Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Замечания о квантовых марковских состояниях, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 60–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 02:56:19

$h_{\Pi}(t) = (1-t)_{+}$, $q_L(x) = x_1 + \dots + x_n$, а функция $\sigma_{q_L, q}^{h_L, h_{\Pi}}$ определена формулой (3). По лемме 2 имеем $p^{c-I}f(p)$, $p^{2c-I}|f(p)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$. По лемме 3(A) имеем $L\mu = M_c^{-1}(\rho_q Mf) \equiv g$, где L — многомерное преобразование Лапласа. Отсюда в силу теоремы характеристики для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) вытекает, что функция g вполне монотонна и $g(+0) = \mu(\mathbb{R}_{+}^n) < \infty$.

Из равенства $g = L\mu$ с учетом леммы 1 следует равенство

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^n} p^{c-I}g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_{+}^n} x^{-c}\mu(dx) \Gamma(c_1) \cdots \Gamma(c_n). \quad (6)$$

Отсюда в силу $x^{-c} \in L^1(\mu)$ вытекает, что $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$. Заменяя в равенстве (6) p^{c-I} на p^{2c-I} , получим, учитывая $x^{-2c} \in L^1(\mu)$, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$.

Достаточность. По условию функция $g = M_c^{-1}(\rho_q Mf)$ вполне монотонна и $g(+0) < \infty$. По теореме характеристики для преобразования Лапласа (см. [3, теорема 4.2.1, с. 87]) найдется такая неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_{+}^n$, что $g = L\mu$.

Так как по условию $p^{c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$, то из равенства (6) следует, что $x^{-c} \in L^1(\mu)$. Заменяя в этом равенстве p^{c-I} на p^{2c-I} и пользуясь тем, что $p^{2c-I}g(p) \in L^1(\mathbb{R}_{+}^n)$, получим, что $x^{-2c} \in L^1(\mu)$. Наконец, из равенства $g \equiv M_c^{-1}(\rho_q Mf) = L\mu$ в силу леммы 3(B) следует, что $f(p) = (\Pi_q \mu)(1, p)$.

Из соотношения $\Pi(1, p) \equiv f(p) = (\Pi_q \mu)(1, p)$ в силу свойства $\Pi(\lambda p_0, \lambda p) = \lambda \Pi(p_0, p)$ вытекает, что $\Pi(p_0, p) = (\Pi_q \mu)(p_0, p)$. Теорема доказана.

Замечание. Приведенная схема доказательства теоремы характеристики для функции прибыли (1) непосредственно переносится на случай произвольных операторов вида (2), например, на случай преобразования Фанташье, которому соответствует выбор $q(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, $h(t) = (1+t)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **5:4** (20) (2013), 48–61. [2] А. Д. Агальцов, Труды МФТИ, **6:2** (22) (2014), 3–14. [3] S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955. [4] G. M. Henkin, A. A. Shananin, in: Transl. Math. Monographs, vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 189–223. [5] А. А. Шананин, Матем. моделирование, **9:9** (1997), 117–127.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики
СМАР, Ecole Polytechnique, France
e-mail: agalets@gmail.com

Поступила в редакцию
20 октября 2013 г.

УДК 519.2

Замечания о квантовых марковских состояниях

© 2015. З. И. БЕЖАЕВА, В. И. ОСЕЛЕДЕЦ

Посвящается А. М. Вершику по случаю его 80-летия

Введение. В настоящей заметке дается определение квантового марковского состояния на квазилокальной C^* -алгебре $\Omega_d = \bigotimes_{k \in N} (M_d)_k$, где M_d есть C^* -алгебра комплексных матриц размера $d \times d$.

Классический аналог состояния — это вероятностная мера на прямом произведении $X = \prod_{k \in N} \{1, \dots, d\}_k$. Классический аналог марковского состояния — это марковская мера на пространстве X .

В [4] мы задавали марковскую меру μ с помощью неотрицательной трансфер-матрицы $A \in M_d$ с элементами $a(i, j)$. А именно, если $n \geq 2$, то

$$\mu(\{x \in X : x_1(x) = i_1, \dots, x_n(x) = i_n\}) = \frac{l(i_1)a(i_1, i_2) \cdots a(i_{n-1}, i_n)r(i_n)}{\lambda^{n-1}}.$$

При $n = 1$

$$\mu(\{x \in X : x_1(x) = i\}) = l(i)r(i).$$

В этих формулах λ — спектральный радиус матрицы A и

$$Ar = \lambda r, \quad r^\top = (r(1), \dots, r(d)) \geq 0, \quad l = (l(1), \dots, l(d)) \geq 0, \quad lr = 1.$$

Аналогичный подход годится и для квантового случая. Квантовое марковское состояние задается нами с помощью неотрицательно определенной трансфер-матрицы $A \in M_{d^2}$.

