Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено, О централизаторе бесконечного перемешивающего преобразования ранга один, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:47:54

УДК 517.9

О централизаторе бесконечного перемешивающего преобразования ранга один

© 2015. В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено

В работе Орнштейна [7] доказано, что перемешивающее преобразование ранга 1, действующее на вероятностном пространстве, коммутирует только со своими степенями. Наша цель — установить аналогичную теорему в случае пространства с сигма-конечной мерой.

Этот результат имеет следующее приложение. С эргодическим обратимым преобразованием T , сохраняющим сигма-конечную меру, ассоциированы две замечательные конструкции преобразований вероятностного пространства: гауссовский автоморфизм $G(T)$ и пуассоновская надстройка $P(T)$. Они унитарно эквивалентны оператору $\bigoplus_{n=0}^{\infty} U^{\odot n}$, где U — оператор, отвечающий преобразованию T , $U^{\odot 0}$ — одномерный тождественный оператор, $U^{\odot n}$ — симметрическая тензорная степень оператора U . В силу эргодичности и «бесконечности» преобразования T спектральная мера оператора U непрерывна. Гауссовские и пуассоновские надстройки (см. [5], [8]) являются аналогами известных конструкций в теории представлений ([1], [3], [6]). Гауссовский автоморфизм G обладает континуальным централизатором (G является бесконечным декартовым произведением). Однако условие попарной спектральной дизъюнктивности степеней $U^{\odot n}$ для пуассоновской надстройки P влечет за собой свойство наследственности централизатора [8]. В частности, если централизатор такого преобразования T тривиален, то надстройка $P(T)$ тоже коммутирует только со своими степенями. В [2] построены перемешивающие преобразования ранга 1, для которых спектр оператора $\bigoplus_{n=1}^{\infty} U^{\odot n}$ прост. Таким образом, из [8] и результата нашей заметки вытекает, что пуассоновские надстройки этих преобразований обладают тривиальным централизатором, что контрастирует с континуальностью централизаторов соответствующих гауссовских надстроек.

Напомним определение преобразования ранга один. Сохраняющее меру обратимое преобразование $T: X \rightarrow X$ пространства Лебега (X, μ) имеет ранг 1, если существует последовательность измеримых разбиений $\xi_j = \{E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j-1}E_j, \tilde{E}_j\}$ пространства X , таких, что любое множество конечной меры с заданной точностью аппроксимируется ξ_j -измеримыми множествами для всех больших значений j .

Конструкция преобразования ранга 1 является переключиванием счетного числа интервалов. Она задана следующими параметрами: числом $h_1 \geq 1$, последовательностью r_j и последовательностью целочисленных векторов $(s_j(1), s_j(2), \dots, s_j(r_j - 1), s_j(r_j))$, $j \rightarrow \infty$. На шаге j определен набор непересекающихся интервалов $E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j-1}E_j$. Преобразование T является параллельным переносом интервалов, а на интервале $T^{h_j-1}E_j$ оно еще не определено. Разбиваем интервал E_j на r_j интервалов одинаковой меры: $E_j = E_j^1 \sqcup \dots \sqcup E_j^{r_j}$. К набору $E_j^i, TE_j^i, \dots, T^{h_j-1}E_j^i$ добавим $s_j(i)$ новых интервалов меры $\mu(E_j^i)$ для всех $i = 1, \dots, r_j$. Выпишем эти интервалы:

$$E_j^i, TE_j^i, T^2E_j^i, \dots, T^{h_j-1}E_j^i, T^{h_j}E_j^i, T^{h_j+1}E_j^i, \dots, T^{h_j+s_j(i)-1}E_j^i,$$

подразумевая, что преобразование T перекладывает эти интервалы. Обозначив E_{j+1} через E_j^1 , для всех $i < r_j$ положим $T^{h_j+s_j(i)}E_j^i = E_j^{i+1}$. Построения на этапе j закончены, теперь мы определили T как перекладывания интервалов

$$E_{j+1}, TE_{j+1}, T^2E_{j+1}, \dots, T^{h_{j+1}-1}E_{j+1},$$

где $h_{j+1} = h_j r_j + s_j(1) + s_j(2) + \dots + s_j(r_j)$.

Доопределяя шаг за шагом преобразование T и фазовое пространство X как объединение всех рассмотренных интервалов, получим на X обратимое преобразование T .

