Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Захаров, Особенности A и B типов в асимптотическом анализе решений параболического уравнения, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:16:54

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, А. Е. Родкина, Б. Н. Садовский, *Меры некомпактности и уплотняющие операторы*, Наука, Новосибирск, 1986.
- [2] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956. [3] N. A. Erzakova, *Nonlinear Anal.*, **75**:8 (2012), 3552–3557. [4] Н. А. Ерзакова, *Научный вестник МГТУ ГА*, **207** (2014), 110–117. [5] В. Б. Меламед, А. И. Перов, *Сиб. матем. ж.*, **4**:3 (1963), 702–704.
- [6] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [7] Н. А. Ерзакова, *Изв. вузов. Матем.*, **9** (2011), 1–8.

Московский государственный технический
университет гражданской авиации
e-mail: naerzakova@gmail.com

Поступила в редакцию
1 сентября 2014 г.

УДК 517.958

Особенности типов A и B в асимптотическом анализе решений параболического уравнения*

© 2015. С. В. ЗАХАРОВ

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$u(x, t_0) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ в случаях, когда решение предельной задачи ($\varepsilon = 0$) имеет точку градиентной катастрофы. Интерес к изучению поведения решений вблизи особых точек объясняется, в частности, тем, что подобные сингулярные события сами занимают очень малое время, но во многом определяют все последующее поведение системы. Асимптотическое поведение решений в окрестностях особых точек непосредственно связано с построением приближения в окрестностях ударных волн (математически соответствующих множествам Максвелла) в физических средах с малой ненулевой вязкостью.

Хотя типы особых точек решений подробно классифицированы [1] и процессы формирования ударных волн изучены ([2], [3]), построение асимптотических рядов по параметру вязкости ε для уравнения общего вида (1) в каждом конкретном случае представляет собой отдельную задачу.

2. Сингулярность типа сборки. В работе Ильина [4] задача (1)–(2) была исследована в случае, когда в полосе $t_0 \leq t \leq T$ решение предельной задачи ($\varepsilon = 0$) является функцией, гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва $x = s(t)$, $t \geq t^*$. Предполагается, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) > 0$, $t_0 = -1$.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №14-01-00322) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

При подходящем выборе начальной функции особая точка $(s(t^*), t^*)$ совпадает с началом координат, и в ее окрестности вводятся растянутые переменные $\xi = \varepsilon^{-3/4}x$, $\tau = \varepsilon^{-1/2}t$. Асимптотическое разложение решения ищется в виде ряда:

$$u \sim \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} w_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \varepsilon^{1/4}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отметим свойства главного члена разложения $\varepsilon^{1/4}w_{1,0}(\xi, \tau)$. Коэффициент $w_{1,0}(\xi, \tau)$ находится с помощью преобразования Коула–Хопфа

$$w_{1,0}(\xi, \tau) = -\frac{2}{\varphi''(0)\Lambda(\xi, \tau)} \frac{\partial \Lambda(\xi, \tau)}{\partial \xi},$$

где

$$\Lambda(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{8}(z^4 - 2z^2\tau + 4z\xi)\right) dz.$$

Аргумент экспоненты — это производящее семейство лагранжевой особенности A_3 , см. [1], [5].

Теорема 1. *Функция $w_{1,0}$ удовлетворяет асимптотическим соотношениям*

$$w_{1,0}(\xi, \tau) = [\varphi''(0)]^{-1} H(\xi, \tau) + \sum_{l=1}^{\infty} h_{1-4l}(\xi, \tau), \quad 3[H(\xi, \tau)]^2 - \tau \rightarrow \infty,$$