Используя матрицу T — результат преобразования Чоя–Ямилковского ([6], [5]) матрицы A , мы получаем еще одну формулу для последовательности матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние.

Сцепленные квантовые марковские состояния Аккарди и Фидалео [2] входят в наш класс квантовых марковских состояний. Общие квантовые марковские состояния по Аккарди [1] и конечно коррелированные состояния [3] соответствуют софическим мерам в классическом случае.

Для случая, когда трансфер-матрица имеет ранг 1, мы вычисляем собственные числа и собственные векторы матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние. Последовательность энтропий фон Неймана матриц плотности, задающих квантовое марковское состояние, ограничена, динамическая энтропия равна нулю.

1. Квантовые марковские состояния. Пусть M_{d^n} есть C^* -алгебра комплексных матриц размера $d^n \times d^n$. Квадрат нормы матрицы в этой C^* -алгебре матриц равен наибольшему сингулярному числу матрицы.

Для нумерации строк и столбцов таких матриц мы будем использовать множество всех слов $x = x_1 \cdots x_n$ в алфавите $\{1, \dots, d\}$. Элементы матрицы $F \in M_{d^n}$ имеют вид $F(x, y)$.

Алгебра M_{d^n} вкладывается в алгебру $M_{d^{n+1}}$. А именно, матрице $F \in M_{d^n}$ сопоставляется матрица $\tilde{F} \in M_{d^{n+1}}$ по формуле

$$\tilde{F}(x_1 \cdots x_{n+1}, y_1 \cdots y_{n+1}) = F(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) \delta(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

где $\delta(i, j)$ — символ Кронекера.

Мы отождествляем C^* -алгебру M_{d^n} с C^* -алгеброй $\bigotimes_{k=1}^n (M_d)_k$. C^* -алгебра Ω_d есть замыкание индуктивного предела C^* -алгебр M_{d^n} , $n = 1, 2, \dots$.

Состояние ρ на Ω_d (положительный линейный функционал, $\rho(\text{Id}) = 1$) задает последовательность матриц плотности $\rho_n \in M_{d^n}$ по формуле

$$\rho(F) = \text{Tr}(F \rho_n), \quad F \in M_{d^n}.$$

Напомним, что матрица плотности — это неотрицательно определенная матрица со следом 1.

Условие согласованности. Равенство

$$\mathrm{Tr}(\tilde{F}\rho_{n+1}) = \mathrm{Tr}(F\rho_n),$$

т. е.

$$\rho_n(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = \sum_{x_{n+1}} \rho_{n+1}(x_1 \cdots x_n x_{n+1}, y_1 \cdots y_n x_{n+1}),$$

однозначно определяет состояние ρ по последовательности неотрицательно определенных матриц ρ_n , $\mathrm{Tr}(\rho_n) = 1$.

Если σ_d — эндоморфизм сдвига C^* -алгебры Ω_d , то состояние ρ инвариантно относительно σ_d , если $\rho(\sigma_d \cdot) = \rho(\cdot)$.

Условие инвариантности состояния. Состояние инвариантно относительно σ_d тогда и только тогда, когда

$$\sum_{x_0} \rho_{n+1}(x_0 x_1 \cdots x_n, x_0 y_1 \cdots y_n) = \rho_n(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n).$$

Пусть $A \in M_{d^2}$ — ненулевая неотрицательно определенная матрица с элементами $a(x_1 x_2, y_1 y_2)$. Обозначим через $B \in M_d$ матрицу с элементами $b(i, j) = a(ij, ij)$. Пусть λ — спектральный радиус матрицы B и

$$lB = \lambda l, \quad Br = \lambda r, \quad l \geq 0, \quad r \geq 0,$$

$$l = (l(1), \dots, l(d)), \quad r = (r(1), \dots, r(d))^T, \quad lr = 1.$$

Пусть Q — ненулевая неотрицательно определенная матрица с элементами $q(i, j)$ и

$$\sum_{k=1}^d q(k, k)r(k) = 1.$$

Обозначим через Q^+ матрицу с элементами

$$q^+(i, j) = \sum_{k=1}^d a(ik, jk)r(k)$$

и через Q^- матрицу с элементами

$$q^-(i, j) = \sum_{k=1}^d l(k)a(ki, kj).$$

Определим матрицы ρ_n , $n = 1, 2, \dots$:

$$\rho_1(x_1, y_1) = q(x_1, y_1)q^+(x_1, y_1),$$

$$\rho_n(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = \frac{q(x_1, y_1)a(x_1 x_2, y_1 y_2) \cdots a(x_{n-1} x_n, y_{n-1} y_n)q^+(x_n, y_n)}{\lambda^{n-1}}.$$

Определение. Состояние ρ с указанными матрицами плотности ρ_n , $n = 1, 2, \dots$, называется *квантовым марковским состоянием*.