Для бесконечного преобразования (так мы называем обратимое преобразование, сохраняющее сигма-конечную меру) свойство перемешивания означает сходимость $\mu(T^z A \cap B) \rightarrow 0$ для любых множеств A, B конечной меры.

Примеры перемешивающих бесконечных преобразований ранга 1. Если $s_j(i) = h_j + i$, $i = 1, \dots, j = r_j$, то соответствующая конструкция будет бесконечной и перемешивающей [2].

Наиболее просто перемешивание устанавливается в случае так называемых сидоновских конструкций ранга 1 (см. [11]). Например, если потребовать выполнения условий $r_j \rightarrow \infty$ и $h_j \ll s_j(1) \ll \dots \ll s_j(r_j)$, то для ξ_k -измеримых множеств A, B конечной меры имеет место неравенство $\mu(A \cap T^m B) \leq \mu(A)/r_j$ для всех $m \in [h_j, h_{j+1}]$ при $j > k$. Отсюда вытекает, что $\mu(A \cap T^m B) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любых множеств A, B конечной меры.

Теорема. *Бесконечное перемешивающее преобразование T ранга один коммутирует только со своими степенями.*

Отметим, что предлагаемое доказательство использует технику аппроксимаций самоприсоединений [10], которая существенно отличается от техники работы [7].

Пусть обратимое сохраняющее меру преобразование S коммутирует с T . Рассмотрим меру Δ_S на $X \times X$, определенную равенством $\Delta_S = (\text{Id} \times S)\Delta$, где Δ — диагональная мера: $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$. Так как S коммутирует с T , то мера $\nu = \Delta_S$ удовлетворяет условию инвариантности $(T \times T)\nu = \nu$. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что $\nu = \Delta^k$ для некоторого целого k , где $\Delta^k = \Delta_{T^k}$.

Лемма. *Пусть $\nu = \Delta_S$, где S — обратимое сохраняющее меру преобразование, коммутирующее с перемешивающим преобразованием T ранга 1. Найдется последовательность $\{a_j^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, такая, что $a_j^k \geq 0$, $\sum_k a_j^k \leq 2$ и для любых измеримых множеств A, B конечной меры выполнено неравенство*

$$\nu(A \times B) \leq \limsup_j \sum_k a_j^k \Delta^k(A \times B).$$

Доказательство. Пусть множества A и B являются объединениями некоторых элементов набора $E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j}E_j$. При $k \in [0, h_j]$ число $N(k, A, B)$ положим равным количеству номеров i , $0 \leq i \leq h_j - k$, для которых произведение (блок) $T^i E_j \times T^{i+k} E_j$ лежит в $A \times B$. При $k \in [-1, -h_j]$ аналогично учитываются блоки вида $T^{i-k} E_j \times T^i E_j$. Положим

$$a_j^k = \frac{\nu(E_j \times T^k E_j)}{\mu(E_j)}, \quad k \in [0, h_j], \quad a_j^k = \frac{\nu(T^{-k} E_j \times E_j)}{\mu(E_j)}, \quad k \in [-h_j, -1].$$

Из проекционных свойств меры ν следует, что

$$\sum_{k=0}^{h_j} a_j^k = \sum_{k=0}^{h_j} \nu(E_j \times T^k E_j) / \mu(E_j) \leq \nu(E_j \times X) / \mu(E_j) = 1.$$

Аналогично получим $\sum_{k=-h_j}^0 a_j^k \leq 1$. Поэтому выполнено неравенство

$$\sum_{|k| \leq h_j} a_j^k \leq 2.$$

Обозначим через C_j^k следующие множества:

$$C_j^k = \begin{cases} \bigsqcup_{i=0}^{h_j-k} T^i E_j \times T^{i+k} E_j, & k \in [0, h_j], \\ \bigsqcup_{i=0}^{h_j+k} T^{i-k} E_j \times T^i E_j, & k \in [-1, -h_j]. \end{cases}$$

Заметим, что определенное выше значение $N(k, A, B)$ есть число блоков в пересечении $C_j^k \cap (A \times B)$. Обозначим через Δ_j^k меры, определенные равенством

$$\Delta_j^k(A \times B) = \Delta^k((A \times B) \cap C_j^k), \quad k \in [-h_j, h_j].$$

Из $T \times T$ -инвариантности меры следует, что

$$\nu(T^{-k+m} E_j \times T^m E_j) = \nu(T^{-k} E_j \times E_j),$$

поэтому

$$\nu(A \times B) = \mu(E_j) \sum_{|k| \leq h_j} a_j^k N(k, A, B) = \sum_{|k| \leq h_j} a_j^k \Delta_j^k(A \times B).$$

