Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ольшанский, Аппроксимация марковской динамики на дуальном объекте к бесконечномерной унитарной группе, *Функци. анализ и его прил.*, 2015, том 49, выпуск 4, 61–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:34:43

Аппроксимация марковской динамики на дуальном объекте к бесконечномерной унитарной группе*

© 2015. Г. И. ОЛЬШАНСКИЙ

Ранее А. М. Бородин и автор построили 4-параметрическое семейство марковских процессов на дуальном объекте к бесконечномерной унитарной группе. Основным новым результатом состоит в том, что эти процессы являются пределами скачкообразных процессов на дуальных объектах к растущим компактным унитарным группам.

1. Введение

В совместной работе А. М. Бородина и автора [4] была предложена конструкция 4-параметрического семейства марковских процессов на бесконечномерном пространстве $\widehat{U(\infty)}$ — дуальном объекте к бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$. Эти процессы предположительно являются диффузиями. Их генераторы вычислены в [14]. Цель настоящей статьи — показать, что рассматриваемые процессы на $\widehat{U(\infty)}$ являются пределами скачкообразных процессов на дискретных пространствах $\widehat{U(N)}$ при $N \rightarrow \infty$.

1.1. Сплетение марковских процессов. Предположим, что имеются марковские процессы $X(t)$ и $X'(t)$ на пространствах E и E' с переходными функциями $P(t; x, dy)$ и $P'(t; x', dy')$ соответственно, и пусть, кроме того, задано марковское ядро $\Lambda(x, dy')$ на $E \times E'$. Скажем, что ядро Λ *сплетает* процессы $X(t)$ и $X'(t)$, если выполнено коммутационное соотношение $P(t)\Lambda = \Lambda P'(t)$, или, подробнее,

$$\int_{y \in E} P(t; x, dy) \Lambda(y, dz') = \int_{y' \in E'} \Lambda(x, dy') P'(t; y', dz'), \quad t \geq 0$$

(равенство марковских ядер на $E \times E'$).

В работе [4] сплетающие ядра были применены к построению некоторых бесконечномерных марковских процессов.

Общая схема выглядит следующим образом. Предположим, что задана бесконечная цепочка пространств E_N и марковских процессов $X_N(t)$ с переходными функциями $P_N(t)$, $N = 1, 2, \dots$, причем эти процессы попарно сплетены посредством некоторых марковских ядер Λ_N^{N+1} :

$$P_{N+1}(t) \Lambda_N^{N+1} = \Lambda_N^{N+1} P_N(t), \quad N = 1, 2, \dots, t \geq 0.$$

Тогда, при выполнении некоторых дополнительных условий, цепочка

$$\{E_N, X_N(t), \Lambda_N^{N+1} : N = 1, 2, \dots\}$$

*Исследование выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150).

определяет марковский процесс $X_\infty(t)$ на пространстве E_∞ , которое является в определенном смысле проективным пределом пространств E_N .

Упомянутые дополнительные условия включают в себя требование феллеровости для процессов $X_N(t)$: оно существенно используется в конструкции. Тогда и процесс $X_\infty(t)$ оказывается феллеровским, откуда следует, что он имеет достаточно хорошие траектории.

1.2. Марковская динамика на дуальном объекте $\widehat{U(\infty)}$. Описанная схема была применена в [4] к конкретной модели, в которой N -е пространство E_N является дуальным объектом $\widehat{U(N)}$ (т.е. это множество неприводимых характеров группы $U(N)$). Марковские ядра Λ_N^{N+1} суть просто стохастические матрицы (поскольку пространства дискретны), и они определяются очень естественным образом из правила ветвления характеров Гельфанда–Цетлина. Пространство E_∞ , которое строится по цепочке $\{E_N, \Lambda_N^{N+1}\}$, служит границей графа Гельфанда–Цетлина. Оно же параметризует неразложимые нормированные характеры группы $U(\infty) := \varinjlim U(N)$, и в этом смысле его можно рассматривать как дуальный объект $\widehat{U(\infty)}$. Пространство $E_\infty = \widehat{U(\infty)}$ допускает явное описание; оно бесконечномерно, но при этом локально компактно.

Марковские процессы $X_N(t)$ суть некоторые марковские цепи с непрерывным временем. Их определение возникло из задачи гармонического анализа для группы $U(\infty)$. Цепи $X_N(t)$ зависят от четырех дополнительных параметров; при фиксации параметров они попарно сплетены посредством стохастических матриц Λ_N^{N+1} .

