Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Г. Оруджев, Резольвента и спектр одного класса дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:19:24

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расположение кривой относительно пучка прямых с центром в гнезде $1\langle 1 \rangle$ имеет вид $[\supset_3 o_3^{\beta_0-1} w_1 \dots w_h \subset_4]$, где $w_i = o_4^{\beta_{2i}-1} o_3^{\beta_{2i}}$, $\sum \beta_i = 13$. Из правила чередования ориентаций следует, что $h \geq 3$. Вычисления показывают, что $e(b) = 8$, $\sigma(\hat{b}) = -2h$, $n(\hat{b}) = 1$. Это противоречит неравенству (5) при $m = 7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рохлин В. А.* УМН, **33**, вып. 5, 77–89 (1978).
2. *Фидлер Т.* Изв. АН СССР, сер. мат., **46**, № 6, 853–863 (1982).
3. *Виро О. Я.* Изв. АН СССР, сер. матем., **47**, № 5, 1135–1150 (1983).
4. *Korchagin A. B.* In: Lect. Notes in Math., vol. 1524, 1991, pp. 407–426.
5. *Orevkov S. Yu.* Topology, **38**, No. 4, 779–810 (1999).
6. *Виро О. Я., Звонилов В. И.* Алгебра и анализ, **4**, 539–548 (1993).
7. *Виро О. Я.* УМН, **41**, вып. 3, 43–67 (1986).

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
25 июня 1998 г.

УДК 517.43

Резольвента и спектр одного класса дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами

© 2000. Э. Г. ОРУДЖЕВ

В настоящей работе в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ исследуются резольвента и спектр несамосопряженного дифференциального оператора $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением

$$l_\lambda(Y) \equiv Y^{(2n)}(x) + \sum_{l=1}^{2n} \left(\sum_{k=0}^l P_{lk}(x) \lambda^k \right) Y^{(2n-l)}(x), \quad (1)$$

где P_{ll} — действительные числа, а функции P_{lk} (при $l \neq k$) имеют вид

$$P_{lk}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{lkm} e^{imx}, \quad l = 1, \dots, 2n, \quad k = 0, \dots, l-1, \quad (2)$$

причем предполагается, что ряды

$$\sum_{l=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^l |P_{lkm}| \quad (3)$$

сходятся. Предполагается также, что корни θ_v , $v = 1, \dots, 2n$, характеристического многочлена

$$F(\theta) = \theta^{2n} + P_{11}\theta^{2n-1} + \dots + P_{2n-1,2n-1}\theta + P_{2n,2n} \quad (4)$$

различны, отличны от нуля и что всю плоскость λ можно разделить на секторы R_k , $k = 0, \dots, 4n-1$, в каждом из которых при подходящей нумерации корней θ_v , $v = 1, \dots, 2n$, выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda \theta_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda \theta_n \leq 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \theta_{n+1} \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda \theta_{2n}.$$

Здесь приводятся и некоторые результаты исследований в случае, когда у характеристического многочлена (4) имеется пара мнимых кратных корней $\pm i$.

Ранее подобные вопросы изучались М. Г. Гасымовым для оператора второго порядка в работе [1], а для операторов высших порядков в работе [2] в предположении, что $P_{lk}(x) \equiv 0$, $l = 1, \dots, 2n$, $k = 1, \dots, l-1$, $P_{ll} \equiv 0$, $l = 1, \dots, 2n-1$, и $P_{2n,2n} = 1$.

1. Специальные решения уравнения $l_\lambda(Y) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия (2), (3). Тогда дифференциальное уравнение $l_\lambda(Y) = 0$ в каждом секторе R_k , $k = 0, \dots, 4n-1$, имеет фундаментальные системы решений Y_v , представимые в виде

$$Y_v(x, \lambda) = e^{\theta_v \lambda x} + \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{U_{ms}^j(\lambda) e^{(\theta_v \lambda + iS)x}}{im \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(im)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\theta_v) \lambda^{2n-1-k}}, \quad v = 1, \dots, 2n, \quad (5)$$

