Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Агальцов, Теорема характеристики для обобщенного преобразования Радона, возникающего в одной модели математической экономики, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 57–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:30:12

Теорема характеризации для обобщенного преобразования Радона, возникающего в одной модели математической экономики*

© 2015. А. Д. АГАЛЬЦОВ

1. Введение. В работе [5] была предложена модель производства в чистой отрасли, в которой учитывается эффект взаимного замещения производственных факторов на микроуровне. Функция прибыли в этой модели имеет вид

$$(\Pi_q \mu)(p_0, p) = \int_{\mathbb{R}_+^n} (p_0 - q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n))_+ \mu(dx), \quad (1)$$

где p_0 — цена выпускаемой продукции, $p = (p_1, \dots, p_n)$ — вектор цен на производственные факторы, μ — распределение мощностей по технологиям, $q: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция себестоимости выпускаемой продукции, $a_+ = \max(a, 0)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0\}$. Преобразование (1) сводится повторным дифференцированием по p_0 к обобщенному преобразованию Радона меры μ , которое определяется как производная в смысле теории распределений:

$$R_q \mu(p_0, p) = \frac{\partial}{\partial p_0} \mu\{x \in \mathbb{R}_+^n : q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n) \leq p_0\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Указанная связь делает задачи характеризации для преобразования (1) и для обобщенного преобразования Радона практически эквивалентными. Мы приведем теорему характеризации для преобразования (1).

В работе [4] была получена теорема характеризации для интегрального преобразования (1) в случае линейной функции q , что соответствует отсутствию эффекта замещения производственных факторов. В работе [1] эта теорема была обобщена на случай преобразований вида (1) с функцией $q = q_\alpha$ вида $q_\alpha(x) = (x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha)^{1/\alpha}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $0 < \alpha \leq 1$, что с экономической точки зрения отвечает производственным системам с постоянной эластичностью замещения.

Основным результатом этой работы является следующее обобщение указанных теорем на случай произвольных положительно однородных функций себестоимости q . Пусть $c \in \text{int } \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i > 0\}$, а M и M_c^{-1} обозначают прямое и обратное преобразования Меллина:

$$M\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} \varphi(x) dx, \quad M_c^{-1}\psi(x) = (2\pi i)^{-n} \int_{c+i\mathbb{R}^n} x^{-z} \psi(z) dz,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $I = (1, \dots, 1)$, $x^{z-I} = x_1^{z_1-1} \dots x_n^{z_n-1}$, $x^{-z} = x_1^{-z_1} \dots x_n^{-z_n}$ (всюду далее вектор, возведенный в векторную степень, понимается в этом смысле).

*Работа поддержана грантом РФФИ №14-07-00075 А.

Пусть $q: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что значение $(Me^{-q})(z)$ определено и отлично от нуля для почти всех $z \in c + i\mathbb{R}^n$, где $c \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$. Мы полагаем

$$\rho_q(z) = \frac{\Gamma(z_1) \cdots \Gamma(z_n) \Gamma(2 + z_1 + \cdots + z_n)}{(Me^{-q})(z)},$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z \in c + i\mathbb{R}^n$, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Мы будем называть функцию $g: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ вполне монотонной, если $g \in C^\infty(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$ и $(-1)^{|\alpha|} \partial^{|\alpha|} g(p) / \partial p^\alpha \geq 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $p \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$.

Теорема. Пусть $q \in C(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$, $q(x) > 0$ при $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ при $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $\lambda > 0$, и пусть $\rho_q(z) \in L^2 \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$, где $c \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$. Пусть $\Pi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. Положим $f(p) = \Pi(1, p)$, $g = M_c^{-1}(\rho_q M f)$.

При этих условиях функция Π представима в виде $\Pi = \Pi_q \mu$, где μ — неотрицательная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$, такая, что $x^{-c}, x^{-2c} \in L^1(\mu)$, а $\Pi_q \mu$ определена формулой (1), тогда и только тогда, когда

- (i) $p^{c-I} f(p), p^{2c-I} |f(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$;
- (ii) $p^{c-I} g(p), p^{2c-I} g(p) \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$, g вполне монотонна и $g(+0) < \infty$;
- (iii) $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda \Pi(p_0, p)$ при $\lambda > 0$, $p_0 > 0$, $p \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $q \in C(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$, $q(x) > 0$ при $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$ и $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ для всех $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $\lambda > 0$. Пусть $t^{c_1 + \cdots + c_n - 1} h(t) \in L^1(0, +\infty)$ при некотором $c = (c_1, \dots, c_n) \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$. Тогда при $z \in c + i\mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} p^{z-I} h(q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n)) dp = x^{-z} \frac{(Me^{-q})(z) (Mh)(z_1 + \cdots + z_n)}{\Gamma(z_1 + \cdots + z_n)}.$$

Доказательство этой леммы см. в [2, лемма 1, с. 6].

