Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Скубачевский, Нелокальные задачи для уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 91–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:17:36

Так как T перемешивает, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число M , такое, что для всех j

$$\sum_{|k|>M} a_j^k \Delta^k(A \times B) = \sum_{|k|>M} a_j^k \mu(T^k A \cap B) < \varepsilon.$$

Следовательно, для некоторого m последовательность a_j^m не стремится к 0 при $j \rightarrow \infty$. Но это означает, что $\nu \geq a \Delta^m$, $a > 0$. Поэтому меры $\nu = \Delta_S$ и Δ_{T^m} не являются взаимно сингулярными. Поскольку T — эргодическое преобразование (а таковым является всякое преобразование ранга 1), эти меры эргодичны относительно $T \times T$. Следовательно, $\Delta_S = \Delta_{T^m}$. Тем самым мы установили равенство $S = T^m$.

Замечание. На самом деле мы доказали, что любое самоприсоединение ν перемешивающего бесконечного преобразования T (в терминологии [12] полиморфизм, комутующий с T) является выпуклой комбинацией мер Δ_{T^i} . Такое свойство преобразования является аналогом свойства минимальных самоприсоединений (см. [9]). Известная теорема (см. [4]) утверждает, что централизатор преобразования вероятностного пространства ранга один лежит в слабом замыкании степеней этого преобразования. Вопрос Э. Руа об аналоге теоремы Дж. Кинга для бесконечных преобразований остается открытым. Мы установили его в случае перемешивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, УМН, **30:6**(186) (1975), 3–50.
 [2] A. I. Danilenko, V. V. Ryzhikov, Ergodic Theory Dynam. Systems, **31:3** (2011), 853–873. [3] Р. С. Исмагилов, Функц. анализ и его прил., **9:2** (1975), 71–72. [4] J. L. King, Ergodic Theory Dynam. Systems, **6** (1986), 363–384. [5] M. Lemanczyk, F. Parreau, J.-P. Thouvenot, Fund. Math., **164:3** (2000), 253–293. [6] Ю. А. Неретин, Матем. сб., **188:11** (1997), 19–50. [7] D. Ornstein, in: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. II, University of California Press, Berkley, 1972, 347–356. [8] E. Roy, Ergodic Theory Dynam. Systems, **29:2** (2009), 667–683. [9] D. J. Rudolph, J. Anal. Math., **35** (1979), 97–122. [10] В. В. Рыжиков, Матем. сб., **183:3** (1992), 133–160. [11] В. В. Рыжиков, Труды ММО, **75:1** (2014), 93–103. [12] A. M. Vershik, Discrete Contin. Dynam. Sys., **13** (2005), 1305–1324.

Московский государственный университет
 e-mail: vryz@mail.ru

Université Pierre et Marie Curie, Paris VI
 e-mail: jean-paul.thouvenot@upmc.fr

Поступила в редакцию
 17 февраля 2014 г.

УДК 517.9

Нелокальные задачи для уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре*

© 2015. А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

1. Уравнениям Власова посвящена обширная литература, см. [1]–[6], [8]–[13] и имеющуюся там библиографию. Вопрос о существовании классических и обобщенных решений задачи Коши, а также обобщенных решений смешанных задач

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-00265).

для уравнений Власова был изучен достаточно подробно ([1], [2], [9], [10], [13]). Существование классических решений смешанных задач для уравнений Власова исследовано в значительно меньшей степени. В работах [11], [12] доказано существование глобальных классических решений соответственно второй и первой смешанных задач для системы уравнений Власова–Пуассона в полупространстве. Основные трудности в исследовании этих задач были связаны с поведением характеристик уравнений Власова вблизи границы. Таким образом, допускался выход заряженных частиц на границу области. Вопрос о существовании классических решений смешанных задач для произвольных областей и краевых условий сформулирован рядом авторов как нерешенная проблема ([3], [6]).