Указанные объекты в итоге порождают бесконечномерный марковский процесс $X_\infty(t)$ на $\widehat{U(\infty)}$, зависящий от четырех параметров.

Конструкция марковских процессов на $\widehat{U(\infty)}$ и связанные с ней результаты обсуждаются также в вводных текстах [12], [13].

Отметим еще, что в вероятностной литературе можно найти ряд примеров сплетающих марковских ядер (некоторые ссылки указаны в [13]). Однако, насколько мне известно, до работы [4] сплетающие марковские ядра не использовались как инструмент для построения бесконечномерных марковских процессов.

1.3. Результаты. Описанная схема построения бесконечномерной марковской динамики на $\widehat{U(\infty)}$ идейно проста, но из нее не видно, является ли процесс $X_\infty(t)$ пределом исходных процессов $X_N(t)$ в привычном смысле. Например, имеет ли место сходимост конечномерных распределений.

Цель настоящей статьи — дать положительный ответ на этот вопрос. А именно, основной результат (теорема 5.6) утверждает, что марковские полугруппы, отвечающие процессам $X_N(t)$, сходятся к марковской полугруппе, отвечающей процессу $X_\infty(t)$. Отсюда следует сходимост и самих процессов.

Независимый интерес представляет вспомогательная теорема 3.1. В ней дается новое (по сравнению с [4]) доказательство утверждения о феллеровости допредельных процессов $X_N(t)$, откуда следует феллеровост и предельного процесса $X_\infty(t)$. Далее, теорема 3.1 позволяет выделить некоторую существенную область определения (core) для генератора процесса $X_\infty(t)$. Это затем используется в основной теореме и, кроме того, позволяет завершить описание генератора, полученное в работе [14].

1.4. Структура статьи. В §2 приводятся сведения о феллеровских марковских процессах. В §3 доказывается основной технический результат, который относится к марковским цепям на $\widehat{U(N)}$, — теорема 3.1. В §4 собраны определения и результаты из [5], которые необходимы для формулировки и доказательства основной теоремы 5.6. Само доказательство дается в §5, а в §6 приводятся следствия и замечания.

§2. Феллеровские полугруппы

В этом коротком параграфе напоминаются общие сведения о феллеровских марковских процессах. Ссылки: книги Этье–Курц [8] и Лиггетт [10].

Пусть E — локально компактное (но не компактное) метризуемое сепарабельное пространство; $C(E)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных вещественнозначных функций на E с супремум-нормой; $C_0(E)$ — его замкнутое подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Пространство $C_0(E)$ сепарабельно (что неверно для $C(E)$).

Феллеровская полугруппа на E — это сильно непрерывная полугруппа $\{T(t) : t \geq 0\}$ сжимающих операторов в банаховом пространстве $C_0(E)$, переводящая в себя конус неотрицательных функций и обладающая дополнительным свойством, называемым *консервативностью*. Это свойство допускает разные эквивалентные формулировки; одна из них состоит в том, что операторы $T(t)$ задаются марковскими ядрами:

$$(T(t)f)(x) = \int_E P(t; x, dy) f(y), \quad x \in E,$$

где $P(t; x, \cdot)$ есть вероятностная мера на E для всех $t \geq 0$ и $x \in E$.

Всякая феллеровская полугруппа порождает марковский процесс $X(t)$ на E с переходной функцией, определяемой марковским ядром $P(t; x, dy)$. Процесс $X(t)$ также называется феллеровским.

Свойство консервативности обеспечивает отсутствие взрыва (невозможность убегания на бесконечность за конечное время). Интегральное представление операторов $T(t)$ имеет место и без свойства консервативности, но тогда можно утверждать лишь, что ядро является субмарковским: общая масса меры $P(t; x, \cdot)$ не превосходит 1; разность $1 - \int_{y \in E} P(t; x, dy)$ есть как раз вероятность убежать на бесконечность за данное время t при начальном состоянии x .

Всякая сильно непрерывная полугруппа $T(t)$ сжимающих операторов в банаховом пространстве однозначно определяется своим *генератором*: это, как правило, неограниченный оператор A , задаваемый формулой

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t};$$

область определения $\text{Dom}(A)$ оператора A состоит из тех векторов f , для которых предел существует. Известно, что $\text{Dom}(A)$ является плотным подпространством, а оператор A замкнут и диссипативен (теорема Хилле–Иосиды).

