Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Черлин, Графы Хенсона и графы Урысона–Хенсона как графы Кэли, *Функц. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 3, 41–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:05:40

Графы Хенсона и Урысона–Хенсона как графы Кэли*

© 2015. Г. ЧЕРЛИН

Посвящается 80-летию профессора Анатолия Вершика

Мы рассматриваем группы, действующие регулярно на графах Хенсона Γ_n , отвечая на вопрос Питера Камерона, а также изучаем смежные вопросы.

Введение

Работа Камерона [1] содержит обзор известных результатов (в частности, из статьи [2]), а также предоставляет обширный материал, связанный со следующей проблемой¹⁾.

Проблема. *Для каких пар (G, Γ) , состоящих из счетно бесконечной группы G и однородной структуры Γ , существует вложение группы G как регулярной подгруппы в группу автоморфизмов $\text{Aut}(\Gamma)$? Иначе говоря, когда можно на графе Кэли группы G ввести однородную структуру Γ , инвариантную относительно левого действия группы G ?*

Возникают и многие другие интересные открытые вопросы, среди них ([1, с. 751]) вопрос, может ли общий K_n -свободный граф, называемый графом Хенсона²⁾ Γ_n , быть графом Кэли бесконечной группы при $n \geq 4$. Рассуждение Хенсона показывает, что эта группа не может быть абелевой. Мы показываем здесь, непосредственно используя анализ Камерона, что граф Кэли свободной группы бесконечного ранга (т. е. бесконечное дерево) может быть снабжен однородной левоинвариантной Γ_n -структурой. Далее мы исследуем вопрос, к каким группам применимо это рассуждение, и обобщаем его на более широкий комбинаторный контекст.

*Исследование поддержано институтом Хаусдорфа, Бонн, осень 2013, и NSF DMS-1101597. Результаты были изложены в препринте института Хаусдорфа, Бонн.

¹⁾ В статье используется терминология теории моделей и теории амальгамирования Фраиссе. Структура называется *однородной*, если любой изоморфизм между конечными подструктурами продолжается до автоморфизма всей структуры. *Универсальным метрическим пространством Урысона*, введенным П. С. Урысоном в 1924 г., называется полное сепарабельное метрическое пространство, которое содержит изометрический образ любого метрического сепарабельного пространства (универсальность) и обладает свойством однородности: произвольная изометрия любых двух изометричных компактных подмножеств продолжается до глобальной изометрии пространства. Подробнее о пространстве Урысона см. оригинальную работу [10] или более современное изложение — А. М. Вершик, УМН, **59:2** (2004), 65–104. Теория Фраиссе, знание которой не обязательно для понимания данной статьи, изложена, например, в [8] или во введении к [4].

²⁾ *Графом Хенсона Γ_n (или общим K_n -свободным графом)* называется счетный граф, не содержащий полного подграфа с n вершинами и обладающий двумя свойствами: 1) универсальности: Γ_n содержит подграф, изоморфный произвольному конечному графу, не содержащему полного подграфа с n вершинами; 2) однородности: группа $\text{Aut}(\Gamma_n)$ всех автоморфизмов графа Γ_n действует транзитивно на множестве всех конечных его подграфов, которые изоморфны некоторому подграфу.

Существование регулярного действия свободной группы будет показано в § 1. В § 2 мы обобщим результаты Хенсона для абелевых групп на класс групп с центром конечного индекса; мы воспользуемся более общим подходом к результату Хенсона, предложенным Камероном. Хотелось бы думать, что те же результаты применимы и к случаю, когда имеется абелева подгруппа конечного индекса, но мы не смогли рассмотреть случай даже бесконечной диэдральной группы.

В § 3 мы покажем, что свободная нильпотентная группа класса 2 бесконечного ранга действует свободно на графах Хенсона. Как было сказано выше, абелева группа таким действием не обладает. Таким образом, разрыв между положительными и отрицательными результатами не слишком велик. Мы излагаем этот результат в весьма общем виде, не только для графов Хенсона, но и для однородных структур в языке с конечным числом отношений, для которых подструктуры замкнуты относительно свободного амальгамирования.

В § 4 мы рассматриваем абелевы действия на ориентированных графах хенсоновского типа, а также нормальные регулярные действия в смысле Камерона, упоминаемые в § 2.

Нашей отправной точкой была работа Камерона–Вершика [3], в которой рассматривается однородное метрическое пространство Урысона. В последние годы мы занимались попыткой классификации однородных метрических графов, т. е. графов, являющихся однородными как метрические пространства в метрике графа. Примерами таких пространств являются графы Хенсона и целозначные аналоги пространства Урысона, а также их комбинация, которую можно называть графом (или пространством) Урысона–Хенсона. В § 5 даны несколько замечаний о проблеме нахождения регулярных действий групп на однородных метрических графах. Этот вопрос также обсуждается в [1, § 9] для более ограничительного понятия графа Урысона–Хенсона.

С благодарностью отмечу, что мой интерес к этим (и многим другим) вещам стимулирован разговорами с профессором Вершиком в институте Хаусдорфа (Бонн) в осеннем семестре 2013 г. о работе [3] и более современных работах.

§ 1. Регулярные действия свободных групп

Ниже приведен результат, обобщение которого будет дано в § 3. Читатель, бегло просматривающий статью, может пропустить изложенное здесь доказательство, однако основная идея представлена в нем в наиболее чистом виде.

Предложение 1. *Существует регулярное действие свободной группы F_ω бесконечного (счетного) ранга на общем K_n -свободном графе G_n (графе Хенсона).*

Определение. Пусть G — группа и S — симметричное подмножество в $G^\#$, где $G^\# = G \setminus \{1\}$. *Графом Кэли*, заданным парой (G, S) , называется граф на множестве вершин G со следующим множеством ребер:

$$\{(g, h) \mid h^{-1}g \in S\}.$$

Заметим, что этот граф инвариантен относительно умножения слева на элементы из G , т. е. группа G действует на нем умножением слева (левыми сдвигами) как группа автоморфизмов. Говоря нестрого, мы также можем назвать граф, индуцированный на подмножестве $X \subseteq G$, графом Кэли, заданным парой (X, S) .

