Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. В. Киссин, В. С. Шульман, Представления нильпотентных групп: расширения, нейтральные когомологии, пространства Понтрягина, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 79–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:39:05

В заключение автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. П. Паламонов, в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 72, ВИНТИ, М., 1991, 5–134. [2] В. В. Лебедев, Функц. анализ и его прил., **47:1** (2013), 33–46. [3] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Valued Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. [4] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980. [5] Hua Loo-keng, *Acta Sci. Sinica*, **1:1** (1952), 1–76. [6] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, Изв. АН СССР, сер. матем., **43:5** (1979), 971–1003. [7] И. А. Икромов, Матем. заметки, **87:5** (2010), 734–755. [8] L. Erdős, M. Salmhofer, *Math. Z.*, **257:2** (2007), 261–294. [9] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-заде, *Особенности дифференцируемых отображений, ч. 1. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982. [10] B. Randol, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 279–285. [11] I. Svensson, *Ark. Mat.*, **9:1** (1970), 11–22. [12] И. А. Икромов, Функц. анализ и его прил., **29:3** (1995), 16–24.

Самаркандский государственный университет
e-mail: ikromov1@rambler.ru

Поступила в редакцию
18 августа 2013 г.

УДК 512.5

Представления нильпотентных групп: расширения, нейтральные когомологии, пространства Понтрягина

© 2015. Э. В. Киссин, В. С. Шульман

1. Введение. Неприводимые унитарные представления нильпотентных групп привлекали внимание многих специалистов. Известно, что они либо одномерны, либо бесконечномерны; для нильпотентных групп Ли Кирилловым [3] разработан метод орбит, позволяющий во многих случаях получать конкретную и обозримую классификацию. Произвольные унитарные представления единственным образом раскладываются в прямые интегралы неприводимых.

В случае несимметричных представлений ситуация значительно менее определенная. По-прежнему неприводимые конечномерные представления одномерны (теорема Ли–Колчина [4]), но разложить произвольные представления в сумму неприводимых уже нельзя. Их можно раскладывать в сумму неразложимых представлений, но классификация последних обычно не представляется возможной.

Имеется естественная ситуация, в которой приходится изучать некоторую смесь конечномерных и унитарных представлений группы, — теория представлений групп в пространствах Понтрягина P_k . Как показал Наймарк [5], J -симметричное представление связной нильпотентной группы в P_k имеет инвариантное подпространство размерности k ; это позволяет рассматривать такие представления как специальные конструкции «симметризованных расширений» конечномерных представлений с помощью унитарных. Хотя проблема с конечномерной частью остается, она облегчается тем, что размерности возникающих

конечномерных компонент ограничены индексом индефинитности. В данной работе последовательно рассматриваются 1) условия разложимости представлений нильпотентных групп; 2) разложимость расширений конечномерных представлений с помощью унитарных и 3) строение Π_k -представлений.

2. Когомологии и расширения. Пусть λ и U — слабо непрерывные представления группы G в гильбертовых пространствах L и $\mathfrak{H}$ соответственно. Обозначим через $B(\mathfrak{H}, L)$ пространство ограниченных линейных операторов из $\mathfrak{H}$ в L , рассматриваемое как G -бимодуль. Когомологии группы с коэффициентами в $B(\mathfrak{H}, L)$ определяются стандартным образом (классический случай, чаще всего рассматриваемый в литературе, соответствует выбору в качестве λ тривиального представления ι в одномерном пространстве). В частности, 1-коцикл — это слабо непрерывная функция $\xi: G \rightarrow B(\mathfrak{H}, L)$, удовлетворяющая условию

$$\xi(gh) = \lambda(g)\xi(h) + \xi(g)U(h) \quad \text{для любых } g, h \in G.$$

Условие тривиальности 1-когомологий особенно важно для теории представлений, поскольку оно обеспечивает тривиальность расширений. Напомним, что расширением представления λ с помощью U называется любое представление, имеющее замкнутое инвариантное подпространство L , сужение на которое эквивалентно λ , а представление, индуцированное в факторпространстве, эквивалентно U . Расширение считается тривиальным, если L имеет инвариантное дополнение.