Всякое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \text{Dom}(A)$, обладающее тем свойством, что замыкание оператора $A|_{\mathcal{F}}$ совпадает с A , называется *существенной областью определения* (core) оператора A . Очевидно, что генератор однозначно определяется своим действием на $\mathcal{F}$.

Если E — счетное множество с дискретной топологией (это важный для нас случай), то марковский процесс на E является скачкообразным процессом. Иначе говоря, это счетная марковская цепь с непрерывным временем. Подробнее о таких цепях см. [1], [10].

§3. Марковские цепи на дуальном объекте $\widehat{U(N)}$

В этом параграфе мы строим семейство феллеровских полугрупп на дуальном объекте к унитарной группе $U(N)$. Поскольку $\widehat{U(N)}$ есть счетное множество с дискретной топологией, соответствующие марковские процессы будут марковскими цепями с непрерывным временем.

Зафиксируем $N = 1, 2, \dots$. Сигнатурой длины N называется N -мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, координаты которого суть целые числа, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$. Как и в [4], [5], мы обозначаем множество всех таких векторов через $\mathbb{GT}_N$ (это N -й этаж графа Гельфанда–Цетлина $\mathbb{GT}$). Сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ параметризуют неприводимые характеры группы $U(N)$, поэтому мы отождествляем $\widehat{U(N)}$ с $\mathbb{GT}_N$.

Обозначим через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ базисные векторы в $\mathbb{R}^N$ и положим

$$\mathcal{E} = \{\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_N\}.$$

С каждой сигнатурой $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ свяжем набор чисел

$$l_i = \lambda_i + N - i, \quad i = 1, \dots, N,$$

и заметим, что для них выполнены строгие неравенства $l_1 > \dots > l_N$.

Следуя [4], мы определяем матрицу Q формата $\mathbb{GT}_N \times \mathbb{GT}_N$, зависящую от четырех комплексных параметров (u, u', v, v') , следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon_i) &= (u - l_i)(u' - l_i) \prod_{j:j \neq i} \frac{l_i - l_j + 1}{l_i - l_j}, \\ Q(\lambda, \lambda - \varepsilon_i) &= (v + l_i)(v' + l_i) \prod_{j:j \neq i} \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j}, \\ -Q(\lambda, \lambda) &= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon), \\ Q(\lambda, \nu) &= 0, \quad \nu \neq \lambda, \pm\varepsilon_i. \end{aligned}$$

Происхождение этих формул объяснено в [4]. Заметим, что формулы автоматически дают $Q(\lambda, \lambda \pm \varepsilon_i) = 0$, если вектор $\lambda \pm \varepsilon_i$ не допустим в том смысле, что не является сигнатурой.

Матричные элементы $Q(\lambda, \lambda \pm \varepsilon_i)$ суть интенсивности скачков $\lambda \rightarrow \lambda \pm \varepsilon_i$ в будущей марковской цепи, и потому они должны быть неотрицательны для допустимых переходов $\lambda \rightarrow \lambda \pm \varepsilon_i$. Мы хотим, более того, чтобы эти интенсивности были всегда строго положительны. Для этого необходимо и достаточно, чтобы параметры удовлетворяли условию

$$(u - k)(u' - k) > 0, \quad (v + k)(v' + k) > 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Для пары (u, u') это условие в точности означает, что числа u, u' либо комплексно сопряжены друг другу и не вещественны, либо, наоборот, вещественны

и тогда содержатся внутри интервала вида $(m, m+1)$, где $m \in \mathbb{Z}$. И то же самое верно для пары (v, v') .

Для произвольной функции f на $\mathbb{GT}_N$ мы можем определить функцию Qf по формуле

$$(Qf)(\lambda) = \sum_{\nu} Q(\lambda, \nu) f(\nu) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon) [f(\lambda + \varepsilon) - f(\lambda)],$$

где обе суммы конечны и совпадают друг с другом, как видно из определения матрицы Q . Таким образом, Q является разностным оператором на подмножестве $\mathbb{GT}_N$ решетки $\mathbb{Z}^N$.

Теорема 3.1. Пусть A — оператор в банаховом пространстве $C_0(\mathbb{GT}_N)$ с областью определения

$$\text{Dom}(A) := \{f \in C_0(\mathbb{GT}_N) : Qf \in C_0(\mathbb{GT}_N)\},$$

на которой он задается разностным оператором $f \mapsto Qf$. Предполагается, что параметры удовлетворяют условию (3.1).