Доказательство предложения 1. Нам необходимо построить подходящий граф Кэли на группе G , т. е. найти подходящее симметричное подмножество S множества $G^\#$. Мы предполагаем, что читатель знаком со свойствами расширения, характеризующими графы Хенсона, а именно со следующими свойствами графа: для любых двух непересекающихся конечных подмножеств A и B графа, таких, что одно из них, например, A , не содержит полных подграфов с $n - 1$ вершинами, существует такая вершина c графа, которая соединена со всеми вершинами подмножества A и не соединена ни с одной вершиной множества B . Счетный граф с таким свойством единствен с точностью до изоморфизма и является универсальным графом без полных подграфов с n вершинами, т. е. графом Хенсона Γ_n . Например, граф Γ_3 есть универсальный граф без треугольников. (См. [9], условие (A) на с. 74, [5, §3] или введение в [7].)

Мы предполагаем, что в F_ω выделена последовательность свободных образующих, и, таким образом, мы можем обозначить через F_k подгруппу в F_ω ранга k , порожденную первыми k выделенными образующими.

Мы строим множество S , аппроксимируя его конечными подмножествами. Шаг нашей конструкции выглядит так.

Конструкция. Пусть задано конечное симметричное подмножество S множества $F_k^\# \subseteq F_\omega$ и конечное подмножество U множества F_k , являющееся K_{n-1} -свободным в индуцированном графе, заданном парой (F_k, S) . Возьмем произвольный элемент $g \in F_{k+1} \setminus F_k$ и положим

$$S' = S \cup (g^{-1}U) \cup (U^{-1}g).$$

Мы утверждаем, что

- (1) $S' \cap F_k = S$,
- (2) $gS' \cap F_k = U$,
- (3) граф, заданный парой (F_{k+1}, S') , K_n -свободен.

Пункты (1) и (2) ясны. Они утверждают, что графы Кэли на F_k , индуцированные множествами S и S' , совпадают и что граф Кэли на F_{k+1} , заданный множеством S' , обладает одним из требуемых свойств расширения, а именно тем, в котором множество соседних вершин элемента g в F_k совпадает с U . Для других групп это последнее свойство может быть весьма тонким даже для случайного графа.

Доказав оставшийся третий пункт, мы сможем построить требуемое бесконечное симметричное подмножество $S \subseteq F_\omega$ шаг за шагом таким образом, что граф Кэли, заданный парой (F_ω, S) , будет K_n -свободным и будет обладать свойством расширения для графа Хенсона Γ_n . Таким образом, полученный граф Кэли будет изоморфен графу Хенсона Γ_n .

Перейдем к доказательству оставшегося п. (3).

Предположим, что в графе Кэли, заданном парой (F_{k+1}, S') , есть n -клика K . Домножив слева на элемент группы, не умаляя общности, предположим, что n -клика K содержит вершину g . Тогда $K \subseteq \{g\} \cup gS \cup U \cup gU^{-1}g$.

Какие ребра могут соединять два из множеств вершин gS , U и $gU^{-1}g$? Ребра (gs, u) , $(gs, gu^{-1}g)$, $(u_1, gu_2^{-1}g)$ будут соответствовать элементам

$$u^{-1}gs, s^{-1}u^{-1}g, u_1^{-1}gu_2^{-1}g \in S'.$$

Так как ни один из них не может принадлежать S , мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}(gS, U) : \quad u^{-1}gs &= (g^{-1}u')^{\pm 1}, \\ (gS, gU^{-1}g) : \quad s^{-1}u^{-1}g &= (g^{-1}u')^{\pm 1}, \\ (U, gU^{-1}g) : \quad u_1^{-1}gu_2^{-1}g &= (g^{-1}u')^{\pm 1}.\end{aligned}$$

Последнее равенство невозможно, а значит, невозможно и первое, так как $s \neq 1$. Второе сводится к равенству $s^{-1}u^{-1} = u'^{-1}$, или к $u' = us$.

Значит, если K пересекает U , то K содержится в $U \cup \{g\}$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, K содержится в $\{g\} \cup gS \cup gU^{-1}g$; применив сдвиг, мы можем предположить, что

$$K \subseteq S \cup \{1\} \cup U^{-1}g.$$

Так как индуцированный граф на F_k является K_n -свободным, K должна пересекать $U^{-1}g$.

Наличие ребра в $U^{-1}g$ влечет за собой включение вида $g^{-1}u_1u_2^{-1}g \in S'$, где $u_1 \neq u_2$, а это невозможно. Поэтому K должна иметь вид

$$\{1, u^{-1}g\} \cup S_0,$$

где $S_0 \subseteq S$. Аналогичное рассуждение для ребер $(u^{-1}g, s)$ при $s \in S_0$ показывает, что

$$uS_0 \subseteq U.$$

Из того, что S_0 является кликой, следует, что и $\{u\} \cup uS_0$ есть $(n-1)$ -клика в U , что дает противоречие.

§2. Ограничения: абелевы и почти абелевы группы

Хенсон представил рассуждение (в случае группы $\mathbb{Z}$), которое показывает, что ни одна абелева группа не может регулярно действовать на графе Хенсона Γ_n при $n \geq 4$. Камерон показал, что такое же рассуждение применимо и ко всем *регулярным нормальным действиям* произвольных групп.

Мы называем действие *регулярным нормальным*, если и левые, и правые сдвиги сохраняют структуру графа или, что эквивалентно, если левые сдвиги и сопряжение сохраняют структуру графа.

Мы обобщаем результат Хенсона на случай, когда центр группы имеет конечный индекс. С точки зрения Камерона подходящим обобщением этого результата является результат о регулярном действии группы G , в котором некоторая подгруппа H конечного индекса действует нормально. (Отметим, что мы рассматриваем действие подгруппы H на всей группе G .)

Лемма. Пусть G — группа с подгруппой H конечного индекса. Тогда G не обладает регулярным H -нормальным действием на Γ_n ни для какого $n \geq 4$.

В частности, если центр группы G имеет конечный индекс, то G не обладает регулярным действием на Γ_n .

Мы принимаем соглашение, что вся группа G действует слева.

Доказательство. Предполагая, что G обладает регулярным H -нормальным действием на Γ , мы можем не различать Γ и G . Так как Γ_n неделим [6], граф,

индуцированный на H , содержит копию графа Γ_n . В частности, граф, индуцированный на соседях элемента 1 в H , содержит копию графа Γ_{n-1} .

