аналитическую функцию

$$f^\wedge(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < 1.$$

При таком соответствии пространство $H(W)$ становится изометрически изоморфным пространству Харди H^2 и сужение оператора W на $H(W)$ унитарно эквивалентно оператору умножения на z в H^2 , т. е. является оператором сдвига.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in H(W)$ и $f^\wedge = \varphi^\wedge F^\wedge$ — каноническая факторизация аналитической функции из пространства Харди на внутренний и внешний множители.

Тогда $Q(f) = Q(\varphi)Q(F)$ — факторизация в смысле теоремы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi^\wedge$ — внутренняя аналитическая функция, то система $\{\varphi^\wedge(z)z^k : k = 0, 1, \dots\}$ ортонормированная. Поэтому система векторов $\{W^k \varphi : k = 0, 1, \dots\}$ также ортонормированная. Покажем, что φ — внутренняя функция. Вычислим

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_\alpha) &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} (\varphi, W^l e) W^l e, \varphi_\alpha \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi, W^l e) (W^l e, \varphi_\alpha) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi, W^l e) 2^{-l/2} \sum_{|\beta|=l} (e_\beta, \varphi_\alpha). \end{aligned}$$

Согласно лемме 3, имеем

$$(e_\beta, \varphi_\alpha) = \begin{cases} (e_\gamma, \varphi), & \text{если } \beta = \alpha\gamma, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $|\alpha| > |\beta|$, то уравнение $\beta = \alpha\gamma$ не разрешимо относительно γ , и поэтому $\sum_{|\beta|=l} (e_\beta, \varphi_\alpha) = 0$. Если же $|\alpha| \leq |\beta|$, то, полагая $|\alpha| = k$, находим

$$\sum_{|\beta|=l} (e_\beta, \varphi_\alpha) = \sum_{|\gamma|=l-k} (e_\gamma, \varphi) = 2^{(l-k)/2} (W^{l-k} e, \varphi).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_\alpha) &= \sum_{l=k}^{\infty} (\varphi, W^l e) 2^{-k/2} (W^{l-k} e, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi, W^{m+k} e) 2^{-k/2} (W^m e, \varphi) \\ &= 2^{-k/2} \left(\varphi, \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi, W^m e) W^{m+k} e \right) = 2^{-k/2} (\varphi, W^k \varphi) = \delta_{0k}. \end{aligned}$$

Следовательно, семейство $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ ортонормированное, т.е. φ — внутренняя функция. Теперь рассмотрим внешнюю аналитическую функцию $F^\wedge$. По классической теореме Берлинга найдется последовательность полиномов $P_n(z)$, таких, что $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} F^\wedge(z) P_n(z)$ в смысле сходимости по H^2 -норме. Если $P_n(z) = \sum_{m=0}^n c_m z^m$, то, полагая $P_n(F) = \sum_{m=0}^n c_m W^m F$, будем иметь $e = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(F)$. Это означает, что $e \in M(F)$. Так как подпространство $M(F)$ инвариантно относительно мультисдвига, то $e_\alpha \in M(F)$ для всех $\alpha \in A$. Тогда $M(F) = H$, т.е. F — внешняя функция. Наконец, проверим справедливость соотношения $Q(f) = Q(\varphi)Q(F)$. Ввиду перестановочности рассматриваемых операторов с мультисдвигом достаточно установить равенство $Q(f)e = Q(\varphi)Q(F)e$ или, что то же самое, $f = Q(\varphi)F$. В самом деле,

$$\begin{aligned} Q(\varphi)F &= Q(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} (F, W^k e) W^k e = \sum_{k=0}^{\infty} (F, W^k e) W^k \varphi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (F, W^k e) \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi, W^l e) W^{k+l} e = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (F, W^k e) (\varphi, W^{n-k} e) \right) W^n e. \end{aligned}$$

Ясно, что $(Q(\varphi)F)^\wedge = \varphi^\wedge F^\wedge = f^\wedge$, так что $Q(\varphi)F = f$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\varphi \in H(W)$ является внутренней тогда и только тогда, когда $\varphi^\wedge(z) \in H^2$ — внутренняя функция.

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция $F \in H(W)$ является внешней тогда и только тогда, когда $F^\wedge(z) \in H^2$ — внешняя функция.

С помощью следствий 1 и 2, непосредственно вытекающих из теоремы 5 с учетом единственности (с точностью до постоянной, по модулю равной единице) факторизаций, можно построить нетривиальные примеры внутренних и внешних функций.

ЗАМЕЧАНИЯ. Теорема 4 о факторизации операторов, перестановочных с мультисдвигом, анонсирована в работе автора [12]. В другой работе автора [13] даны приложения некоторых результатов о структуре мультисдвига (хотя понятие мультисдвига явно не определено) к вопросу о базисности по Риссу семейств

функций-всплесков на отрезке. В частности, в [13], по существу, установлены условия ограниченности и ограниченной обратимости операторов, перестановочных с мультидвигом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations on Hilbert spaces. *Acta Math.*, **81**, 239–255 (1949).
2. *Halmos P. R.* Shifts on Hilbert spaces. *J. Reine Angew. Math.*, **208**, 102–112 (1961).
3. *Терехин П. А.* О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функции на отрезке. *Изв. Тульск. гос. ун-та, сер. матем., мех., информ.*, **4**, вып. 1, 136–138 (1998).
4. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, М., 1970.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1965.
6. *Eckmann B.* Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz–Radon über die Komposition quadratischer Formen. *Comm. Math. Helv.*, **15**, 358–366 (1942/43).
7. *Шварц Дж.* Дифференциальная геометрия и топология. Мир, М., 1970.
8. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. Наука, М., 1978.
9. *Lambert D., Ronveaux A.* Toward new solutions of the general Hurwitz problem. *J. Phys. A.*, **26**, 945–948 (1993).
10. *Терехин П. А.* Тригонометрические алгебры. *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **236**, 183–191 (1997).
11. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. Мир, М., 1970.
12. *Терехин П. А.* О мультипликативной структуре централизатора мультидвига в гильбертовом пространстве. В кн.: Математика. Механика. Сб. науч. трудов, вып. 2, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2000, с. 119–122.
13. *Терехин П. А.* Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке. *Матем. заметки*, **72**, вып. 4, с. 547–560 (2002).

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило в редакцию
19 марта 2003 г.