- (i) A является генератором феллеровской полугруппы и тем самым задает феллеровский процесс на $\mathbb{GT}_N$.
- (ii) Подпространство финитных функций является существенной областью определения для A .

Утверждение (i) было ранее установлено в [4], но мы доказываем его другим способом. Утверждение (ii) является новым, и оно существенно используется ниже в теореме 5.6.

Доказательство теоремы 3.1. 1. Мы опираемся на теорему 3.1 из гл. 8 книги [8]. Согласно этой теореме, достаточно найти две строго положительные функции на $\mathbb{GT}_N$, обозначаемые через $\gamma(\lambda)$ и $\eta(\lambda)$, которые стремятся к $+\infty$ на бесконечности и удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{Q(\lambda, \lambda)}{\gamma(\lambda)} \leq \text{const}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon) \frac{\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda + \varepsilon)}{\gamma(\lambda + \varepsilon)} \leq \text{const}, \quad (3.3)$$

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon) \frac{\eta(\lambda + \varepsilon) - \eta(\lambda)}{\eta(\lambda)} \leq \text{const} \quad (3.4)$$

с подходящими константами, не зависящими от $\lambda \in \mathbb{GT}_N$.

В самом деле, предположим, что мы нашли такие функции. Наш разностный оператор Q очевидным образом приводится к виду, указанному в формуле (3.1) из гл. 8 книги [8]. Написанные выше неравенства выражают условия (3.2), (3.4) и (3.5) из той же главы. Еще одно условие оттуда, а именно (3.3), выполнено, поскольку в матрице Q все столбцы финитны. Наконец, условие непрерывности, сформулированное там же перед (3.2), выполнено по тривиальной причине ввиду дискретности пространства $\mathbb{GT}_N$.

Обозначим через Q_c сужение разностного оператора Q на подпространство $C_c(\mathbb{GT}_N) \subset C_0(\mathbb{GT}_N)$ финитных функций. Из вида матрицы Q ясно, что Q_c переводит $C_c(\mathbb{GT}_N)$ в себя. Указанная теорема из [8] говорит, что из существования функций γ и η следует, что оператор Q_c замыкаем и его замыкание $\overline{Q_c}$

служит генератором феллеровской полугруппы. (Функция γ нужна для построения полугруппы, а функция η дает свойство консервативности.)

Остается объяснить, почему $\overline{Q_c}$ совпадает с A . По самому определению замыкания ясно, что A является расширением оператора $\overline{Q_c}$. С другой стороны, оператор A удовлетворяет тому, что называется «positive maximum principle» (см. [8, с. 165]) и, стало быть, диссипативен. Но, как следует из теоремы Хилле–Йосиды, у генератора сжимающей полугруппы не может быть собственного диссипативного расширения, так что $\overline{Q_c} = A$, что и дает нужные нам утверждения (i) и (ii).

2. Теперь надо найти функции γ и η , удовлетворяющие требуемым неравенствам. Убедимся в том, что для этой цели подходит

$$\gamma(\lambda) = \eta(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^N l_i^2.$$

Начнем с простых замечаний. Если F — рациональная функция от нескольких переменных, представленная в виде отношения G/H двух полиномов, то по определению $\deg F := \deg G - \deg H$, что не зависит от выбора представления (степень нулевой функции равна $-\infty$). Если F есть сумма нескольких рациональных функций, $F = \sum F_i$, то $\deg F \leq \max_i \deg F_i$. Наконец, если рациональная функция $F(x_1, \dots, x_N)$ симметрична и превращается в полином после умножения на определитель Вандермонда $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$, то она на самом деле сама является полиномом степени $\deg F$.

Проверим (3.2). Из определения матрицы Q видно, что $-Q(\lambda, \lambda)$ является симметрической рациональной функцией от переменных $l_1, \dots, l_N$; эта функция имеет степень ≤ 2 , и она превращается в полином после умножения на определитель Вандермонда. Стало быть, она является квадратичным полиномом. Отсюда следует оценка (3.2).