Мы следуем конструкции Хенсона из [9].

Рассмотрим клику $K \cup \{1\}$ порядка $n - 1$ в H .

Утверждение. Существует $h \in H$, соединенный ребром с 1, такой, что $K \cup Kh$ является K_{n-1} -свободным.

Пусть $X = \{k_2^{-1}k_1 \mid k_1, k_2 \in K (k_1 \neq k_2)\}$. Так как K — клика, X содержится в множестве соседей элемента 1.

Пусть Δ_1 — множество соседей элемента 1 в H , и пусть Δ'_1 обозначает множество соседей всех вершин $x \in X$ в Δ_1 . Граф, индуцированный на Δ_1 , содержит копию графа Γ_{n-1} , а граф, индуцированный на Δ'_1 , является конечным объединением графов, не содержащих K_{n-2} . Тогда $\Delta_1 \setminus \Delta'_1$ бесконечно.

Любой элемент $h \in \Delta_1 \setminus \Delta'_1$ является соседом элемента 1, а пары $(k_1, k_2h) = k_2(k_2^{-1}k_1, h)$ не являются ребрами при $k_1 \neq k_2$. Так как $n \geq 4$, из этого следует, что $K \cup Kh$ является K_{n-1} -свободным.

Это доказывает утверждение.

Зафиксируем такое h , как в предыдущем утверждении. Тогда существует элемент $g \in G$, соединенный ребром с каким-то элементом из $K \cup Kh$. Покажем, что

$$K \cup \{g, gh^{-1}\}$$

является n -кликой, а это приведет к противоречию.

Поскольку K является кликой, применив правую H -инвариантность, в силу выбора элемента g получаем, что K соединена ребрами и с g , и с gh^{-1} .

Наконец, заметив, что $(g, gh^{-1}) = gh^{-1}(h, 1)$ является ребром, мы приходим к противоречию. $\square$

Было бы правильнее исключить из рассмотрения абелевы подгруппы конечного индекса (иными словами, те действия, при которых подгруппа конечного индекса действует нормально на себе).

Проблема 1. *Может ли бесконечная абелева группа действовать регулярно на графе Γ_n с $n \geq 4$? В частности, может ли так действовать бесконечная диздральная группа?*

Это подсказывает также следующий вопрос:

Проблема 2. *Может ли K_n -свободный граф с транзитивным действием группы автоморфизмов содержать граф Γ_n , не будучи изоморфным ему?*

К сожалению, это кажется вполне возможным. Но если это не так, то из этого должно легко следовать, что группа с абелевой подгруппой конечного индекса не может действовать регулярно на Γ_n при $n \geq 4$.

При переходе к более техническим рассуждениям полезно вместо центра рассматривать FC -центр, т. е. подгруппу элементов, централизаторы которых имеют конечный индекс, или, иными словами, подгруппу, состоящую из элементов конечных классов сопряженности (поясним, что аббревиатура FC является сокращением от слов «finite» (конечный) и «conjugacy» (сопряженность)).

Проблема 3. *Верно ли, что группа с FC -центром конечного индекса не может действовать регулярно на графе Хенсона Γ_n при $n \geq 4$? В частности, можно ли это доказать для группы, совпадающей со своим FC -центром?*

В следующем параграфе мы увидим, что в предположении, что FC -центр имеет бесконечный индекс, можно сформулировать положительные результаты, и, таким образом, несмотря на ее технический характер, эта проблема может оказаться весьма существенной.

§3. Нильпотентные группы

Наша цель — существенно обобщить предложение 1. С точки зрения теории групп, мы хотим получить результат, охватывающий свободную нильпотентную группу класса нильпотентности 2 с бесконечным числом образующих. Мы также хотим получить обобщение на более широкий класс однородных структур, а именно, структур, определенных в языке из конечного числа двуместных отношений и замкнутых относительно свободного амальгамирования. Здесь под свободной амальгамой двух структур B, C над подструктурой A мы понимаем их несвязное объединение над этой подструктурой, причем как элементов, так и отношений.

Хотя мы не ограничиваемся рассмотрением *симметричных* двуместных отношений, но операция свободного амальгамирования симметрична.

Мы знаем из анализа Камерона [1], что множества

$$S(a_1, \dots, a_n) = \{x \in G \mid a_1^{-1} x a_2^{-1} x \cdots a_n^{-1} x = 1\}$$

играют специальную роль в теории регулярных действий, во всяком случае для $n \leq 3$ (также как и классы сопряженности $C(a, b) = \{x \mid a^x = b\}$, но в них нет столь явной необходимости).

Вот наше обобщение предложения 1.

Предложение 2. Пусть G — счетная группа и Γ — однородная структура, заданная двуместными отношениями, такая, что класс ее конечных подструктур замкнут относительно свободного амальгамирования. Пусть G удовлетворяет следующим условиям:

- FC -центр N в G имеет бесконечный индекс;
- G не является конечным объединением множеств следующих типов:
 - классов смежности по подгруппам бесконечного индекса;
 - множеств $S(a, b)$ (если все отношения на Γ симметричны, множества $S(a, a)$ можно опустить);
 - множеств $S(a, b, c)$.

Тогда существует регулярное действие группы G на Γ .

Для читателя, лишь просматривающего статью, отметим, что обсуждение FC -центра находится в конце последнего параграфа. Следует отметить также лемму Неймана, часто используемую во многих схожих контекстах: группа не может быть объединением конечного числа классов смежности по подгруппам бесконечного индекса. В случаях, когда не слишком понятны множества $S(a, b)$ и $S(a, b, c)$ содержатся каждое в объединении конечного числа классов смежности по подгруппам бесконечного индекса, лемма Неймана показывает, что наши предположения выполнены.

Доказательство во многом похоже на доказательство исходного случая, но требует существенно большего количества деталей, а также внимания для того, чтобы избежать FC -центра. Сначала выведем следствие.

Следствие. Пусть G — счетная группа, а Γ — однородная транзитивная структура, заданная двуместными отношениями, такая, что класс ее конечных подструктур замкнут относительно свободного амальгамирования.