$(\xi, \tau) \in \Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{|\xi| < \tau^{\gamma_1-1/2}, \tau > 0, 0 < \gamma_1 < 2\}$, где $H(\xi, \tau)$ — функция сборки Уитни, $H^3 - \tau H + \xi = 0$, $h_l(\xi, \tau)$ — однородные функции степени l относительно $H(\xi, \tau)$, $\sqrt{-\tau}$ и $\sqrt{3[H(\xi, \tau)]^2 - \tau}$, являющиеся полиномами от $H(\xi, \tau)$, τ и $(3[H(\xi, \tau)]^2 - \tau)^{-1}$,

$$w_{1,0}(\xi, \tau) = \sqrt{\tau} \left(-\frac{\operatorname{th} z}{\varphi''(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-2k} q_k(z) \right), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$(\xi, \tau) \in \Omega_2 = \{|\xi| \tau^{1/2} < \tau^{\gamma_2}, \gamma_1 < \gamma_2 < 2\}$, где $z = \xi \sqrt{\tau}/2$, $|q_k(z)| \leq M_k(1 + |z|^k)$.

Доказательство теоремы основано на вычислении асимптотики интеграла $\Lambda(\xi, \tau)$ методом Лапласа. В области Ω_1 вклад в асимптотику дает один локальный максимум, а в области Ω_2 — два локальных максимума.

Ильин исследовал задачу при условии, что $\varphi'(q(x)) = -x + x^3 + O(x^4)$, $x \rightarrow 0$. Рассмотрим более общее условие

$$\varphi'(q(x)) = -x + x^{2n+1} + O(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (3)$$

Выясним масштаб внутренних переменных, вводимых с помощью замены $x = \eta \varepsilon^\mu$, $t = \theta \varepsilon^\mu$, $u \sim \varepsilon^\kappa$. Условие, чтобы все члены уравнения (1) были одного порядка, дает соотношения

$$-\mu = \kappa - \sigma = 1 - 2\sigma. \quad (4)$$

Из характеристического уравнения $x = y + (t+1)\varphi'(q(y))$ получаем $\sigma = \kappa + \mu = (2n+1)\kappa$. Отсюда находим

$$\sigma = \frac{2n+1}{2n+2}, \quad \mu = \frac{n}{n+1}, \quad \kappa = \frac{1}{2n+2}. \quad (5)$$

Поскольку $u = O(\varepsilon^{1/(2n+2)})$, уравнение (1) переходит в уравнение Бюргерса, решение которого можно записать в виде преобразования Коула–Хопфа. Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Если выполнено условие (3), то при $|\eta| + |\theta| < \varepsilon^{-\delta}$ уравнение (1) имеет асимптотическое решение

$$u \sim -2\varepsilon[\varphi''(0)V(x, t, \varepsilon)]^{-1} \frac{\partial V(x, t, \varepsilon)}{\partial x}, \quad (6)$$

$$V(x, t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{2n}s^{2n+2}}{n+1} + \frac{ts^2}{\varepsilon^\mu} - \frac{xs}{\varepsilon^\sigma}\right) ds,$$

где $\delta > 0$, а числа σ и μ определены формулами (5).

Интеграл $V(x, t, \varepsilon)$ соответствует сечению лагранжевой особенности A_{2n+1} . Коэффициент при s^{2n+2} определяется из условия согласования асимптотики (6) и внешнего разложения $u_{\text{out}} \sim \varepsilon^\kappa U_0(\eta, \theta)/\varphi''(0)$, $U_0^{2n+1} - \theta U_0 + \eta = 0$.

3. Задача о переходе слабого разрыва в сильный. В работах [6], [7] решение задачи (1)–(2) исследовано в случае, когда начальная функция является гладкой всюду, кроме одной точки, в которой она непрерывна, а разрыв имеет первая производная:

$$q(x) = -(x + ax^2)\Theta(-x)(1 + g(x)), \quad t_0 = -1,$$

где $a > 0$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля, а через Θ обозначается функция Хевисайда. Такой слабый разрыв в предельной задаче распространяется вдоль характеристики конечное время, а затем переходит в сильный разрыв.