Лемма 2. Пусть $q \in C(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$, $q(x) > 0$ при $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ для всех $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $\lambda > 0$. Пусть $t^{c_1 + \cdots + c_n - 1} h(t) \in L^1(0, +\infty)$ и $t^{2c_1 + \cdots + 2c_n - 1} |h(t)|^2 \in L^1(0, +\infty)$ при некотором $c = (c_1, \dots, c_n) \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, и пусть h ограничена на $[0, +\infty)$. Пусть μ — неотрицательная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$, такая, что $x^{-c}, x^{-2c} \in L^1(\mu)$. Тогда $p^{c-I} R_q^h \mu(p) \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$ и $p^{2c-I} |R_q^h \mu(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$ (как функции аргумента p), где

$$R_q^h \mu(p) = \int_{\mathbb{R}_+^n} h(q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n)) \mu(dx), \quad p = (p_1, \dots, p_n). \quad (2)$$

Доказательство. В силу ограниченности функции h и конечности меры μ функция $R_q^h \mu(p)$ определена при $p \in \mathbb{R}_+^n$. По теореме Фубини и с учетом леммы 1 можно записать

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} p^{c-I} |(R_q^h \mu)(p)| dp \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} x^{-c} \mu(dx) \frac{(Me^{-q})(c) (M|h|)(c_1 + \cdots + c_n)}{\Gamma(c_1 + \cdots + c_n)}.$$

В условиях настоящей леммы выражение справа конечно; поэтому $p^{c-I} R_q^h \mu(p) \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$. Далее, используя неравенство Йенсена, запишем

$$|(R_q^h \mu)(p)|^2 \leq \mu(\mathbb{R}_+^n) \int_{\mathbb{R}_+^n} |h(q(p_1 x_1, \dots, p_n x_n))|^2 \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}_+^n) (R_q^h |\mu|^2)(p).$$

С учетом этого неравенства и леммы 1 получим следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} p^{2c-I} |R_q^h \mu(p)|^2 dp \leq \mu(\mathbb{R}_+^n) \int_{\mathbb{R}_+^n} x^{-2c} \mu(dx) \frac{(Me^{-q})(2c) (M|h|^2)(2c_1 + \dots + 2c_n)}{\Gamma(2c_1 + \dots + 2c_n)}.$$

Из конечности последнего выражения вытекает, что $p^{2c-I} |R_q^h \mu(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$. $\square$

Лемма 3. Пусть $q_k \in C(\mathbb{R}_+^n) \cap C^1(\text{int } \mathbb{R}_+^n)$, $q_k(x) > 0$ при $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $q_k(\lambda x) = \lambda q_k(x)$ для всех $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, $\lambda > 0$, $k = 1, 2$. Пусть $t^{c_1+\dots+c_n-1} h_k(t) \in L^1(0, +\infty)$ и $t^{2c_1+\dots+2c_n-1} |h_k(t)|^2 \in L^1(0, +\infty)$ при некотором $c = (c_1, \dots, c_n) \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, h_k ограничены на $[0, +\infty)$, $k = 1, 2$. Пусть функция

$$\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2}(z) = \frac{(Me^{-q_1})(z) (Mh_1)(z_1 + \dots + z_n)}{(Me^{-q_2})(z) (Mh_2)(z_1 + \dots + z_n)}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad (3)$$

определена при почти всех $z \in c + i\mathbb{R}^n$. Пусть μ — неотрицательная конечная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^n$, такая, что x^{-c} , $x^{-2c} \in L^1(\mu)$. Пусть оператор R_q^h определен формулой (2). Тогда справедливы следующие утверждения.

(А) Имеет место формула $R_{q_1}^{h_1} \mu = M_c^{-1}(\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M R_{q_2}^{h_2} \mu)$.

(В) Пусть $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$ и $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2}(z) \neq 0$ для почти всех $z \in c + i\mathbb{R}^n$. Пусть $p^{c-I} f(p)$, $p^{2c-I} |f(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$, и пусть выполнено равенство $R_{q_1}^{h_1} \mu = M_c^{-1}(\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M f)$. Тогда $f = R_{q_2}^{h_2} \mu$.

Доказательство. (А) Пользуясь леммой 1 и теоремой Фубини, получим при $z \in c + i\mathbb{R}^n$ следующее равенство:

$$(M R_{q_k}^{h_k} \mu)(z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x^{-z} \mu(dx) \frac{(Me^{-q_k})(z) (Mh_k)(z_1 + \dots + z_n)}{\Gamma(z_1 + \dots + z_n)}, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда вытекает, что

$$(M R_{q_1}^{h_1} \mu)(z) = \sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2}(z) (M R_{q_2}^{h_2} \mu)(z). \quad (4)$$

Из леммы 2 следует, что $p^{c-I} R_{q_1}^{h_1} \mu(p)$, $p^{2c-I} |R_{q_1}^{h_1} \mu(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$. Поэтому к равенству (4) можно применить обратное преобразование Меллина, так что слева получится $R_{q_1}^{h_1} \mu$.