Проверим (3.4). Для этого достаточно проверить, что выражение

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon)(\eta(\lambda + \varepsilon) - \eta(\lambda))$$

является квадратичным полиномом от $l_1, \dots, l_N$. Полиномиальность устанавливается с помощью тех же соображений. Оценим теперь степень. Каждое из слагаемых по отдельности имеет степень 3, однако для каждого $i = 1, \dots, N$ сумма двух слагаемых, отвечающих $\varepsilon = \varepsilon_i$ и $\varepsilon = -\varepsilon_i$, имеет степень 2. В самом деле, эти два слагаемых вместе дают

$$2l_i \left((u - l_i)(u' - l_i) \prod_{j: j \neq i} \frac{l_i - l_j + 1}{l_i - l_j} - (v + l_i)(u' + l_i) \prod_{j: j \neq i} \frac{l_i - l_j - 1}{l_i - l_j} \right),$$

откуда видно, что старшие члены сокращаются.

Проверим (3.3). Для этого сделаем тривиальное преобразование

$$\frac{1}{\gamma(\lambda + \varepsilon)} = \frac{1}{\gamma(\lambda)} + \left(\frac{1}{\gamma(\lambda + \varepsilon)} - \frac{1}{\gamma(\lambda)} \right) = \frac{1}{\gamma(\lambda)} + \frac{\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda + \varepsilon)}{\gamma(\lambda)\gamma(\lambda + \varepsilon)}.$$

С его помощью левая часть в (3.3) представляется в виде

$$-\frac{1}{\gamma(\lambda)} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon)((\gamma(\lambda + \varepsilon) - \gamma(\lambda)) + \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} Q(\lambda, \lambda + \varepsilon) \frac{(\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda + \varepsilon))^2}{\gamma(\lambda)\gamma(\lambda + \varepsilon)}.$$

Вспомним, что $\gamma(\lambda) = \eta(\lambda)$. Первая сумма, как мы установили при проверке неравенства (3.4), есть квадратичный полином. Поэтому после деления ее на $\gamma(\lambda)$ получается ограниченная функция. Обратимся ко второй сумме. В ней каждый множитель $Q(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ растет квадратично, но он подавляется вторым множителем

$$\frac{(\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda + \varepsilon))^2}{\gamma(\lambda)\gamma(\lambda + \varepsilon)} = \frac{(\gamma(\lambda) - \gamma(\lambda \pm \varepsilon_i))^2}{\gamma(\lambda)\gamma(\lambda \pm \varepsilon_i)} = \frac{4l_i^2}{\gamma(\lambda)\gamma(\lambda \pm \varepsilon_i)} = O\left(\frac{1}{\gamma(\lambda)}\right).$$

Этим завершается доказательство. $\square$

§ 4. Пространство Ω и аппроксимация $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$

Подробнее о материале этого параграфа см. [2] и [5].

4.1. Абстрактная конструкция пространства Ω . Говорят, что две сигнатуры $\nu \in \mathbb{GT}_N$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_{N+1}$ *перемежаются*, если выполняется условие

$$\lambda_i \geq \nu_i \geq \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Перемежаемость обозначается символом $\nu \prec \lambda$.

Для каждого $N = 1, 2, \dots$ вводится матрица Λ_N^{N+1} формата $(N+1) \times N$ с матричными элементами

$$\Lambda_N^{N+1}(\lambda, \nu) = \begin{cases} \frac{N! \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\nu_i - \nu_j - i + j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq N+1} (\lambda_i - \lambda_j - i + j)}, & \nu \prec \lambda, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это определение происходит из правила ветвления Гельфанда–Цетлина для характеров унитарных групп. Ключевое свойство матриц Λ_N^{N+1} состоит в том, что они являются стохастическими.

Имеет место абстрактная конструкция, согласно которой по цепочке пространств $\mathbb{GT}_N$ и связывающих их стохастических матриц Λ_N^{N+1} определяется «универсальное» предельное пространство Ω вместе с марковскими ядрами Λ_N^∞ , для которых выполняются соотношения

$$\Lambda_{N+1}^\infty \Lambda_N^{N+1} = \Lambda_N^\infty, \quad N = 1, 2, \dots;$$

здесь Λ_N^∞ является марковским ядром на $\Omega \times \mathbb{GT}_N$.