Интерес к смешанным задачам для уравнений Власова в значительной степени связан с их использованием в изучении высокотемпературной плазмы в термоядерных реакторах. Для создания устойчивой высокотемпературной плазмы в реакторе необходимо, чтобы на некотором интервале времени так называемый плазменный шнур находился строго внутри области, «не допуская соприкосновений со стенкой вакуумной камеры» [5]. В случае выхода значительного числа частиц на границу может произойти либо разрушение стенок реактора, либо остывание высокотемпературной плазмы на стенках реактора. Для большинства действующих моделей термоядерных реакторов в качестве управления, обеспечивающего существование плазмы в реакторе, используется внешнее магнитное поле [5]. Принципиальным отличием данной работы является то, что за счет влияния внешнего магнитного поля мы обеспечиваем существование классических решений уравнений Власова–Пуассона с носителями плотностей распределения заряженных частиц, не пересекающимися с границей области. Другим отличием является то, что, как и в [6], мы рассматриваем нелокальные краевые условия для потенциала электрического поля.

2. Рассмотрим систему уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f^\gamma(x, v, t) dv \quad (x \in Q, 0 < t < T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) = 0 \quad (2)$$

$$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1)$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (3)$$

и нелокальным условием

$$\varphi(x, t) + b(x') \varphi(\omega(x'), x_3 + \chi, t) = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \quad (4)$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$; $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке $x \in \bar{Q}$ со скоростью $v \in \mathbb{R}^3$ в момент времени t ; $\varphi = \varphi(x, t)$ — потенциал самосоглазованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение

в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$; ω есть C^∞ -диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность Ω границы ∂G на $\omega(\Omega)$ так, что $\overline{\omega(\Omega)} \subset G$; $\chi \in \mathbb{R}$; $x = (x', x_3)$, $x' \in \mathbb{R}^2$.

Как известно [5], уравнения Власова–Пуассона (1), (2) описывают динамику высокотемпературной разреженной плазмы в цилиндрической части пробочной ловушки (mirror trap). Наличие достаточно сильного магнитного поля B , направленного по оси цилиндра, приводит к тому, что частицы движутся по траекториям, близким к ларморовским, и не пересекаются с границей. Нелокальное условие (4) соответствует управлению, которое обеспечивает равенство значений потенциала самосогласованного электрического поля на границе цилиндра значениям потенциала на некоторой внутренней цилиндрической поверхности.

3. Введем некоторые функциональные пространства. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область. Обозначим через $C^k(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, пространство непрерывных функций u в $\bar{\Omega}$, имеющих все непрерывные производные в $\bar{\Omega}$ вплоть до k -го порядка, с нормой

$$\|u\|_k = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\mathcal{D}^\alpha u(x)|,$$

где $\mathcal{D}^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Обозначим через $C^{k+\sigma}(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \sigma < 1$, пространство Гёльдера непрерывных функций u в $\bar{\Omega}$, имеющих все непрерывные производные в $\bar{\Omega}$ вплоть до k -го порядка, с конечной нормой

$$\|u\|_{k+\sigma} = \|u\|_k + \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} |x - y|^{-\sigma} |\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|.$$

Пространства $C^k(\bar{\Omega})$ и $C^{k+\sigma}(\bar{\Omega})$ являются банаховыми.

Обозначим через $C_0^{k+\sigma}(\bar{Q})$, $k \geq 0$, $0 < \sigma < 1$, замыкание множества функций из $C^{k+\sigma}(\bar{Q})$ с компактными в $\bar{Q}$ носителями. Введем банахово пространство $C([0, T], C_0^{k+\sigma}(\bar{Q}))$, $k \geq 0$, $0 < \sigma < 1$, непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C_0^{k+\sigma}(\bar{Q})$ с нормой $\|\varphi\|_{k+\sigma, T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\cdot, t)\|_{k+\sigma}$.

Определение 1. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, $\beta = \pm 1$, мы назовем *классическим решением задачи* (1)–(4), если она удовлетворяет уравнениям (1), (2), начальным условиям (3) и нелокальному условию (4).

4. Будем предполагать, что магнитное поле B и начальные плотности распределения заряженных частиц $f_0^\beta(x, v)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. Пусть $f_0^\beta \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$ — неотрицательная функция, и пусть $\text{supp } f_0^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$, где $\delta, \rho > 0$, $Q_{2\delta} = \{x \in Q : \text{dist}(x, \partial Q) > 2\delta\} \neq \emptyset$.

Условие 2. Пусть $B = (0, 0, h)$ для $x \in \bar{Q}$, где $h > 0$ не зависит от x и

$$32 \frac{c\rho m_{+1}}{e\delta} < h.$$

Условие 3. Пусть $\theta = \max_{x' \in \bar{G}} |b(x')| < 1$.