Пусть G удовлетворяет следующим условиям:

- FC -центр N в G имеет бесконечный индекс;
- в факторе $\bar{G} = G/N$ множества $S(\bar{a}, \bar{b})$ и $S(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ всегда конечны.

Тогда G действует регулярно на Γ .

Доказательство. Множества $S(a, b)$ и $S(a, b, c)$ лежат в прообразе соответствующих множеств $S(\bar{a}, \bar{b})$ и $S(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в $\bar{G}$, так что исключительные в смысле предложения 2 множества содержатся в объединениях конечного числа классов смежности по подгруппам бесконечного индекса. Как отмечено выше, применима лемма Неймана. $\square$

Применение. В частности, вопреки нашим первоначальным ожиданиям, существует класс нильпотентных групп, регулярно действующих на всех графах Хенсона Γ_n . А именно, пусть G — нильпотентная группа класса нильпотентности 2. Предположим, что выполнены следующие условия:

- FC -центр группы G является ее центром $Z(G)$;
- $G/Z(G)$ бесконечна и не содержит элементов порядка 2 или 3.

Тогда G действует регулярно на всех Γ_n .

Доказательство предложения 2. Мы будем строить действие, осуществляя приближение с помощью конечных подструктур, но с некоторой осторожностью, необходимой, чтобы предотвратить появление элементов FC -центра N в качестве ребер.

Термин «графы Кэли» теперь должен быть заменен на «структуры Кэли». После чего мы рассуждаем так же, как и для графов, но при более сложных обозначениях. Но для наших целей, так как мы имеем дело исключительно с конечными приближениями, разумней начать с понятия G -фрагмента, определенного следующим образом, учитывающим наши опасения по поводу FC -центра N .

G -фрагмент состоит из конечной структуры

$$(\Delta, (\Delta_R)_{R \in L})$$

со следующими свойствами:

- (1) $1 \in \Delta = \Delta^{-1} \subseteq G$;
- (2) Δ_R — подмножество в Δ для $R \in L$;
- (3) $\Delta_R \cap N = \emptyset$ для $R \in L$.

Мы обозначаем через Δ и сам G -фрагмент, и его множество-носитель. Соотнесем с G -фрагментом Δ следующую G -инвариантную структуру на G в языке L , состоящем из двуместных отношений:

$$\begin{aligned} G_\Delta &= (G, (R_\Delta)_{R \in L}), \\ R_\Delta(x, y) &\iff x^{-1}y \in \Delta_R. \end{aligned}$$

Также рассмотрим индуцированную структуру на Δ , которую обозначим через $\bar{\Delta}$,

$$\bar{\Delta} = G_\Delta \upharpoonright \Delta.$$

Назовем G -фрагмент Γ -допустимым, если

- (4) $\bar{\Delta}$ вкладывается в Γ .

Выберем последовательность Γ -допустимых G -фрагментов Δ , объединение которых наделяет группу G G -инвариантной структурой, изоморфной структуре Γ .

Утверждение 1. Если Δ является Γ -допустимым G -фрагментом, то G_Δ вкладывается в Γ .

Здесь мы используем понятие клики в более общем случае: под кликой мы понимаем клику относительно понятия инцидентности, определенного как объединение отношений R в L . Поскольку конечные подструктуры структуры Γ замкнуты относительно свободного амальгамирования, если G_Δ не вкладывается в Γ , то некоторая конечная клика C вкладывается в G_Δ , но не в Γ .

Сдвигая C , если необходимо, мы можем предполагать, что единица 1 принадлежит C . Так как C — клика и все множества Δ_R содержатся в Δ , C содержится в Δ , а значит, C вкладывается в $\bar{\Delta}$, что противоречит Γ -допустимости.

Это доказывает утверждение 1.

Из этого утверждения следует, что мы можем расширить любой допустимый G -фрагмент Δ до большего допустимого фрагмента, содержащего любой наперед заданный элемент группы G . Это связано с одним из ограничений на нашу конструкцию, а именно, с тем, что входящие в нее G -фрагменты должны исчерпывать G .

Далее мы переходим к нашему главному утверждению, свойству расширения для допустимых G -фрагментов. Но сначала введем обозначения, используемые в главной конструкции.

Конструкция. Пусть Δ есть G -фрагмент, и пусть $B = \bar{\Delta} \cup \{b\}$ — расширение структуры $\bar{\Delta}$ одной дополнительной вершиной, где B также является L -структурой. Пусть $h \in G$ задан. Введем следующие обозначения:

$$\Delta' = \Delta \cup (h^{-1}\Delta) \cup (\Delta^{-1}h),$$

$$\Delta_R^+ = \{a \in \Delta \mid R(b, a) \text{ верно в } B\}, \quad \Delta_R^- = \{a \in \Delta \mid R(a, b) \text{ верно в } B\},$$

$$\Delta'_R = \Delta_R \cup (h^{-1}\Delta_R^+) \cup ((\Delta_R^-)^{-1}h).$$

Здесь главное, конечно, — правильно выбрать элемент h .

Утверждение 2. Пусть Δ есть Γ -допустимый G -фрагмент, и пусть $B = \bar{\Delta} \cup \{b\}$ — расширение структуры $\bar{\Delta}$ одной дополнительной вершиной. Предположим, что B вкладывается в Γ . Тогда имеется элемент h , такой, что расширение $(\Delta', (\Delta'_R)_{R \in L})$ обладает следующими свойствами:

$$(2.1) \quad \Delta' \text{ является } G\text{-фрагментом,}$$

$$(2.2) \quad \bar{\Delta}' \upharpoonright (\Delta \cup \{h\}) \cong B \text{ над } \bar{\Delta},$$

$$(2.3) \quad \Delta' \text{ } \Gamma\text{-допустим.}$$

Утверждения 1 (или же следующего за ним замечания) вместе с утверждением 2 достаточно, чтобы при помощи последовательных конечных приближений построить G -инвариантную структуру на G , изоморфную Γ . Таким образом, достаточно доказать утверждение 2.

В каждом случае мы должны показать, что элементы h , для которых не выполнено одно из условий (2.1)–(2.3), лежат в конечном числе *исключительных множеств*, т. е. классов смежности по подгруппам бесконечного индекса и подмножеств $S(a, b)$ или $S(a, b, c)$.