4.2. Описание пространства Ω и ядер Λ_N^∞ . Обозначим через $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ множество неотрицательных вещественных чисел, а через $\mathbb{R}_+^\infty$ произведение счетного числа копий этого множества и положим

$$\mathbb{R}_+^{4\infty+2} = \mathbb{R}_+^\infty \times \mathbb{R}_+^\infty \times \mathbb{R}_+^\infty \times \mathbb{R}_+^\infty \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

Пространство Ω есть подмножество в $\mathbb{R}_+^{4\infty+2}$, образованное всевозможными наборами

$$\omega = (\alpha^+, \beta^+; \alpha^-, \beta^-; \delta^+, \delta^-),$$

такими, что

$$\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}_+^\infty, \quad \beta^\pm = (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0) \in \mathbb{R}_+^\infty, \\ \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) \leq \delta^\pm, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Снабдим $\mathbb{R}_+^{4\infty+2}$ топологией прямого произведения. Тогда в индуцированной топологии Ω оказывается локально компактным пространством; более того, оно метризуемо и сепарабельно. Всякое подмножество в Ω , в котором $\delta^+ + \delta^- \leq \text{const}$, относительно компактно, откуда следует, что последовательность точек из Ω уходит на бесконечность в том и только том случае, когда стремится к бесконечности величина $\delta^+ + \delta^-$.

Пространство Ω служит границей графа Гельфанда–Цетлина. С другой стороны, его точки параметризуют неразложимые характеры групп $U(\infty)$, т.е. элементы дуального объекта $\widehat{U(\infty)}$.

Далее, для $u \in \mathbb{C}^*$ и $\omega \in \Omega$ положим

$$\Phi(u; \omega) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)},$$

где

$$\gamma^\pm := \delta^\pm - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm).$$

При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\Phi(u; \omega)$ голоморфна по u в окрестности единичной окружности и тем самым может быть разложена в ряд Лорана

$$\Phi(u; \omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_\omega(n) u^n.$$

Марковское ядро Λ_N^∞ выражается через эти коэффициенты: а именно, для $\omega \in \Omega$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_N$

$$\Lambda_N^\infty(\omega, \lambda) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j - i + j}{j - i} \cdot \det[\varphi_\omega(\lambda_i - i + j)]_{i,j=1}^N.$$

4.3. Вложения $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$. Для наших целей важно, что пространство Ω допускает аппроксимацию «изнутри» дискретными пространствами $\mathbb{GT}_N$. А именно, существует способ задать для каждого N вложение $\lambda \mapsto \omega(\lambda)$ множества $\mathbb{GT}_N$ в пространство Ω . Его идея состоит в том, чтобы представить сигнатуру λ как пару (λ^+, λ^-) диаграмм Юнга, а тогда координаты точки $\omega(\lambda) \in \Omega$ простым образом выражаются через координаты Фробениуса этих двух диаграмм [5, разд. 3]. Эквивалентное определение [5, предложение 5.2] состоит в том, что

$$\Phi(u; \omega(\lambda)) = \prod_{i=1}^N \frac{t + i}{t + i - \lambda_i}, \quad t := -\frac{1}{2} + \frac{N}{u-1}.$$

Из определения вложения вытекают следующие свойства:

1. Образ $\omega(\mathbb{GT}_N)$ множества $\mathbb{GT}_N$ в Ω есть дискретное подмножество.
2. Если последовательность сигнатур $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$ уходит на бесконечность в $\mathbb{GT}_N$, то их образы $\omega(\lambda^{(1)}), \omega(\lambda^{(2)}), \dots$ уходят на бесконечность в Ω .
3. С ростом N образ множества $\mathbb{GT}_N$ в пространстве Ω становится все более плотным. Более точно, всякая точка из Ω аппроксимируется последовательностью точек из множеств $\omega(\mathbb{GT}_N)$, где $N \rightarrow \infty$. Более того, любая вероятностная мера на Ω может быть приближена (в слабой топологии) последовательностью вероятностных мер с носителями в $\omega(\mathbb{GT}_N)$.

4.4. Теорема о равномерной аппроксимации. Так называется следующий результат из [5], который понадобится в нашей основной теореме. Для произвольной пары $N > K$ натуральных чисел мы определяем стохастическую матрицу Λ_K^N формата $\mathbb{GT}_N \times \mathbb{GT}_K$ как произведение $N - K$ стохастических матриц:

$$\Lambda_K^N := \Lambda_{N-1}^N \cdots \Lambda_K^{K+1}.$$

Теорема 4.1. *Зафиксируем произвольные $K = 1, 2, \dots$ и $\varkappa \in \mathbb{GT}_N$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |\Lambda_K^\infty(\omega(\lambda), \varkappa) - \Lambda_K^N(\lambda, \varkappa)| = 0.$$

См. [5, теорема 3.1]. Другое доказательство содержится в статье Петрова [17].