Теорема 1. Пусть для некоторых δ, ρ, h выполняются условия 1–3. Тогда для любого $T > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$, такое, что для всех

начальных функций f_0^β , удовлетворяющих соотношениям

$$\text{supp } f_0^\beta \subset (Q_{2\delta} \cap Q'_N) \times B_{\rho/4}, \quad \|f_0^\beta\|_2 < \varepsilon \quad (\beta = \pm 1), \quad (5)$$

где $Q'_N = \{x \in Q : |x_3| < N\}$, $N > 0$ — некоторое число, $B_\rho = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < \rho\}$, существует единственное классическое решение $\{\varphi, f^\beta\}$ задачи (1)–(4) и при этом $\text{supp } f^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset Q_{5\delta/4} \times B_\rho$ для всех $t \in [0, T]$.

5. Изложим схему доказательства теоремы 1. Наиболее существенными шагами здесь являются доказательство однозначной разрешимости уравнения Пуассона с нелокальным условием в бесконечном цилиндре в пространстве Гёльдера, сведение задачи (1)–(4) для системы уравнений Власова–Пуассона к задаче Коши для операторно-дифференциальных уравнений и утверждение о существовании и единственности классического решения указанной задачи Коши.

Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (6)$$

$$u(x) + b(x')u(\omega(x')), x_3 + \chi) = 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие 3. Тогда для любой функции $f \in C_0^\sigma(\bar{Q})$ существует единственное решение $u \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ задачи (6), (7) и при этом

$$\|u\|_{2+\sigma} \leq c_1 \|f\|_\sigma, \quad (8)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от f .

Доказательство этого утверждения состоит из трех частей. В первой части рассматриваются свойства операторнозначной функции, имеющей вид квази-полинома, которая получается из задачи (6), (7) применением преобразования Фурье по x_3 . Доказывается, что собственные значения этой операторнозначной функции изолированные. Отсюда во второй части доказательства выводится однозначная разрешимость задачи (6), (7) в весовых пространствах Кондратьева с показателем веса $e^{2\beta x_3}$ при условии, что прямая $\text{Im } \lambda = \beta$ не содержит собственных значений указанной оператор-функции. В силу принципа максимума вещественная прямая не содержит собственных значений рассматриваемой оператор-функции. Поэтому, полагая $\beta = 0$, получим однозначную разрешимость задачи (6), (7) в пространстве Соболева $W_2^2(Q)$. В третьей части с помощью теоремы о регулярности обобщенных решений, метода отделения нелокальных членов [7] и теоремы вложения Соболева доказывается, что решение $u \in W_2^2(Q)$ задачи (6), (7) принадлежит пространству Гёльдера $C^{2+\sigma}(\Omega)$ для любого компактного в $\bar{Q}$ множества Ω и $u(x)$ убывает при $|x_3| \rightarrow \infty$ равномерно по $x' \in G$. Далее, вновь с помощью метода отделения нелокальных членов, априорных оценок решений эллиптических задач в пространствах Гёльдера, принципа максимума и свойств пространств Гёльдера, доказывается, что решение $u(x)$ задачи (6), (7) принадлежит пространству $C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ и удовлетворяет оценке (8).

Из теоремы 2 следует, что соотношение $u = Pf$ определяет линейный ограниченный оператор $P: C_0^\sigma(\bar{Q}) \rightarrow C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$. Таким образом, для любой функции $F \in C([0, T], C_0^\sigma(\bar{Q}))$ мы имеем $PF \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$ и

$$\|PF\|_{2+\sigma, T} \leq c_1 \|F\|_{\sigma, T}.$$

Наряду со смешанной нелокальной задачей (1)–(4) рассмотрим следующую начальную задачу для системы операторно-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + (v, \nabla_x f^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x P \left(4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f^\gamma(x, v, t) dv \right) + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right) = 0$$

$$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1), \quad (9)$$

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1). \quad (10)$$

Определение 2. Вектор-функцию $\{f^\beta\}$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, $\beta = \pm 1$, назовем *классическим решением задачи* (9), (10), если

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f^\gamma(x, v, t) dv \in C([0, T], C_0^\sigma(\bar{Q}))$$

и $\{f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (9) и начальным условиям (10).