Это определение очень естественно и предельно близко к определению классической марковской меры. Квантовое марковское состояние при ограничении на максимальную абелеву подалгебру в Ω_d , порожденную диагональными матрицами в M_{d^n} , $n = 1, 2, \dots$, совпадает с марковским состоянием, отвечающим марковской мере на множестве $\{1, \dots, d\}^N$.

Заметим, что такое утверждение, вообще говоря, неверно для квантового марковского состояния в смысле Аккарди. Наше определение ближе всего к определению сцепленного квантового марковского состояния Аккарди и Фидалео [2], которое является квантовым марковским состоянием в нашем смысле.

Утверждение 1. Матрица ρ_n неотрицательно определена и $\text{Tr}(\rho_n) = 1$.

Утверждение 2. Матрицы ρ_n согласованы, т. е. $\text{Tr}(F\rho_n) = \text{Tr}(\tilde{F}\rho_{n+1})$.

Доказательство этих утверждений легко следует из введенных определений.

Пусть $Q = Q^-$. Тогда ρ — инвариантное квантовое марковское состояние. Это легко следует из определений.

Получим еще одну формулу для квантового марковского состояния ρ .

Для $F, G \in M_d$ будем обозначать через $F * G$ операцию поэлементного умножения матриц. Рассмотрим матрицы $F_1, \dots, F_n \in M_d$ и матрицы $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n \in M_{d^n}$,

$$\hat{F}_i(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n) = F_i(x_i y_i) \prod_{k \neq i} \delta(x_k, y_k), \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\rho(\hat{F}_1) = \text{Tr}(F_1(Q * Q^+)), \quad \rho(\hat{F}_1 \cdots \hat{F}_n) = \frac{\text{Tr}(F_1(Q * T_{F_2} \cdots T_{F_n}(Q^+)))}{\lambda^{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

где $T \in M_{d^2}$ — матрица с элементами $t(ij, kl) = a(ik, jl)$, а $T_F(G) = T(F^T * G)$, $F^T(x_1, y_1) = F(y_1, x_1)$.

Заметим, что T — вполне положительное отображение, полученное из матрицы A преобразованием Чоя–Ямилковского ([5], [6]).

2. О квантовом аналоге стохастической матрицы. Заметим, что

$$T_{\text{Id}}(Q^+) = \lambda Q^+.$$

Действительно,

$$q^+(i, j) = \sum_k a(ik, jk)r(k), \quad q^+(i, i) = \sum_k a(ik, ik)r(k) = \sum_k b(i, k)r(k) = \lambda r(i).$$

Но

$$\begin{aligned} T_{\text{Id}}Q^+ &= \sum_{k,l} t(ij, kl)\delta(k, l)q^+(k, l) = \sum_{k,l} a(ik, jl)\delta(k, l)q^+(k, l) \\ &= \sum_k a(ik, jk)q^+(k, k) = \lambda \sum_k a(ik, jk)r(k) = \lambda q^+(i, j). \end{aligned}$$

Если $\lambda = 1$, то $T_{\text{Id}}Q^+ = Q^+$. Если $T_{\text{Id}}\text{Id} = \text{Id}$, то T_{Id} — квантовый аналог стохастической матрицы.

3. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы ρ_n для случая, когда трансфер-матрица A имеет ранг 1. Если ранг матрицы A равен 1, то $a(x_1 x_2, y_1 y_2) = f(x_1 x_2)\overline{f(y_1 y_2)}$. Тогда число ненулевых собственных чисел матрицы плотности ρ_n (с учетом кратности) не превосходит d (а ведь порядок матрицы ρ_n равен d^n). Поэтому $S_n \leq \ln d$, где $S_n = -\text{Tr}(\rho_n \ln \rho_n)$ — энтропия фон Неймана.

