Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Горин, Г. И. Ольшанский, Детерминантные меры, связанные с большими полиномами q -Якоби, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 70–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:26:44

P. Grinevich, M. Nieszporiski, P. M. Santini, J. Math. Phys., **48**:1 (2007), 013513. [4] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **279**:1 (1984), 20–24; 279:4 (1984), 784–788. [5] S. Grushevsky, I. Krichever, Duke Math. J., **152**:2 (2010), 317–371. [6] J. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., vol. 352, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973. [7] A. Bobenko, C. Mercat, Y. Suris, J. Reine Angew. Math., **583** (2005), 117–161. [8] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, в кн.: Труды МИАН, т. 225, Наука, М., 1999, 21–45.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vasilevskiy.boris@gmail.com

Поступила в редакцию
11 ноября 2013 г.

УДК 517.587+517.588

Детерминантные меры, связанные с большими полиномами q -Якоби*

© 2015. В. Е. Горин, Г. И. Ольшанский

Детерминантные меры образуют специальный класс вероятностных мер на пространствах локально конечных точечных конфигураций (см. обзор Бородина [1]). Ключевое свойство детерминантной меры состоит в том, что ее корреляционные функции всех порядков выражаются некоторым простым образом через одну функцию двух переменных, которая называется корреляционным ядром.

В работе Бородина и Ольшанского [2] изучалось семейство детерминантных мер, названных *zw-мерами*. Они связаны с задачей гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$, которая была поставлена в работе Ольшанского [12]. Аналоги *zw-мер* существуют также для других бесконечномерных классических групп и для бесконечномерных симметрических пространств (Ольшанский–Осиненко [14]). *zw-меры* играют фундаментальную роль в бесконечномерном гармоническом анализе, поскольку их скейлинговые пределы управляют спектральным разложением некоторых выделенных унитарных представлений.

С другой стороны, *zw-меры* являются красивыми комбинаторными объектами, у которых есть много общего с так называемыми *z-мерами* — некоторым частным случаем введенных Окуньковым мер Шура на разбиениях. Как и меры Шура, *zw-меры* допускают обобщение, в котором возникает дополнительный деформационный параметр, аналогичный дайсоновскому β -параметру в теории случайных матриц или непрерывному параметру в симметрических функциях Джека (Ольшанский [13]).

Наша цель — показать, что понятие *zw-мер* можно обобщить в другом направлении, а именно, у *zw-мер* существует (неочевидный) q -аналог. Наш первый результат состоит в том, что у « N -частичных q -*zw-мер*» есть предел при $N \rightarrow \infty$ и предельная вероятностная мера является детерминантной мерой на некотором пространстве бесконечных точечных конфигураций. Мы нахо-

*Исследование Г. И. Ольшанского выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150).

дим соответствующее корреляционное ядро — оно выражается через базисную гипергеометрическую функцию ${}_2\phi_1$. Предельный переход при $N \rightarrow \infty$ связан с другим результатом, представляющим независимый интерес — это описание q -границы для расширенной версии графа Гельфанда-Цетлина.

1. q -аналог zw -мер. Зафиксируем тройку (ζ_+, ζ_-, q) вещественных параметров, где $\zeta_+ > 0$, $\zeta_- < 0$ и $0 < q < 1$. Отвечающая им двойная q -решетка есть подмножество $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ вида

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_- \cup \mathfrak{L}_+, \quad \mathfrak{L}_{\pm} := \{\zeta_{\pm} q^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Под *конфигурацией* мы понимаем произвольное подмножество $X \subset \mathfrak{L}$. Для $N = 1, 2, \dots$ мы обозначаем через $\mathbb{G}_N$ счетное множество, состоящее из всех N -точечных конфигураций. Мы нумеруем точки любой конфигурации $X \in \mathbb{G}_N$ в возрастающем порядке и пишем $X = (x_1 < \dots < x_N)$.

Мы собираемся ввести для каждого $N = 1, 2, \dots$ некоторую вероятностную меру $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ на $\mathbb{G}_N$. Она зависит от четверки $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ параметров, удовлетворяющих некоторым ограничениям (см. ниже), и дается формулой

$$M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(X) = \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \prod_{i=1}^N |x_i| \frac{(\alpha x_i; q)_{\infty} (\beta x_i; q)_{\infty}}{(\gamma q^{1-N} x_i; q)_{\infty} (\delta q^{1-N} x_i; q)_{\infty}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i)^2, \quad (1)$$

где $\mathcal{Z}_N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — нормировочная константа и мы используем стандартное обозначения из q -анализа $(a; q)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n)$.