Из теоремы 2 следует, что вектор-функция

$$\{\varphi, f^\beta\}, \quad \varphi = P \left(4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f^\gamma(x, v, t) dv \right),$$

тогда и только тогда является классическим решением задачи (1)–(4), когда вектор-функция $\{f^\beta\}$ является классическим решением задачи (9), (10). Таким образом, для доказательства теоремы 1 остается применить следующий результат об однозначной разрешимости задачи (9), (10).

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1, 2, и пусть $P: C_0^\sigma(\bar{Q}) \rightarrow C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$ — линейный ограниченный оператор. Тогда для любого $T > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \rho, h, \sigma) > 0$, такое, что для всех начальных функций f_0^β , удовлетворяющих соотношениям (5), существует единственное классическое решение $\{f^\beta\}$ задачи (9), (10) и при этом $\text{supp } f^\beta(\cdot, \cdot, t) \subset Q_{5\delta/4} \times B_\rho$ для всех $t \in [0, T]$.

Доказательство этого утверждения близко к доказательству теоремы 1.1 из [8] о существовании и единственности классического решения системы уравнений Власова–Пуассона с условием Дирихле для потенциала электрического поля и проводится по следующей схеме. Обозначая

$$P \left(4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f^\gamma(x, v, t) dv \right) \quad (11)$$

в (9) через φ , методом характеристик мы построим решение $\{f_\varphi^\beta\}$ задачи (9), (10). При $\varphi = 0$ характеристики системы (9) являются ларморовскими траекториями, т.е. окружностями или винтовыми линиями, целиком лежащими в цилиндре $Q_{7\delta/4}$. Для достаточно малых $\varphi \neq 0$ в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий характеристики близки к ларморовским траекториям. Таким образом, носитель решения $\{f_\varphi^\beta\}$ системы (9), (10) по пространственным переменным будет принадлежать цилиндру $Q_{5\delta/4}$. Подставляя найденное решение $\{f^\beta\} = \{f_\varphi^\beta\}$ в выражение (11) и приравнявая к φ , получим

операторное уравнение

$$PB\varphi = P\left(4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\gamma=\pm 1} \gamma f_{\varphi}^{\gamma}(x, v, t) dv\right) = \varphi.$$

Для доказательства того, что оператор PB удовлетворяет условиям теоремы Банаха о неподвижной точке, выводятся оценки норм функций $B\varphi$ и $B\varphi_1 - B\varphi_2$ в пространстве $C([0, T], C_0^{\sigma}(\bar{Q}))$ и используется ограниченность оператора $P: C_0^{\sigma}(\bar{Q}) \rightarrow C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$.

Автор благодарит А. И. Назарова за полезные советы, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. А. Арсеньев, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **15**:1 (1975), 136–147.
 [2] Р. Л. Добрушин, Функц. анализ и его прил., **13**:2 (1979), 48–58. [3] В. В. Козлов, УМН, **63**:4(382) (2008), 93–130. [4] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Матем. сб., **127**(169):4(8) (1985), 445–475. [5] К. Миямото, *Основы физики плазмы и управляемого синтеза*, Физматлит, М., 2007. [6] А. А. Самарский, Дифференциальные уравнения, **16**:11 (1980), 1925–1935. [7] А. Л. Скубачевский, *Неклассические краевые задачи*, ч. I, II, Современная математика. Фундаментальные направления, т. 26, РУДН, М., 2007, 3–132; т. 33, РУДН, М., 2009, 3–179. [8] А. Л. Скубачевский, УМН, **69**:2(416) (2014), 107–148. [9] J. Batt, J. Differential Equations, **25**:3 (1977), 342–364. [10] R. J. Di Perna, P.-L. Lions, Comm. Pure Appl. Math., **42**:6 (1989), 729–757. [11] Y. Guo, Indiana Univ. Math. J., **43**:1 (1994), 255–320. [12] H. J. Hwang, J. J. L. Velázquez, J. Differential Equations, **247**:6 (2009), 1915–1948. [13] K. Pfaffelmoser, J. Differential Equations, **95**:2 (1992), 281–303.

Российский университет дружбы народов
e-mail: skub@lector.ru

Поступила в редакцию
5 сентября 2014 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 29.07.2015. Дата выхода в свет 20.08.2015. Формат 70 × 100/16
 Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,7 тыс. Бум. л. 3,0
 Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 155 экз. Заказ 383.

Учредитель: Российская академия наук
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. (499) 941-01-88
 Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
 117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
 Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6