Рассмотрим условия (2.1)–(2.3) по порядку.

(2.1) Это условие означает, что $\Delta'_R \cap N = \emptyset$ для всех R . Достаточно показать, что

$$(h^{-1}\Delta \cup \Delta^{-1}h) \cap N = \emptyset.$$

Исключительные элементы h , не удовлетворяющие этому условию, лежат в ΔN , конечном числе классов смежности по подгруппе N , что и требовалось.

(2.2) По построению все отношения в B были добавлены и в $\bar{\Delta}'$, так что достаточно показать обратное: отношения, верные в $\bar{\Delta}'$, верны и в B . Сначала рассмотрим структуру на Δ , индуцированную структурой $G_{\Delta'}$. Пусть $a_1, a_2 \in \Delta$ и отношение $R(a_1, a_2)$ верно в $G_{\Delta'}$, но не в $\bar{\Delta}$. Тогда

$$a_1^{-1}a_2 \in \Delta'_R \setminus \Delta_R \subseteq h^{-1}\Delta \cup \Delta^{-1}h.$$

Множество исключительных h , для которых это выполнено, конечно.

Теперь рассмотрим оставшийся случай: какое-то отношение $R(a, h)$ или $R(h, a)$ верно в $\bar{\Delta}'$, но соответствующее отношение $R(a, b)$ или $R(b, a)$ не верно в B .

Если $R(a, h)$ верно, то $a^{-1}h \in \Delta'_R$ и есть три возможности:

$$\begin{aligned} a^{-1}h &\in \Delta_R, \\ a^{-1}h &\in (\Delta_R^-)^{-1}h, \\ a^{-1}h &\in h^{-1}\Delta_R^+. \end{aligned}$$

В первом случае возможно лишь конечное число выборов такого h . Второй случай означает, что $a \in \Delta_R^-$, или, иными словами, что $R(a, b)$ верно в B . Остался третий случай:

$$a^{-1}h = h^{-1}a_1,$$

где $a_1 \in \Delta$. Таким образом, $h \in S(a, a_1)$. Опять h лежит в одном из конечного числа исключительных множеств.

Случай, когда $R(h, a)$ верно, аналогичным образом сводится к $h \in S(a_1, a)$.

Замечание. Этот анализ может быть несколько уточнен, когда отношения на Γ симметричны. А именно, мы имеем $a^{-1}h = h^{-1}a_1$, где $a_1 \in \Delta_R^+$, так что $R(b, a_1)$ верно в B , а потому $R(a_1, b)$ также верно. Таким образом, мы можем предположить, что в этом случае $a \neq a_1$; это существенно расширяет класс групп, к которым этот анализ применим.

Наконец, докажем (2.3), т.е. что $\bar{\Delta}'$ вкладывается в Γ . По условию на Γ достаточно проверить, что каждая клика C в $\bar{\Delta}'$ вкладывается в Γ . Удобней проверить, что каждая клика C в $G_{\Delta'}$ вкладывается в Γ . Тогда мы сможем сдвинуть клику C так, что она будет содержать элемент 1, и заключить, поскольку это клика, что элементы из $C \setminus \{1\}$ принадлежат объединению $\bigcup_R \Delta'_R$ и, в частности, лежат в Δ' . Более того, так как Δ' является G -фрагментом, мы заключаем, что

$$C \cap N = \{1\}.$$

Теперь распространим наш анализ отношений, верных в $\Delta \cup \{h\}$, на отношения, верные в Δ' .

Отношения между элементами $h^{-1}\Delta$ и $\Delta^{-1}h$. Пусть отношение $R(h^{-1}a_1, a_2^{-1}h)$ верно, т.е.

$$a_1^{-1}ha_2^{-1}h \in \Delta'_R.$$

Есть следующие возможности:

$$\begin{aligned} a_1^{-1}ha_2^{-1}h &= a, \\ a_1^{-1}ha_2^{-1}h &= h^{-1}a, \\ a_1^{-1}ha_2^{-1}h &= a^{-1}h, \end{aligned}$$

где $a \in \Delta$. В первых двух случаях h лежит в одном из исключительных множеств $S(a_1a, a_2)$ и $S(a_1, a_2, a)$. В оставшемся случае h лежит в конечном множестве.

Значит (при правильно выбранном h), наша клика C не будет пересекать оба множества $h^{-1}\Delta$ и $\Delta^{-1}h$.

Осталось проанализировать еще два случая.

Случай I. $C \subseteq \Delta \cup h^{-1}\Delta$. Рассмотрим ребра между Δ и $h^{-1}\Delta$. Пусть $(a_1, h^{-1}a_2)$ является ребром между этими множествами, т. е.

$$a_1^{-1}h^{-1}a_2 \in \Delta'_R.$$

Опять разберем случаи при $a \in \Delta$:

$$\begin{aligned} a_1^{-1}h^{-1}a_2 &= a, \\ a_1^{-1}h^{-1}a_2 &= h^{-1}a, \\ a_1^{-1}h^{-1}a_2 &= a^{-1}h. \end{aligned}$$

В первом и третьем случае имеется лишь конечное число исключительных множеств. Во втором случае имеем

$$(a_2a^{-1})^h = a_1.$$

Элементы h здесь лежат в классе смежности по подгруппе $C_G(a_1)$. Если $a_1 \in C \cap \Delta$ и $a_1 \neq 1$, то $a_1 \notin N$, так что $C_G(a_1)$ имеет бесконечный индекс в G и соответствующие элементы h лежат в конечном числе исключительных множеств. Таким образом, для подходящего h , поскольку включение $C \subseteq \Delta$ невозможно, получим

$$C \subseteq \{1\} \cup h^{-1}\Delta.$$

Сдвигая на h , получаем $C \subseteq \Delta \cup \{h\} \cong B$ и приходим к противоречию.

Случай II. $C \subseteq \Delta \cup \Delta^{-1}h$. Рассмотрим ребра в $\Delta^{-1}h$. Пусть

$$(a_1^{-1}h)^{-1}(a_2^{-1}h) = (a_1a_2^{-1})^h \in \Delta'_R.$$

Есть три возможности:

$$\begin{aligned} (a_1a_2^{-1})^h &= a, \\ (a_1a_2^{-1})^h &= h^{-1}a, \\ (a_1a_2^{-1})^h &= a^{-1}h, \end{aligned}$$

где $a \in \Delta$.