Ограничения на параметры следующие. Мы предполагаем, что пара (α, β) является $\mathfrak{L}$ -допустимой в том смысле, что произведение вида $(\alpha x; q)_{\infty} (\beta x; q)_{\infty}$ вещественно и строго положительно для любого $x \in \mathfrak{L}$; это означает, что либо $\alpha = \bar{\beta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, либо α и β суть ненулевые вещественные числа, такие, что α^{-1} и β^{-1} лежат в открытом интервале между двумя соседними узлами решетки $\mathfrak{L}$. Далее, мы предполагаем, что пара (γ, δ) также $\mathfrak{L}$ -допустима. Наконец, мы предполагаем, что $\gamma \delta q^2 > \alpha \beta$, хотя мы думаем, что все результаты, приведенные ниже, остаются в силе при более слабом ограничении $\gamma \delta q > \alpha \beta$.

При выполнении всех этих предположений мера на $\mathbb{G}_N$, определенная по формуле (1), но без мультипликативной константы, имеет строго положительные веса и сумма всех весов конечна. Тогда нормировочная константа равна сумме весов. Для этой константы имеется явное, но несколько сложное выражение.

Замечание 1. Наше определение меры $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ укладывается в общий формализм ортогональных полиномиальных ансамблей, см. Бородин [1], Кёниг [8]. В нашем случае нужные ортогональные полиномы (обозначим их через $P_n(x; a, b, c, d)$, $n = 0, 1, 2, \dots$) являются близкими родственниками классических больших полиномов q -Якоби. Коорнвиндер [10] называет их *pseudo big q -Jacobi polynomials*. Весовая функция полиномов $P_n(x; a, b, c, d)$ имеет вид

$$w(x; a, b, c, d) = |x| \frac{(ax; q)_{\infty} (bx; q)_{\infty}}{(cx; q)_{\infty} (dx; q)_{\infty}}, \quad x \in \mathfrak{L},$$

и для N -й меры берутся параметры $(a, b, c, d) = (\alpha, \beta, \gamma q^{1-N}, \delta q^{1-N})$.

Замечание 2. В статьях Ольшанского [12] и Бородина–Ольшанского [2] рассматриваются «zw-меры», которые определены на этажах $\mathbb{GT}_N$ графа Гельфанда–Цетлина. zw-меры зависят от четверки параметров (z, z', w, w') и связаны с некоторыми дискретными ортогональными полиномами на обычной решетке $\mathbb{Z}$; эти полиномы были названы в [2] *полиномами Аски–Лески*. В определенном предельном режиме, когда $q \nearrow 1$, полиномы $P_n(x; a, b, c, d)$ вырождаются в полиномы Аски–Лески, а меры $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ вырождаются в zw-меры. Это один из доводов в пользу того, чтобы рассматривать меры $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ как q -аналог zw-мер.

Более точно, в предельном переходе мы берем

$$\alpha = q^{w+1}, \quad \beta = q^{w'+1}, \quad \gamma = q^{-z}, \quad \delta = q^{-z'}$$

и предполагаем, что $\zeta_+ = 1$, тогда как $\zeta_- = \zeta_-(q)$ может меняться, с одним только условием — оставаться ограниченным от $-\infty$. Отметим, что в таком пределе весовая функция $w(x; a, b, c, d)$ (после надлежащей перенормировки) исчезает на $\mathfrak{L}_-$ и остается только положительная часть решетки $\mathfrak{L}$, которую можно отождествить с $\mathbb{Z}$.

2. Предельный переход при $N \rightarrow \infty$. Обозначим через $\bar{\mathbb{G}}_\infty$ множество всех конфигураций на $\mathfrak{L}$, которые ограничены как подмножества в $\mathbb{R}$, а через $\mathbb{G}_\infty \subset \bar{\mathbb{G}}_\infty$ множество счетных ограниченных конфигураций. Очевидно, что

$$\bar{\mathbb{G}}_\infty = \{\emptyset\} \cup \mathbb{G}_1 \cup \mathbb{G}_2 \cup \dots \cup \mathbb{G}_\infty.$$

Скажем, что две конфигурации из $\bar{\mathbb{G}}_\infty$ являются ε -близкими для данного $\varepsilon > 0$, если они совпадают вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Этим мы превращаем $\bar{\mathbb{G}}_\infty$ в равномерное пространство и, тем самым, в топологическое пространство, которое оказывается локально компактным.