где

$$U_{ms}^j(\lambda) = \sum_{v=0}^{2n-1} U_{msv}^j \lambda^{2n-1-v},$$

коэффициенты U_{msv}^j однозначно определяются через P_{lkm} , причем ряды

$$\sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{s=m}^{\infty} s^j |U_{msv}^j| \quad (6)$$

сходятся, функции $Y_v(x, \lambda)$, а также производные $Y_v^{(k)}(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 2n-1$, являются непрерывными функциями по совокупности переменных x, λ для $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in R_k$, $k = 0, \dots, 4n-1$, и все $Y_v^{(k)}(x, \lambda)$, $k = 1, \dots, 2n-1$, оказываются мероморфными функциями по λ , полюсы которых являются решениями уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(im)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\theta_v) \lambda^{2n-1-k} = 0. \quad (7)$$

Для характеристического многочлена с кратными корнями справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение $l_\lambda(Y) = 0$ имеет следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right)^n Y + \sum_{\gamma=0}^{2n-1} P_\gamma(x) Y^{(\gamma)} = 0, \quad (8)$$

где $P_\gamma(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{\gamma m} e^{imx}$, причем $P_{\gamma m}$ подчинены условиям типа (3). Тогда оно в каждой из полуплоскостей $\pi_\pm = \{\lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$ имеет фундаментальные системы решений $Y_k^\pm$, допускающие представления вида

$$Y_k^\pm(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x} \left[x^k + \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+2\lambda)^n} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{q=0}^k U_{ms}^{jjq}(\lambda) x^q e^{isx} \right], \quad (9)$$

$k = 0, \dots, n-1$, где $U_{ms}^{jjq}(\lambda) = \sum_{v=0}^{2n-1} U_{msv}^{jjq} \lambda^{2n-1-v}$, ряды

$$\sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} \sum_{s=m}^{\infty} |U_{msv}^{jjq}| s^j \quad (10)$$

сходятся, функции $Y_k^{\pm(r)}(x, \lambda)$, $r = 0, \dots, 2n-1$, $k = 0, \dots, n-1$, являются непрерывными функциями по совокупности переменных x , λ , $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in \pi_{\pm}$, мероморфны по λ и имеют полюсы порядка n в точках $\lambda = -m/2$, $m = 1, 2, \dots$.

Пусть теперь $l^*(Z)$ — сопряженное к $l_{\lambda}(Y)$ из формулы (1) дифференциальное выражение,

$$l^*(Z) \equiv Z^{(2n)} + \sum_{l=1}^{2n} (-1)^l \left(\sum_{k=0}^l P_{lx}(x) \bar{\lambda}^k Z \right)^{2n-l}, \quad (11)$$

где $\overline{P_{lk}(x)} = \sum_{m=1}^{\infty} P_{lkm} e^{-imx}$.

Нетрудно проверить, что уравнение $l^*(Z) = 0$ и уравнение, сопряженное к уравнению (8), имеют фундаментальные решения Z_v и $F_k^{\mp}$, допускающие представления

$$Z_v(x, \lambda) = e^{-\theta_v \bar{\lambda} x} - \sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{R_{sm}^j(\bar{\lambda}) e^{-(\theta_v \bar{\lambda} + is)x}}{im \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(im)^k}{(k+1)!} F^{(k+1)}(\theta_v) \bar{\lambda}^{-2n-1-k}}, \quad v = 1, \dots, 2n, \quad (12)$$

и

$$F_k^{\mp}(x, \lambda) = e^{\mp i \bar{\lambda} x} \left[x^k - \sum_{j=1}^{2n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+2\bar{\lambda})^n} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{q=0}^k R_{ms}^{jjq}(\bar{\lambda}) x^q e^{-isx} \right], \quad (13)$$

$k = 0, \dots, n-1$, в секторах R_k и полуплоскостях $\pi_{\pm}$ соответственно. При этом ряды типа (6) и (10) при замене U_{msv}^j и U_{msv}^{jjq} на R_{msv}^j и R_{msv}^{jjq} сходятся.

2. Спектр и резольвента оператора $L(\lambda)$. Легко устанавливается, что никакая нетривиальная линейная комбинация решений (5) уравнения $l_{\lambda}(Y) = 0$ не принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. Отсюда вытекает, что оператор $L(\lambda)$ не имеет собственных значений.