Второе и третье равенства соответствуют конечному числу значений h , так что рассмотрим первое. Левая часть принадлежит Δ'_R и потому $a \notin N$, и, так как мы знаем, что h лежит в классе смежности по подгруппе $C(a)$, h опять пробегает исключительное множество.

Значит, мы можем предположить, что в клике C есть лишь один элемент $a^{-1}h$, такой, что $a \in \Delta$. Рассмотрим теперь ребра $(a_1, a^{-1}h)$ в C , т. е. мы предполагаем, что

$$a_1^{-1}a^{-1}h = (aa_1)^{-1}h \in \Delta'_R.$$

Имеются следующие возможности:

$$(aa_1)^{-1}h = a_2,$$

$$(aa_1)^{-1}h = h^{-1}a_2,$$

$$(aa_1)^{-1}h = a_2^{-1}h,$$

где $a_2 \in \Delta$.

На этот раз первые два уравнения определяют исключительные множества, а третье дает

$$aa_1 = a_2.$$

То есть $a(C \cap \Delta) \subseteq \Delta$. Сдвигая на a , получаем клику aC , множество вершин

$$a(C \cap \Delta) \cup \{h\}$$

которой оказывается подмножеством в $\Delta \cup \{h\}$ и, значит, вкладывается в B , и мы получаем противоречие. $\square$

§4. Однородные ориентированные графы

Теперь мы будем рассматривать ограничения на регулярные действия абелевых групп на *ориентированных графах* хенсоновского типа. Мы обнаружим, что в этом случае ситуация похожа на случай неориентированных графов хенсоновского типа, но обобщение на случай классов со свободным амальгамированием в языках из двуместных отношений может быть более тонким и при этом интересным.

Как и в §2, мы будем рассматривать это в более общем контексте *регулярных нормальных действий*, введенном Камероном.

Если рассматривать только хенсоновские ориентированные графы с ограничениями лишь на треугольники (т. е. запрещены либо оба турнира порядка 3, либо лишь один из них, и ничего больше), то кажется, что анализ из [1] остается применимым и такие действия существуют, например у группы $\mathbb{Z}$. Но здесь мы сосредоточимся на отрицательных результатах, которые в этом контексте применимы к несчетному числу структур.

Предложение 3. Пусть H — счетная бесконечная группа и Γ — общий $\mathcal{T}$ -свободный ориентированный граф, где $\mathcal{T}$ состоит из антицепи конечных турниров, хотя бы один из которых имеет порядок не менее 4. Тогда не существует регулярного нормального действия группы H на Γ автоморфизмами.

Доказательство. Предположим противное, и пусть у нас есть структура на H , изоморфная Γ и инвариантная относительно левых и правых сдвигов на элементы из H .

Рассмотрим запрещенный турнир $T \in \mathcal{T}$ порядка $n \geq 4$ и представим его в виде

$$T = T_0 \cup \{a, b\},$$

где T_0 — турнир порядка $n - 2$ и $a \rightarrow b$.

Рассмотрим копию турнира T_0 в Γ . Будем искать элементы $g, h \in H$, такие, что $T_0 \cup \{g, gh^{-1}\}$ изоморфно турниру T над T_0 , причем изоморфизм переводит пару g, gh^{-1} в пару a, b . Мы получаем следующие ограничения на g, h :

- тип элемента g над T_0 равен типу элемента a над T_0 ;
- тип элемента g над T_0h равен типу элемента b над T_0 ; тогда тип элемента gh^{-1} над T_0 равен типу элемента b над T_0 в силу правой инвариантности;
- мы требуем, чтобы $h \rightarrow 1$, так что в силу левой инвариантности $g \rightarrow gh^{-1}$.

Если мы найдем такие g, h , то $T_0 \cup \{g, gh^{-1}\}$ будет запрещенным турниром и мы придем к противоречию.

Легко переписать эти условия как набор условий на h , а именно, первые два пункта должны быть совместны с заданными ограничениями на Γ , а третье условие сохраняем в неизменном виде.

Это дает следующие условия на h :

- T_0 и T_0h не пересекаются;
- требуемая структура на $T_0 \cup T_0h \cup \{g\}$ не содержит запрещенных турниров;
- $h \rightarrow 1$.

Перепишем второе условие:

- T_0 и T_0h не пересекаются;
- между T_0 и T_0h нет ребер кроме ребер вида (th, t) , где $t \in T_0$;
- $h \rightarrow 1$.

Нужно показать, что такое h существует и что при таком выборе h соответствующая конфигурация $T_0 \cup T_0h \cup \{g\}$ не содержит запрещенных турниров.

Первое из условий на T_0 и T_0h исключает только конечное число значений h . Остальные два условия на h после левых сдвигов на элементы из T_0 принимают следующий вид:

- $(t_1^{-1}t_2, h)$ никогда не является ребром;
- $(h, t_1^{-1}t_2)$ является ребром, если и только если $t_1 = t_2$.

Эти условия можно переформулировать следующим образом: структура ориентированного графа на $T_0^{-1}T_0 \cup \{h\}$ такова, что любой подтурнир на трех и более вершинах содержится в $T_0^{-1}T_0 \subseteq H$ и, значит, вкладывается в Γ . Таким образом, существует бесконечно много элементов h в H , удовлетворяющих этим условиям. Поэтому мы можем выполнить все три условия.

Вернемся к рассмотрению турниров, вложенных в $T_0 \cup T_0h \cup \{g\}$. Лежащие в $T_0 \cup \{g\}$ или в $T_0h \cup \{g\}$ вкладываются в Γ , так как они являются собственными подтурнирами турнира T , а $\mathcal{T}$ — антицепь.

Остальные турниры будут содержаться в турнире порядка 3 с вершинами

$$\{t, th, g\},$$

где $t \in T_0$, $th \rightarrow t$ и ориентация ребер (t, g) и (th, g) определяется ориентацией ребер (t, a) и (t, b) соответственно.