Выше мы предполагали, что множества A, B состоят из атомов разбиения ξ_j . Но для произвольных измеримых множеств A, B конечной меры

$$\sum_{|k| \leq h_j} a_j^k \Delta_j^k(A \times B) \rightarrow \nu(A \times B), \quad j \rightarrow \infty.$$

Действительно, приближая A, B с точностью до ε по мере μ множествами, являющимися ξ_j -измеримыми, получаем

$$\left| \nu(A \times B) - \sum_{|k| \leq h_j} a_j^k \Delta_j^k(A \times B) \right| < 4\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\nu(A \times B) = \lim_j \sum_k a_j^k \Delta_j^k(A \times B) \leq \limsup_j \sum_k a_j^k \Delta^k(A \times B).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Фиксируем множества A, B конечной меры, такие, что $\nu(A \times B) = \mu(A \cap SB) > 0$. Из леммы следует, что

$$\limsup_j \sum_k a_j^k \Delta^k(A \times B) > 0, \quad \sum_k a_j^k \leq 2.$$

Так как T перемешивает, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число M , такое, что для всех j

$$\sum_{|k|>M} a_j^k \Delta^k(A \times B) = \sum_{|k|>M} a_j^k \mu(T^k A \cap B) < \varepsilon.$$

Следовательно, для некоторого m последовательность a_j^m не стремится к 0 при $j \rightarrow \infty$. Но это означает, что $\nu \geq a \Delta^m$, $a > 0$. Поэтому меры $\nu = \Delta_S$ и Δ_{T^m} не являются взаимно сингулярными. Поскольку T — эргодическое преобразование (а таковым является всякое преобразование ранга 1), эти меры эргодичны относительно $T \times T$. Следовательно, $\Delta_S = \Delta_{T^m}$. Тем самым мы установили равенство $S = T^m$.

Замечание. На самом деле мы доказали, что любое самоприсоединение ν перемешивающего бесконечного преобразования T (в терминологии [12] полиморфизм, комутующий с T) является выпуклой комбинацией мер Δ_{T^i} . Такое свойство преобразования является аналогом свойства минимальных самоприсоединений (см. [9]). Известная теорема (см. [4]) утверждает, что централизатор преобразования вероятностного пространства ранга один лежит в слабом замыкании степеней этого преобразования. Вопрос Э. Руа об аналоге теоремы Дж. Кинга для бесконечных преобразований остается открытым. Мы установили его в случае перемешивания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, УМН, **30:6**(186) (1975), 3–50.
 [2] A. I. Danilenko, V. V. Ryzhikov, Ergodic Theory Dynam. Systems, **31:3** (2011), 853–873. [3] Р. С. Исмагилов, Функц. анализ и его прил., **9:2** (1975), 71–72. [4] J. L. King, Ergodic Theory Dynam. Systems, **6** (1986), 363–384. [5] M. Lemanczyk, F. Parreau, J.-P. Thouvenot, Fund. Math., **164:3** (2000), 253–293. [6] Ю. А. Неретин, Матем. сб., **188:11** (1997), 19–50. [7] D. Ornstein, in: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol. II, University of California Press, Berkley, 1972, 347–356. [8] E. Roy, Ergodic Theory Dynam. Systems, **29:2** (2009), 667–683. [9] D. J. Rudolph, J. Anal. Math., **35** (1979), 97–122. [10] В. В. Рыжиков, Матем. сб., **183:3** (1992), 133–160. [11] В. В. Рыжиков, Труды ММО, **75:1** (2014), 93–103. [12] A. M. Vershik, Discrete Contin. Dynam. Sys., **13** (2005), 1305–1324.

Московский государственный университет
e-mail: vryz@mail.ru

Université Pierre et Marie Curie, Paris VI
e-mail: jean-paul.thouvenot@upmc.fr

Поступила в редакцию
17 февраля 2014 г.

УДК 517.9

Нелокальные задачи для уравнений Власова–Пуассона в бесконечном цилиндре*

© 2015. А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

1. Уравнениям Власова посвящена обширная литература, см. [1]–[6], [8]–[13] и имеющуюся там библиографию. Вопрос о существовании классических и обобщенных решений задачи Коши, а также обобщенных решений смешанных задач

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-00265).