Стандартная конструкция расширений такова. Положим $\mathfrak{Z} = L \oplus \mathfrak{H}$. С каждым (λ, U) -коциклом ξ можно связать представление π на $\mathfrak{Z}$, действующее по правилу

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \lambda(g) & \xi(g) \\ 0 & U(g) \end{pmatrix} \quad \text{для } g \in G.$$

Оно является расширением представления λ с помощью U и обозначается через $\epsilon(\lambda, U, \xi)$. Для того чтобы расширение $\epsilon(\lambda, U, \xi)$ было тривиальным, необходимо и достаточно, чтобы коцикл ξ был кограницей.

Для $h \in G$ определим отображение $\text{ad}_h: G \rightarrow G$ формулой

$$\text{ad}_h(g) = ghg^{-1}h^{-1} \quad \text{для всех } g \in G.$$

Элемент h называется энгелевым, если для любого $g \in G$ найдется такой номер $n = n_g$, что $\text{ad}_h^n(g) = e$.

Теорема 1. Пусть λ и U — представления группы G . Если

$$\text{Sp}(\lambda(h)) \cap \text{Sp}(U(h)) = \emptyset \quad (1)$$

для некоторого энгелева элемента $h \in G$, то $\mathcal{H}^1(\lambda, U) = 0$.

Так как в нильпотентной группе все элементы энгелевы, то получаем следствие, играющее важную роль во всей работе:

Следствие 2. Пусть λ и U — представления связной нильпотентной группы G . Если $\text{Sp}(\lambda(h)) \cap \text{Sp}(U(h)) = \emptyset$ для некоторого $h \in G$, то $\mathcal{H}^1(\lambda, U) = 0$.

Следствие 3. Пусть π — представление связной нильпотентной группы в банаховом пространстве X , и пусть L — замкнутое инвариантное подпространство для π . Пусть $\lambda = \pi|_L$, а U — представление, индуцируемое в X/L . Если для некоторого $h \in G$ выполнено условие (1), то Y имеет инвариантное дополнение в X .

Легко видеть, что этот результат не переносится на разрешимые группы.

Пусть χ — характер группы G (т. е. мультипликативный функционал на G). Будем говорить, что χ присоединен к представлению λ , если $\lambda(g)x = \chi(g)x$ для некоторого вектора $x \neq 0$ и всех $g \in G$. Множество всех характеров, присоединенных к λ , обозначим через $\text{sign}(\lambda)$. Будем называть представление λ *монотетическим*, если $\text{sign}(\lambda)$ одноточечное. Следующий (безусловно, известный, но неизвестно где опубликованный) результат немедленно вытекает из теоремы Ли и следствия 3.

Следствие 4. *Всякое конечномерное представление связной нильпотентной группы является прямой суммой монотетических представлений.*

Везде ниже группа G предполагается связной и нильпотентной.

Пусть λ — представление группы G в конечномерном пространстве L , U — ее унитарное представление в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а ξ — некоторый (λ, U) -коцикл.

Теорема 5. *Пусть $\pi = \epsilon(\lambda, U, \xi)$ — представление группы G в $\mathfrak{Z} = L \dot{+} \mathfrak{H}$, причем $\dim \mathfrak{H} = \infty$.*

Существуют замкнутые π -инвариантные подпространства $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$, такие, что

$$\mathfrak{Z} = X_n \dot{+} Y_n, \quad X_{n+1} \subset X_n, \quad Y_n \subset Y_{n+1} \quad \text{для любого } n,$$

все представления $\pi|_{Y_n}$ подобны унитарным, каждое подпространство X_n содержит L , причем пересечение всех X_n конечномерно, а замыкание объединения всех Y_n имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{Z}$.

Следствие 6. *Если представление $\epsilon(\lambda, U, \xi)$ не раскладывается в прямую сумму двух подпредставлений, то $\dim \mathfrak{H} < \infty$, $\text{sign}(\lambda) = \{\chi\}$ и $U = \chi \mathbf{1}_{\mathfrak{H}}$.*

Изучая представления групп в пространствах с индефинитной метрикой, Исмагилов [1] ввел в рассмотрение специальный класс коциклов, к рассмотрению которого мы сейчас переходим. Обозначим через $\lambda^\sharp$ представление, сопряженное к λ : $\lambda^\sharp(g) = \lambda(g^{-1})^*$. Пусть $C(\mathfrak{H}, L)$ — пространство непрерывных отображений из G в $B(\mathfrak{H}, L)$. Для любого $c \in C(\mathfrak{H}, L)$ определим отображение $c^\sharp(g) \in C(L, \mathfrak{H})$, полагая $c^\sharp(g) = c(g^{-1})^*$.