При $n > 1$

$$\text{Range}(\rho_n) = \{f(x_1, x_2) \cdots f(x_{n-1}, x_n)\phi(x_1, x_n)\}.$$

При умножении матрицы ρ_n на вектор $f(x_1, x_2) \cdots f(x_{n-1}, x_n) \phi(x_1, x_n)$ получаем элемент $f(x_1, x_2) \cdots f(x_{n-1}, x_n) \psi(x_1, x_n)$, где

$$\begin{aligned} & \psi(x_1, x_n) \\ &= \sum_{y_1 \cdots y_n} q^-(x_1, y_1) \overline{f(y_1, y_2)} \cdots \overline{f(y_{n-1}, y_n)} f(y_1, y_2) \cdots f(y_{n-1}, y_n) q^+(x_n, y_n) \phi(y_1, y_n) \\ &= \sum_{y_1, y_n} q^-(x_1, y_1) b^{n-1}(y_1, y_n) q^+(x_n, y_n) \phi(y_1, y_n), \end{aligned}$$

$b^{n-1}(i, j)$ — элементы матрицы B^{n-1} .

Введем матрицу K_n с элементами $K_n(ij, kl) = q^-(i, k) b^{n-1}(k, l) q^+(j, l)$. Тогда $\psi(i, j) = \sum_{k, l} K_n(ij, kl) \phi(k, l)$.

Матрица ρ_n имеет те же ненулевые собственные числа b , что и матрица K_n . Кроме того, если $\phi(k, l)$ — собственный вектор матрицы K_n , то функция $f(x_1, x_2) \cdots f(x_{n-1}, x_n) \phi(x_1, x_n)$ — собственный вектор матрицы ρ_n .

В следующем примере мы вычисляем указанным выше методом собственные числа матрицы ρ_n и получаем, что предел последовательности энтропий фон Неймана S_n равен $\ln 4$.

Матрицы v_1, v_2, v_3 примера взяты из работы [3]. В работе [3] с помощью этих матриц определяется состояние на Ω_3 , порождаемое деформацией знаменитой AKLT-модели (см. [3]). Это состояние не является квантовым марковским состоянием на Ω_3 .

Мы определяем с помощью матриц v_1, v_2, v_3 квантовое марковское состояние на Ω_6 . Любопытно, что предел энтропий фон Неймана состояния на Ω_3 из [3] тоже равен $\ln 4$. Заметим еще, что предел энтропий фон Неймана состояния (если он существует) называют сцепленной энтропией.

4. Пример. $d = 6$, $x_i = z_i \alpha_i$, $y_i = v_i \beta_i$ где $u_i, v_i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i, \beta_i \in \{1, 2\}$. Положим $f(z_1 \alpha_1, z_2 \alpha_2) = v_{z_2}(\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}, \\ & b(z_1 \alpha_1, z_2 \alpha_2) = v_{z_2}^2(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Если использовать соответствие

$$11 \rightarrow 1, 12 \rightarrow 2, 21 \rightarrow 3, 22 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 32 \rightarrow 6,$$

то матрица b равна

$$b = \begin{pmatrix} 0 & (\cos t)^2 & (\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sin t)^2 & (\cos t)^2 & 0 \\ 0 & (\cos t)^2 & (\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sin t)^2 & (\cos t)^2 & 0 \\ 0 & (\cos t)^2 & (\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sin t)^2 & (\cos t)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы предположим, что $|\cos t| < 1$.

Матрица b стохастическая, $\lambda = 1$. Соответствующие векторы — это

$$l = (0, \frac{1}{2}(\cos t)^2, \frac{1}{2}(\sin t)^2, \frac{1}{2}(\sin t)^2, \frac{1}{2}(\cos t)^2, 0), \quad r^\top = (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Можно также вычислить матрицы Q^- и Q^+ :

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & \frac{1}{2}\sin t \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\cos t \sin t & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sin t)^2 & -\frac{1}{2}\cos t \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cos t \sin t & \frac{1}{2}(\cos t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить матрицы K_n . Ненулевые собственные числа матрицы ρ_n равны собственным числам матрицы K_n и равны

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-\cos 2t)^{n+1}.$$

Предел энтропий фон Неймана равен $\ln 4$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Аккарди, Функциональный анализ и его прил., **9:1** (1975), 1–8. [2] L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. Mat. Pura Appl., **184:3** (2005), 327–346. [3] M. Fannes, B. Nachtergaele, R. F. Werner, Comm. Math. Phys., **144:3** (1992), 443–490. [4] З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326** (2005), 28–47. [5] A. Jamiolkowski, Rep. Mathematical Phys., **3:4** (1972), 275–278. [6] M. D. Choi, Linear Algebra Appl., **10** (1975), 285–290.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: zbejaeva@hse.ru

Поступила в редакцию
30 ноября 2014 г.

Финансовый университет при Правительстве РФ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oseled@gmail.com

УДК 514.84

Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе*

© 2015. Б. О. ВАСИЛЕВСКИЙ

Интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии была установлена в работе Дубровина, Кричевера и Новикова [1]. Большой интерес вызывает задача построения ин-

*Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации 2010-220-01-077.