Теорема 1. *Зафиксируем четверку $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ параметров, удовлетворяющих указанным выше ограничениям, и будем рассматривать каждую из мер $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$, $N = 1, 2, \dots$, как вероятностную меру на $\bar{\mathbb{G}}_\infty$. Когда $N \rightarrow \infty$, меры $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ слабо сходятся к некоторой вероятностной мере $M^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ на $\mathbb{G}_\infty$.*

Теорема 2. *Предельная мера $M^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ является детерминантной мерой с корреляционным ядром $K^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$, представимым через базисный гипергеометрический ряд ${}_2\phi_1$:*

$$K^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(x, y) = \text{const}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot \frac{F_0(x)F_1(y) - F_1(x)F_0(y)}{x - y}, \quad x, y \in \mathfrak{L},$$

где мы полагаем для $m = 0, 1$

$$F_m(x) = \sqrt{|x| \frac{(\alpha x; q)_\infty (\beta x; q)_\infty}{(\gamma x; q)_\infty (1/(\gamma x); q)_\infty (\delta x; q)_\infty (1/(\delta x); q)_\infty}} \cdot x^{1-m} \\ \times \frac{(\beta \gamma^{-1} q^{m-1}; q)_\infty (\delta^{-1} x^{-1} q^m; q)_\infty}{(\alpha \beta \gamma^{-1} \delta^{-1} q^{2m-2}; q)_\infty} \cdot {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} \alpha \delta^{-1} q^{m-1}, \beta^{-1} x^{-1} q \\ \delta^{-1} x^{-1} q^m \end{matrix} \middle| \beta \gamma^{-1} q^{m-1} \right)$$

и для мультипликативной константы также есть явное выражение.

Теорема 1 выводится из теорем 3 и 4. Теорема 2 получается прямым (хотя и утомительным) вычислением с использованием явной формулы для квадрата нормы полиномов $P_n(x; a, b, c, d)$.

3. Граница и свойство когерентности. Определим интервал $I(a, b)$ между двумя точками $a < b$ решетки $\mathfrak{L}$ следующим образом: это $(a, b]$, если $0 < a < b$; $[a, b]$, если $a < 0 < b$; и $[a, b)$, если $a < b < 0$. Тогда скажем, что две конфигурации $X = (x_1 < \dots < x_{N+1}) \in \mathbb{G}_{N+1}$ и $Y = (y_1 < \dots < y_N) \in \mathbb{G}_N$ *перемежаются*, если $y_i \in I(x_i, x_{i+1})$ для $i = 1, \dots, N$.

Для каждого $N = 1, 2, \dots$ мы вводим матрицу Λ_N^{N+1} формата $\mathbb{G}_{N+1} \times \mathbb{G}_N$: ее ненулевые матричные элементы отвечают перемежающимся парам (X, Y) и задаются формулой

$$\Lambda_N^{N+1}(X, Y) = \prod_{i=1}^N |y_i| \cdot \prod_{i=1}^N (1 - q^i) \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j - y_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq N+1} (x_j - x_i)}.$$

В случае, когда и X , и Y лежат в $\mathfrak{L}_+$, это определение по существу сводится к определению копереходных вероятностей из статьи Горина [4, разд. 4]. Мы доказываем, что матрицы Λ_N^{N+1} являются стохастическими, что позволяет применить формализм Вершика–Керова в версии работ Бородина–Ольшанского [2], [3] и определить (минимальную) *границу* цепочки $\{\mathbb{G}_N, \Lambda_N^{N+1}\}$. *Аппроксимация* граничной точки последовательностью $X(N) \in \mathbb{G}_N$ понимается как у Окунькова–Ольшанского [11, теорема 6.1].

Теорема 3. *Границу цепочки $\{\mathbb{G}_N, \Lambda_N^{N+1}\}$ можно отождествить с $\mathbb{G}_\infty$. При этом отождествлении последовательность $\{X(N) \in \mathbb{G}_N\}$ аппроксимирует граничную точку $X \in \mathbb{G}_\infty$ в том и только том случае, когда $X(N) \rightarrow X$ в топологии объемлющего пространства $\bar{\mathbb{G}}_\infty$.*

Этот результат является обобщением (некоторой части) теоремы 5.1 статьи Горина [4], но доказательство другое.

Теорема 4. *Меры $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$, $N = 1, 2, \dots$, образуют когерентную систему в том смысле, что они удовлетворяют соотношению когерентности*

$$M_{N+1}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \Lambda_N^{N+1} = M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta},$$

или, более подробно,

$$\sum_{X \in \mathbb{G}_{N+1}} M_{N+1}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(X) \Lambda_N^{N+1}(X, Y) = M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(Y) \quad \forall Y \in \mathbb{G}_N.$$

В силу общей теории из теорем 3 и 4 вытекает существование некоторой вероятностной меры $M^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ на границе $\mathbb{G}_\infty$, и тогда, привлекая дополнительные соображения, мы показываем, что $M^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ является слабым пределом мер $M_N^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$; это приводит к теореме 1.