Ясно, что если ξ есть (λ, U) -коцикл, то $\xi^\sharp$ есть $(U, \lambda^\sharp)$ -коцикл, а отображение $\xi\xi^\sharp: G \times G \rightarrow B(L)$, определенное равенством $\xi\xi^\sharp(g, h) = \xi(g)\xi^\sharp(h)$, является $(\lambda, \lambda^\sharp)$ -2-коциклом. Будем называть коцикл ξ *нейтральным*, если $\xi\xi^\sharp$ — когранично, т. е. если существует такое отображение $\gamma \in C(L, L)$ (*предель* коцикла ξ), что

$$\xi(g)\xi^\sharp(h) = (d_{\lambda, \lambda^\sharp}^1 \gamma)(g, h) = \lambda(g)\gamma(h) - \gamma(gh) + \gamma(g)\lambda^\sharp(h).$$

Множество всех нейтральных коциклов обозначим через $\mathcal{Z}_\nu^1(\lambda, U)$. Можно показать, что коцикл, когомологичный нейтральному, нейтрален; поэтому естественно определяется множество $\mathcal{H}_\nu^1(\lambda, U)$ нейтральных 1-когомологий. Оно не всегда является подгруппой в $\mathcal{H}^1(\lambda, U)$ и может быть весьма сложно устроено даже в случае, когда $\lambda = \iota$, а $U = \iota_m$, представление единичными операторами в $\mathbb{C}^m$. Так, для группы $G = T_n$ верхнетреугольных $n \times n$ -матриц с единицами на диагонали точное описание нейтральных 1- (ι, ι_m) -когомологий (= коциклов), выглядит следующим образом.

Пусть A — такая $m \times (n-1)$ -матрица, что для $B = A^*A = (b_{ij})$ выполнены условия

$$\text{Im } b_{ij} = 0 \quad \text{при } |i - j| > 1;$$

тогда $\xi(g) = A(g_{12}, \dots, g_{n-1,n})^T$ — нейтральный (ι, ι_m) -коцикл и все нейтральные коциклы имеют такой вид.

Следующий важный для дальнейшего результат утверждает, что для широкого класса представлений множество $\mathcal{H}_\nu^1(\lambda, U)$ является массивным.

Теорема 7. Пусть G — связная локально компактная нильпотентная группа, а U — ее унитарное представление, слабо содержащее, но не содержащее ι . Тогда нейтральные (ι, U) -коциклы плотны в пространстве $\mathcal{Z}^1(\iota, U)$ всех 1-коциклов относительно топологии равномерной сходимости на компактах.

3. J -унитарные представления в Π_k . Напомним, что пространство Понтрягина Π_k — это пространство H с индефинитным скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$, допускающее разложение в прямую сумму отрицательного подпространства размерности k и подпространства, являющегося гильбертовым пространством относительно $[\cdot, \cdot]$. Оператор, действующий в H , называется J -унитарным, если он обратим и сохраняет $[\cdot, \cdot]$. J -унитарное представление группы G в H — это гомоморфизм группы G в группу всех J -унитарных операторов.

По уже упоминавшейся во введении теореме М. А. Наймарка всякое J -унитарное представление связной нильпотентной группы в Π_k имеет неположительное инвариантное подпространство размерности k . Если это подпространство отрицательно, то представление подобно унитарному. Поэтому интерес представляют лишь те представления, которые имеют инвариантные нейтральные (т.е. состоящие из таких векторов x , что $[x, x] = 0$) подпространства.