(В) По условию и в силу доказанного п. (А) имеем

$$M_c^{-1}(\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M f) = M_c^{-1}(\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M R_{q_2}^{h_2} \mu), \quad (5)$$

так как оба выражения в нем равны $R_{q_1}^{h_1} \mu$. Согласно условию и лемме 2, $p^{c-I} f(p)$, $p^{2c-I} |f(p)|^2$, $p^{c-I} R_{q_2}^{h_2} \mu(p)$, $p^{2c-I} |R_{q_2}^{h_2} \mu(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$. Поэтому $M f$, $M R_{q_2}^{h_2} \mu \in L^2(c + i\mathbb{R}^n)$. Так как $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} \in L^2(c + i\mathbb{R}^n) \cup L^\infty(c + i\mathbb{R}^n)$, то $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M f$, $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2} M R_{q_2}^{h_2} \mu \in L^2(c + i\mathbb{R}^n)$. Наконец, по лемме 2 $p^{c-I} R_{q_1}^{h_1} \mu(p)$, $p^{2c-I} |R_{q_1}^{h_1} \mu(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+^n)$. Поэтому можно сначала применить к равенству (5) оператор M , потом поделить полученное равенство на $\sigma_{q_1, q_2}^{h_1, h_2}$, а затем применить к новому равенству оператор M_c^{-1} . В итоге мы придем к равенству $f = R_{q_2}^{h_2} \mu$. $\square$

3. Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть $\Pi(p_0, p) = (\Pi_q \mu)(p_0, p)$. Свойство $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda \Pi(p_0, p)$ следует из формулы (1).

Справедливо равенство $f = R_q^{h_\Pi} \mu$, где $h_\Pi(t) = (1-t)_+$ и оператор $R_q^{h_\Pi}$ определен формулой (2). Кроме того, заметим, что $\rho_q = \sigma_{q_L, q}^{h_L, h_\Pi}$, где $h_L(t) = \exp(-t)$,

$h_{\Pi}(t) = (1-t)_{+}$, $q_L(x) = x_1 + \dots + x_n$, а функция $\sigma_{q_L, q}^{h_L, h_{\Pi}}$ определена формулой (3). По лемме 2 имеем $p^{c-I}f(p)$, $p^{2c-I}|f(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$. По лемме 3(A) имеем $L\mu = M_c^{-1}(\rho_q Mf) \equiv g$, где L — многомерное преобразование Лапласа. Отсюда в силу теоремы характеризации для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) вытекает, что функция g вполне монотонна и $g(+0) = \mu(\mathbb{R}_{+}^n) < \infty$.

Из равенства $g = L\mu$ с учетом леммы 1 следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^n} p^{c-I}g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_{+}^n} x^{-c}\mu(dx) \Gamma(c_1) \cdots \Gamma(c_n). \quad (6)$$

Отсюда в силу $x^{-c} \in L^1(\mu)$ вытекает, что $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$. Заменяя в равенстве (6) p^{c-I} на p^{2c-I} , получим, учитывая $x^{-2c} \in L^1(\mu)$, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$.

Достаточность. По условию функция $g = M_c^{-1}(\rho_q Mf)$ вполне монотонна и $g(+0) < \infty$. По теореме характеризации для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) найдется такая неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_{+}^n$, что $g = L\mu$.

Так как по условию $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$, то из равенства (6) следует, что $x^{-c} \in L^1(\mu)$. Заменяя в этом равенстве p^{c-I} на p^{2c-I} и пользуясь тем, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$, получим, что $x^{-2c} \in L^1(\mu)$. Наконец, из равенства $g \equiv M_c^{-1}(\rho_q Mf) = L\mu$ в силу леммы 3(B) следует, что $f(p) = (\Pi_q \mu)(1, p)$.

Из соотношения $\Pi(1, p) \equiv f(p) = (\Pi_q \mu)(1, p)$ в силу свойства $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda \Pi(p_0, p)$ вытекает, что $\Pi(p_0, p) = (\Pi_q \mu)(p_0, p)$. Теорема доказана.

Замечание. Приведенная схема доказательства теоремы характеризации для функции прибыли (1) непосредственно переносится на случай произвольных операторов вида (2), например, на случай преобразования Фанташье, которому соответствует выбор $q(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, $h(t) = (1+t)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **5:4** (20) (2013), 48–61. [2] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **6:2** (22) (2014), 3–14. [3] S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955. [4] G. M. Henkin, A. A. Shananin, in: Transl. Math. Monographs, vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 189–223. [5] А. А. Шананин, Матем. моделирование, **9:9** (1997), 117–127.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики
СМАР, Ecole Polytechnique, France
e-mail: agalets@gmail.com

Поступила в редакцию
20 октября 2013 г.

УДК 519.2

Замечания о квантовых марковских состояниях

© 2015. З. И. БЕЖАЕВА, В. И. ОСЕЛЕДЕЦ

Посвящается А. М. Вершику по случаю его 80-летия

Введение. В настоящей заметке дается определение квантового марковского состояния на квазилокальной C^* -алгебре $\Omega_d = \bigotimes_{k \in N} (M_d)_k$, где M_d есть C^* -алгебра комплексных матриц размера $d \times d$.