Так как $th \rightarrow t$ и $a \rightarrow b$, можно видеть, что ориентированный 3-цикл (th, t, g) будет соответствовать ориентированному 3-циклу (t, a, b) в T , и потому всякая линейная упорядоченная тройка также будет соответствовать линейно упорядоченной тройке. (Здесь, кажется, используется некоторое частное утверждение

о турнирах порядка 3.) Таким образом, снова получаем собственный подтурнир в T , который вкладывается в Γ . Тем самым мы получили все требуемые условия. $\square$

§5. Однородные метрические пространства

В [1] содержится несколько результатов и проблем о регулярных действиях на пространстве Урысона. Можно рассматривать пространство Урысона, в частности, вариант со счетным пространством и рациональными расстояниями, как нечто очень близкое к случайному графу; а еще ближе будет вариант со счетным пространством и целыми расстояниями. Этот последний на самом деле эквивалентен понятию *однородного метрического графа*, т. е. графа, являющегося однородным, если его рассматривать как метрическое пространство в метрике графа.

Приведем одну из важных проблем, поднятых в [1].

Проблема 4. *Какие абелевы группы действуют регулярно на целочисленном пространстве Урысона? В частности, какие элементарные абелевы группы могут действовать регулярно на целочисленном пространстве Урысона?*

Камерон и Вершик [3] показали, что элементарная абелева 3-группа не может действовать регулярно на целозначном пространстве Урысона (а также на рациональнозначном пространстве Урысона и на каком-либо его плотном подмножестве), а элементарная абелева 2-группа может. Остальные случаи остаются открытыми.

С нашей точки зрения естественно рассмотреть *варианты Хенсона* целозначного пространства Урысона. В простейшей форме они определяются так же, как графы Хенсона, запрещением подпространств K_n , где теперь K_n — метрическое пространство, в котором все расстояния равны 1. Также естественно рассмотреть случай ограниченного диаметра. Обозначим через $\mathbb{U}_\delta$ целозначное пространство Урысона диаметра δ , а через $\mathbb{U}_{\delta,n}$ пространство Урысона–Хенсона, т. е. общий K_n -свободный граф диаметра δ (рассматриваемый как целозначное метрическое пространство). Оказывается, что в случае ограниченного диаметра имеется более богатый класс вариантов Хенсона $\mathbb{U}_{\delta,\mathcal{S}}$, где $\mathcal{S}$ — произвольный набор $(1, d)$ -пространств, т. е. пространств, в которых расстояние принимает только два значения, 1 и d . Таким образом, $\mathbb{U}_{\delta,\mathcal{S}}$ — общее $\mathcal{S}$ -свободное метрическое пространство диаметра δ .

Есть и гипотеза о классификация всех однородных метрических графов [5], в которой варианты Хенсона играют значительную роль. Хотя эта классификация и не была доказана полностью, она может служить каталогом всех известных на данный момент примеров.

Эти структуры не обладают свойством свободной амальгамируемости, используемым в предложении 2, но можно ожидать, что их поведение чем-то схоже со случаем графов Хенсона, так что естественно задать следующий вопрос.

Проблема 5. *Какие из известных однородных метрических графов*

- являются графами Кэли;
- допускают регулярные $\mathbb{Z}$ -действия на себе (или же абелевы действия, или регулярные нормальные действия);
- допускают регулярные нильпотентные действия?

Также естественно рассмотреть действие элементарных абелевых p -групп, хотя бы для $p = 2, 3$.

Камерон в §9 работы [1] рассматривал регулярные нормальные действия на $\mathbb{U}_{\delta,n}$, получив положительные результаты для $n \leq 3$ и отрицательные для $n \geq 4$. Даже и в благоприятных случаях ($n \leq 3$) точная характеристика групп, действующих регулярно, кажется далекой от завершения.

Мы обобщим этот результат для $n \geq 4$ на чуть более широкий класс графов Урысона–Хенсона $\mathbb{U}_{\delta,\mathcal{S}}$, у которых набор ограничений $\mathcal{S}$ содержит пространство порядка не менее 4. Видимо, похожие результаты верны и для более общих классов графов Урысона–Хенсона (см. [5]), в которых разрешены ограничения (side conditions) на треугольники, но пока мы не пытались в этом разобраться.

Предложение 4 (однородные метрические графы Хенсона). Пусть $\delta < \infty$ и $\mathcal{S}$ — множество конечных метрических $(1, d)$ -пространств, не вложимых изометрично друг в друга. Также предположим, что $\mathcal{S}$ содержит хотя бы одно пространство порядка не менее 4. Тогда не существует регулярного нормального действия группы G на соответствующем графе $\mathbb{U}_{\delta,\mathcal{S}}$, а именно, на общем $\mathcal{S}$ -свободном однородном метрическом графе диаметра δ .

Доказательство. Предположим, что такое регулярное нормальное действие существует.

Зафиксируем $S \in \mathcal{S}$ с $|S| \geq 4$ и представим его в виде $S = S_0 \cup \{a, b\}$, где пара a, b выбрана так, что $d(a, b) = 1$, если это возможно; если же это невозможно, то S является δ -кликой.

Утверждение. Существует h , удовлетворяющий следующим условиям:

- (1) $S_0, S_0 h$ не пересекаются,
- (2) для $s_1, s_2 \in S_0$ расстояние от s_1 до $s_2 h$ равно

$$\begin{aligned} d(a, b), & \text{ если } s_1 = s_2, \\ 2, & \text{ если } d(s_1, s_2) = 1, \\ \delta - 1, & \text{ если } d(s_1, s_2) = \delta. \end{aligned}$$

Выразим условие (2) в терминах типа элемента h над $S_0^{-1}S_0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d(1, h) &= d(a, b), \\ d(s_2^{-1}s_1, h) &= 2, & \text{ если } d(s_1, s_2) = 1, \\ d(s_2^{-1}s_1, h) &= \delta - 1, & \text{ если } d(s_1, s_2) = \delta. \end{aligned}$$

Заметим, что равенство $s_2^{-1}s_1 = s_3^{-1}s_4$ влечет за собой равенство $d(s_1, s_2) = d(s_3, s_4)$ и потому эти условия во всяком случае осмысленны. Надо проверить, что таким образом определенные расстояния удовлетворяют неравенству треугольника в $(S_0^{-1}S_0) \cup \{h\}$ для треугольников, содержащих h .