В окрестности особой точки ($x = 0$, $t = 0$) введем растянутые переменные

$$\xi = \varepsilon^{-2/3}x, \quad \tau = \varepsilon^{-1/3}t.$$

Асимптотика решения имеет вид ряда:

$$u \sim \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} w_{p,s}(\xi, \tau) \ln^s \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Главный член разложения $\varepsilon^{1/3}w_{2,0}(\xi, \tau)$ находится с помощью преобразования Коула–Хопфа (в предположении, что $\varphi''(0) = 1$):

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi, \tau)} \frac{\partial \Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \Phi(\xi, \tau) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right) ds,$$

где $b = a - \varphi'''(0)/2 > 0$. Аргумент экспоненты соответствует версальной деформации для краевой особенности B_3 , имеющей общий вид $s^3 + \lambda_1 s^2 + \lambda_2 s + \lambda_3$, см. [8], однако множитель e^{λ_3} в данном случае не играет роли вследствие вида преобразования Коула–Хопфа.

Теперь рассмотрим более общий случай, когда начальная функция такова, что

$$\varphi'(q(x)) = -(x + bx^{2n})\Theta(-x)(1 + g(x)), \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Из характеристического уравнения $x = y + (t + 1)\varphi'(q(y))$ получаем соотношения $\sigma = \varkappa + \mu = 2n\varkappa$. С учетом (4) находим

$$\sigma = \frac{2n}{2n+1}, \quad \mu = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad \varkappa = \frac{1}{2n+1}. \quad (8)$$

По аналогии с теоремой 2 получаем следующий результат.

Теорема 3. Если выполнено условие (7), то при $|\eta| + |\theta| < \varepsilon^{-\delta}$ уравнение (1) имеет асимптотическое решение

$$u \sim -2\varepsilon[W(x, t, \varepsilon)]^{-1} \frac{\partial W(x, t, \varepsilon)}{\partial x}, \quad (9)$$

$$W(x, t, \varepsilon) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2^{2n}b}{2n+1} s^{2n+1} + \frac{ts^2}{\varepsilon^\mu} - \frac{xs}{\varepsilon^\sigma}\right) ds,$$

где числа σ и μ определены формулами (8).

Интеграл $W(x, t, \varepsilon)$ соответствует сечению краевой особенности B_{2n+1} . Коэффициент при s^{2n+1} определяется из условия согласования асимптотики (9) и внешнего разложения $u_{\text{out}} \sim \varepsilon^\varkappa U_0(\eta, \theta)$, $bU_0^{2n} - \theta U_0 + \eta = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
 [2] И. А. Бogaевский, *Алгебра и анализ*, **1:4** (1989), 1–16. [3] В. Khesin, G. Misiolek, *Труды МИАН*, **259** (2007), 77–85. [4] А. М. Ильин, *Докл. АН СССР*, **283:3** (1985), 530–534. [5] В. И. Арнольд, *Функц. анализ и его прил.*, **6:4** (1972), 3–25. [6] С. В. Захаров, А. М. Ильин, *Матем. сб.*, **192:10** (2001), 3–18. [7] С. В. Захаров, *Матем. сб.*, **197:6** (2006), 47–62. [8] В. И. Арнольд, *УМН*, **33:5** (1978), 91–105.

Институт математики и механики
 Уральского отделения РАН
 e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
 17 февраля 2014 г.

УДК 517.98

Теорема об относительном индексе для K -гомологий

© 2015. В. Е. НАЗАЙКИНСКИЙ

Введение. Пусть M и M' — два многообразия, совпадающие вне некоторых подмножеств $Q \subset M$ и $Q' \subset M'$ (т.е. $M \setminus Q$ и $M' \setminus Q'$ отождествлены между собой), и пусть D и D' — эллиптические операторы на M и M' соответственно, совпадающие на $M \setminus Q \simeq M' \setminus Q'$. Разность $\text{ind } D - \text{ind } D'$ их индексов называется *относительным индексом* операторов D и D' . Под *теоремами об относительном индексе* в литературе часто понимают утверждения следующего типа: *относительный индекс не зависит от структуры многообразий M и M' и операторов D и D' там, где они совпадают, т.е. на $M \setminus Q$* ; иными словами, для вычисления относительного индекса операторов D и D' достаточно знать, как они устроены на Q и Q' соответственно. Для гладких компактных