Из выражений для $Y_v(x, \lambda)$ и $Z_v(x, \lambda)$ вытекает, что при любом значении λ из сектора $S_k = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \theta_1 < \dots < \operatorname{Re} \lambda \theta_n < 0 < \operatorname{Re} \lambda \theta_{n+1} < \dots < \operatorname{Re} \lambda \theta_{2n}\}$, $k = 0, \dots, 4n-1$, таком, что $\lambda \neq \lambda_{mk}$, где λ_{mk} — решения уравнения (7), мы имеем

$$\begin{aligned} |Y_v(x, \lambda)| &\in L_2(0, \infty), & |Z_v(x, \lambda)| &\in L_2(-\infty, 0), \\ |Y_v(x, \lambda)| &\notin L_2(-\infty, 0), & |Z_v(x, \lambda)| &\notin L_2(0, \infty) \end{aligned}$$

при $v = 1, \dots, n$ и

$$\begin{aligned} |Y_v(x, \lambda)| &\in L_2(-\infty, 0), & |Z_v(x, \lambda)| &\in L_2(0, \infty), \\ |Y_v(x, \lambda)| &\notin L_2(0, \infty), & |Z_v(x, \lambda)| &\notin L_2(-\infty, 0) \end{aligned}$$

при $v = n+1, \dots, 2n$.

Пусть $\lambda \in S_k$ и $\lambda \neq \lambda_{mk}$. При $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, отыскивая решения уравнения $l_\lambda(Y) = f$, принадлежащие пространству $L_2(-\infty, \infty)$, в виде

$$Y(x, \lambda) = \sum_{v=1}^{2n} C_v(x, \lambda) Y_v(x, \lambda) \quad (14)$$

и применяя метод вариации постоянных, получаем, что для финитных функций $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda) = & \sum_{v=1}^n A_v(\lambda) Y_v(x, \lambda) \int_{-\infty}^x Z_v(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \\ & - \sum_{v=n+1}^{2n} A_v(\lambda) Y_v(x, \lambda) \int_x^{\infty} Z_v(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

где $A_v(\lambda) = C_v \lambda^{1-2n}$, $v = 1, \dots, 2n$, C_v — постоянные.

Соотношение (15) определяет некоторый ограниченный оператор в $L_2(-\infty, \infty)$ с ядром

$$R(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum_{v=1}^n A_v(\lambda) Y_v(x, \lambda) Z_v(\xi, \lambda), & \xi < x, \\ -\sum_{v=n+1}^{2n} A_v(\lambda) Y_v(x, \lambda) Z_v(\xi, \lambda), & \xi \geq x. \end{cases} \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 3. Для всех $\lambda \in S_k$, $\lambda \neq \lambda_{mk}$, резольвента R_λ оператора $L(\lambda)$ есть ограниченный интегральный оператор, определенный во всем пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, с ядром $R(x, \xi, \lambda)$ вида (16), удовлетворяющим условиям типа Карлемана, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |R(x, \xi, \lambda)|^2 dx < \infty.$$

Аналогичным образом строится ядро оператора по левой части формулы (8).

ТЕОРЕМА 4. В каждом секторе R_k оператор $L(\lambda)$ имеет чисто непрерывный спектр. Все точки λ , принадлежащие сектору R_k и лежащие на прямой $\operatorname{Re} \lambda \theta_n = 0$, являются точками непрерывного спектра. На непрерывном спектре имеются спектральные особенности, которые являются решениями уравнения (7). Для оператора, определяемого левой частью формулы (8), непрерывный спектр заполняет положительную полуось $\lambda \geq 0$; на нем имеются спектральные особенности порядка $2n$, совпадающие с точками $\lambda = t/2$, $t = 1, 2, \dots$.

В заключение выражаю признательность М. Г. Гасымову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М. Г. Функциональный анализ и его прил., **14**, вып. 1, 14–19 (1980).
2. Гасымов М. Г. ДАН СССР, **252**, № 2, 277–280 (1980).