В дальнейшем через L обозначается максимальное инвариантное нейтральное подпространство представления π . Его J -ортогональное дополнение $L^{[\perp]}$ также инвариантно, однако разложение $H = L[+]L^{[\perp]}$ уже неверно, более того, $L \subset L^{[\perp]}$. Мы выбираем замкнутое подпространство $\mathfrak{H} \subset L^{[\perp]}$, дополнительное к L , и нейтральное подпространство $M \subset H$, дополнительное к $L^{[\perp]}$; тогда блок-матричная запись представления относительно разложения $H = L \oplus \mathfrak{H} \oplus M$ имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} \lambda & \xi & \gamma \\ 0 & U & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь представление U в $\mathfrak{H}$ подобно унитарному (и становится унитарным после изменения скалярного произведения на $\mathfrak{H}$), ξ — это (λ, U) -коцикл, $\mu(g) = \lambda(g^{-1})^*$, $\eta(g) = \xi(g^{-1})^*$, $\gamma(g)^* = \gamma(g^{-1})$, причем

$$\gamma(gh) = \lambda(g)\gamma(h) + \xi(g)\eta(h) + \gamma(g)\mu(h).$$

Мы видим, что коцикл ξ нейтрален и $-\gamma$ — его предцепь. Обратно, имея нейтральный коцикл и выбирая предцепь, можно построить J -унитарное представление. Это позволяет применять результаты о расширениях в теории Π_k -представлений. Перечислим некоторые из этих применений. Напомним, что группа G предполагается связной и нильпотентной.

Теорема 8. Пусть L — нейтральное инвариантное подпространство J -унитарного представления π . Существует убывающая последовательность H_m замкнутых инвариантных подпространств, содержащих L , такая, что все $H_m^{[\perp]}$ положительны и $\bigcap_m H_m$ конечномерно.

Этот факт (аппроксимативная расщепляемость) можно рассматривать как вариант разложимости произвольного представления в «прямую сумму» последовательности унитарных представлений (в $E_k = H_{k-1} \oplus H_k$) и представления в конечномерном (возможно, вырожденном) подпространстве $\bigcap_m H_m$. Отметим, что для группы Лоренца подобный результат был получен в [2].

Представляет интерес и другой вариант разложимости (уже в конечную J -ортогональную прямую сумму). Будем называть представление в P_k -пространстве H Π -разложимым, если $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 и H_2 инвариантны и не положительны. В противном случае скажем, что представление Π -неразложимо. Ясно, что всякое представление является прямой суммой конечного числа Π -неразложимых. Для представлений в конечномерных пространствах такое разложение единственно (с точностью до изоморфизма), а в общем случае ответ пока не известен. Вопрос о классификации конечномерных Π -неразложимых представлений тоже пока далек от полного решения.

Назовем представление примарным, если его сужение на максимальное инвариантное нейтральное подпространство монотетично. Следующий результат является ответом на один из вопросов, которые привели к появлению данной работы.

Теорема 9. (i) *Если группа G коммутативна, то все ее Π -неразложимые представления примарны.*

(ii) *Существует Π -неразложимое представление группы Гейзенберга T_3 , не являющееся примарным.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. С. Исмагилов, Матем. заметки, **35**:1 (99–105). [2] Р. С. Исмагилов, Изв. АН СССР, сер. матем., **30**:3 (1966), 497–522. [3] А. А. Кириллов, Функц. анализ и его прил., **2**:1 (1968), 96–98. [4] E. R. Kolchin, Ann. of Math., **49**:1 (1948), 1–42. [5] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **27**:6 (1963), 1181–1185.

STORM, London Metropolitan University
e-mail: e.kissin@londonmet.ac.uk

Поступила в редакцию
27 августа 2014 г.

Вологодский государственный университет
e-mail: shulman.victor80@gmail.com

УДК 517.5

Неравенство Никольского и функциональные классы на компактных группах Ли*

© 2015. Е. Д. НУРСУЛТАНОВ, М. В. РУЖАНСКИЙ, С. Ю. ТИХОНОВ

1. Введение. Классическое неравенство Никольского для тригонометрических полиномов T_L степени не выше, чем L , записывается следующим образом [7]:

$$\|T_L\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq 2L^{1/p-1/q} \|T_L\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

*Первый автор был поддержан грантами МОН РК 4080 ГФ-4, 3311 ГФ-4. Второй автор был поддержан EPSRC Leadership Fellowship, EPSRC грант EP/K039407/1, и Leverhulme Grant RPG-2014-02. Третий автор был поддержан грантами 2014-SGR-289 от AGAUR (Generalitat de Catalunya), MTM2014-59174-P и РФФИ-13-01-00043.