Если S является δ -кликой, то любое расстояние вида $d(t, h)$ в ней равно δ или же $\delta - 1$ для $t \in S_0^{-1}S_0$, из чего легко следует нужное утверждение.

Предположим теперь, что $d(a, b) = 1$.

Рассмотрим треугольник, содержащий 1 и h , т.е. вида $(1, h, s_2^{-1}s_1)$, где $s_1 \neq s_2$. Тогда $d(s_2^{-1}s_1, h) = d(s_2^{-1}s_1, 1) \pm 1$, что влечет за собой неравенство треугольника.

Теперь предположим, что треугольник имеет вид $(h, s_2^{-1}s_1, s_4^{-1}s_3)$, где $s_1 \neq s_2$ и $s_3 \neq s_4$. Положим $t = s_2^{-1}s_1$, $t' = s_4^{-1}s_3$. Если $d(s_1, s_2) = d(s_3, s_4)$, то $d(h, t) = d(h, t')$, что влечет за собой неравенство треугольника для (h, t, t') .

Остается случай, когда $d(s_1, s_2) = 1$ и $d(s_3, s_4) = \delta$, а значит, $d(1, t) = 1$ и $d(1, t') = \delta$. Тогда $d(t, t') \geq \delta - 1$. Так как $d(h, t) = 2$ и $d(h, t') = \delta - 1$, опять получаем неравенство треугольника.

Так как эти условия непротиворечивы, условие (2) имеет бесконечно много решений, а условие (1) исключает конечное число решений. Так что требуемый элемент h существует, и утверждение доказано.

Теперь нам требуется найти элемент g , удовлетворяющий следующему условию:

$$\begin{aligned} d(g, s) &= d(a, s) \quad \text{для } s \in S_0, \\ d(g, sh) &= d(b, s) \quad \text{для } s \in S_0h. \end{aligned}$$

Этого достаточно для получения противоречия, так как $S_0 \cup \{g, gh^{-1}\}$ — требуемая копия пространства S . Проверим неравенство треугольника в $S_0 \cup (S_0h) \cup \{g\}$, а также отсутствие запрещенных $(1, \delta)$ -подпространств. Но не существует нетривиальных $(1, \delta)$ -подпространств, кроме вложенных в $S_0 \cup \{g\}$ и $S_0h \cup \{g\}$, а они изометричны собственным подпространствам пространства S .

Значит, достаточно лишь рассмотреть неравенство треугольника. Опять возникает два случая: или S есть δ -клика, или $d(a, b) = 1$.

Если S есть δ -клика, то в $S_0 \cup (S_0h) \cup \{g\}$ все расстояния равны δ и $\delta - 1$, и неравенство треугольника выполняется тривиальным образом. Предположим теперь, что $d(a, b) = 1$.

Так как и $S_0 \cup \{g\}$, и $(S_0h) \cup \{g\}$ вкладываются в S как собственные подпространства, достаточно рассмотреть лишь треугольники вида

$$(g, s_1, s_2h),$$

где s_1, s_2 в S_0 .

Если $d(s_1, s_2) \leq 1$, то $d(a, s_1) = d(b, s_2)$, так как $d(a, b) = 1$, а потому $d(g, a_1) = d(g, s_2)$, и неравенство треугольника выполнено. Если же $d(s_1, s_2) = \delta$, то $d(s_1, s_2h) = \delta - 1$, а $d(g, s_1)$ и $d(g, s_2)$ не равны одновременно единице. Так что получается треугольник типа $(\delta - 1, \delta, \delta)$ или $(\delta - 1, \delta, \delta)$, и неравенство треугольника выполнено.

Это завершает построение: элемент g существует, что ведет к противоречию. $\square$

Обычно известные однородные метрические графы получают следующим образом:

- Зададим диаметр δ .
- Запретим некоторые треугольники (метрические пространства с тремя точками) в довольно сложном смысле, зависящем от четырех дополнительных параметров, три из которых контролируют треугольники нечетного периметра, а один контролирует треугольники четного периметра.
- Добавим некоторые ограничения Хенсона.

Эти параметры должны удовлетворять различным численным ограничениям, для того чтобы такой однородный метрический граф существовал [5].

Разумно ожидать, что результаты из [9], [1] выполнены для всех таких примеров: а именно, все должно зависеть от того, имеется ли минимальное запрещенное $(1, d)$ -пространство порядка больше трех, причем результаты отрицательны, если имеется, и положительны в противном случае. Но эти ограничения на треугольник и на соответствующие процессы амальгамирования весьма сложны в общем случае, а потому ситуация остается неясной.¹⁾

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Cameron, *Homogeneous Cayley objects*, European J. Combin., **21**:6 (2000), 745–760.
- [2] P. Cameron, K. Johnson, *An investigation on countable B-groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **102**:2 (1987), 223–232.
- [3] P. Cameron, A. Vershik, *Some isometry groups of the Urysohn space*, Ann. Pure Appl. Logic, **143**:1–3 (2006), 70–78.
- [4] G. L. Cherlin, *The classification of countable homogeneous directed graphs and countable homogeneous n -tournaments*, Mem. Amer. Math. Soc., **131** (1998), no. 621.
- [5] G. Cherlin, *Two problems on homogeneous structures, revisited*, in: Model Theoretic Methods in Finite Combinatorics, Contemporary Math., vol. 558, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 319–415.
- [6] M. El-Zahar, N. Sauer, *The indivisibility of the homogeneous K_n -free graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, **47**:2 (1989), 162–170.
- [7] C. Even-Zahar, N. Linial, *Triply existentially complete triangle-free graphs*, J. Graph Theory, **78**:4 (2015), 305–317.
- [8] R. Fraïssé, *Sur certains relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris, **237** (1953), 540–542.
- [9] C. W. Henson, *A family of countable homogeneous graphs*, Pacific J. Math., **38** (1971), 69–83.
- [10] P. S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, C. R. Acad. Sci. Paris, **180** (1925), 803–806.

Department of Mathematics, Rutgers University
e-mail: cherlin@math.rutgers.edu

Поступила в редакцию
24 июля 2014 г.

Перевод на русский язык М. Р. Гавриловича

¹⁾Переводчик благодарит автора за пояснения в процессе перевода.