Теорема 4 является q -аналогом предложения 7.7 из статьи Ольшанского [12], которое устанавливает свойство когерентности для zw -мер. Настоящая работа возникла из желания найти такого рода аналог. Поначалу мы думали, что это можно будет сделать в рамках работы Горина [4], где было предложена q -версия понятия когерентных систем на этажах графа Гельфанда–Цетлина. Но оказалось, что для наших целей формализм работы [4] недостаточен и само понятие графа Гельфанда–Цетлина нуждается в обобщении.

В ином теоретико-представленном контексте полиномы $P_n(x; a, b, c, d)$ ранее возникали в серии работ Грёнвельта и Кёлинга (см., например, [5]–[7] и дальнейшие ссылки в них). Мы благодарны Юрию Неретину, указавшему нам на эти работы; их идеи нам очень помогли. Мы благодарны также Эрику Кёлинку за ценные комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Borodin, in: The Oxford Handbook on Random Matrix Theory, Oxford University Press, Oxford, 2011, Chap. 11, 231–249; <http://arxiv.org/abs/0911.1153>.
 [2] A. Borodin, G. Olshanski, Ann. of Math., **161**:3 (2005), 1319–1422. [3] A. Borodin, G. Olshanski, Adv. Math., **230**:4–6 (2012), 1738–1779. [4] V. Gorin, Adv. Math., **229**:1 (2012), 201–266; <http://arxiv.org/abs/1011.1769>. [5] W. Groenevelt, Constr. Approx., **29**:1 (2009), 85–127; <http://arxiv.org/abs/math/0612643>. [6] W. Groenevelt, SIGMA, **7** (2011), 077; <http://arxiv.org/abs/1104.5101>. [7] W. Groenevelt, E. Koelink, J. Approx. Theory, **163**:7 (2011), 836–863; <http://arxiv.org/abs/0911.0205>. [8] W. König, Probab. Surv., **2** (2005), 385–447. [9] R. Koekoek, R. F. Swart-touw, Report 98-17, Faculty of Technical Math. Inform., Delft Univ. of Technology, 1998; <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey/>. [10] T. H. Koornwinder, <http://arxiv.org/abs/1401.0815>. [11] A. Okounkov, G. Olshanski, Internat. Math. Res. Notices, **1998**:13 (1998), 641–682. [12] G. Olshanski, J. Funct. Anal., **205**:2 (2003), 464–524; <http://arxiv.org/abs/math/0109193>. [13] Г. И. Ольшанский, Функц. анализ и его прил., **37**:4 (2003), 49–73. [14] Г. И. Ольшанский, А. А. Осиненко, Функц. анализ и его прил., **46**:4 (2012), 31–50.

Массачусетский технологический институт, Кембридж
 Институт проблем передачи информации РАН
 e-mail: vadicgor@gmail.com

Поступила в редакцию
 23 марта 2015 г.

Институт проблем передачи информации РАН
 e-mail: olsh2007@gmail.com

УДК 517.51

Суммируемость преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гиперповерхностях*

© 2015. И. А. ИКРОМОВ

1. Постановка задачи. Пусть (S_a) , $S_a \subset \mathbb{R}^{n+1}$, — семейство гладких гиперповерхностей, гладко зависящих от параметра $a \in \mathbb{R}^m$, и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m)$ — гладкая функция с компактным носителем. Для фиксированного $a \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим заряд $d\mu_a(x) := \psi(x, a) dS_a$, где dS_a — индуцированная мера Лебега на поверхности S_a . В частности, если ψ — неотрицательная функция, то мы имеем дело с борелевской мерой. Преобразование Фурье заряда $d\mu_a$ определяется следующим интегралом:

$$\widehat{d\mu_a}(\xi) := \int_{S_a} e^{ix \cdot \xi} d\mu_a(x), \quad (1)$$

что соответствует преобразованию Фурье обобщенной функции, заданной зарядом $d\mu_a$ (см. [1]); здесь $x \cdot \xi$ — скалярное произведение векторов x и ξ . Далее, через $d\mu$ и $\widehat{d\mu}$ обозначаются соответственно гладкая мера, сосредоточенная на фиксированной гиперповерхности, и ее преобразование Фурье.

В настоящей работе мы рассмотрим следующую задачу: *Найти точную нижнюю грань ρ_a множества $\{p : \widehat{d\mu_a} \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$, где $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ — про-*

*Работа выполнена при поддержке Исполнительного комитета по координации науки и технологий при КМ Республики Узбекистан, грант Ф-4-17.