Теорема 4.1 связывает две интерпретации предельного перехода $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$: абстрактное определение пространства Ω как своего рода проективный предел множеств $\mathbb{GT}_N$ и аппроксимацию «изнутри».

§5. Основная теорема

5.1 Феллеровские процессы на Ω . В §3 мы работали с фиксированным пространством $\mathbb{GT}_N$, теперь же мы будем варьировать N , одновременно меняя параметры (u, u', v, v') . А именно, мы зафиксируем четверку параметров (z, z', w, w') , удовлетворяющую тем же условиям (3.1), которые мы налагали выше на (u, u', v, v') , и будем считать, что

$$(u, u', v, v') = (z + N - 1, z' + N - 1, w, w').$$

Введем более подробное обозначение $A_N^{(z, z', w, w')}$ для оператора в $C_0(\mathbb{GT}_N)$ с этими параметрами, который в §3 мы обозначали просто через A . По теореме 3.1 оператор $A_N^{(z, z', w, w')}$ порождает феллеровскую полугруппу в $C_0(\mathbb{GT}_N)$, а последняя задает феллеровский марковский процесс на $\mathbb{GT}_N$ (см. §2); для них мы используем обозначения $T_N^{(z, z', w, w')}(t)$ и $X_N^{(z, z', w, w')}(t)$ соответственно.

В [4] доказаны следующие утверждения (ниже K — произвольное натуральное число, а $N > K$ — другое натуральное число):

1. Линейное преобразование $f \mapsto \Lambda_K^{K+1} f$, сопоставляющее произвольной функции f на $\mathbb{GT}_K$ функцию $\Lambda_K^{K+1} f$ на $\mathbb{GT}_{K+1}$ вида

$$(\Lambda_K^{K+1} f)(\lambda) := \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_K} \Lambda_K^{K+1}(\lambda, \nu) f(\nu), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_{K+1},$$

является сжимающим линейным оператором $C_0(\mathbb{GT}_K) \rightarrow C_0(\mathbb{GT}_{K+1})$.

Значит, аналогичным же свойством обладает ядро Λ_K^N (напомним, что оно есть произведение $\Lambda_{N-1}^N \cdots \Lambda_K^{K+1}$). А именно, оно задает сжимающий линейный оператор $C_0(\mathbb{GT}_K) \rightarrow C_0(\mathbb{GT}_N)$.

2. Аналогичным образом, марковское ядро Λ_N^∞ задает сжимающий линейный оператор $C_0(\mathbb{GT}_N) \rightarrow C_0(\Omega)$.

3. Полугруппы $T_1^{(z, z', w, w')}(t), T_2^{(z, z', w, w')}(t), \dots$ сплетаются посредством ядер Λ_K^N в том смысле, что справедливы коммутационные соотношения

$$T_N^{(z, z', w, w')}(t) \Lambda_K^N = \Lambda_K^N T_K^{(z, z', w, w')}(t), \quad t \geq 0,$$

где левая и правая части суть операторы $C_0(\mathbb{GT}_K) \rightarrow C_0(\mathbb{GT}_N)$.

4. Из этих коммутационных соотношений вытекает существование и единственность феллеровской полугруппы $T_\infty^{(z,z',w,w')}$ на $C_0(\Omega)$, для которой выполняются коммутационные соотношения

$$T_\infty^{(z,z',w,w')}(t)\Lambda_N^\infty = \Lambda_N^\infty T_N^{(z,z',w,w')}(t), \quad N = 1, 2, \dots, t \geq 0.$$

5. Аналогичные коммутационные соотношения выполнены для генераторов. А именно, зафиксируем произвольный вектор $g \in \text{Dom}(A_K^{(z,z',w,w')})$. Тогда для любого $N > K$ вектор $\Lambda_K^N g$ лежит в $\text{Dom}(A_N^{(z,z',w,w')})$ и

$$A_N^{(z,z',w,w')} \Lambda_K^N g = \Lambda_K^N A_K^{(z,z',w,w')} g.$$

Таким образом,

$$A_N^{(z,z',w,w')} \Lambda_K^N = \Lambda_K^\infty A_K^{(z,z',w,w')}$$

на $\text{Dom}(A_K^{(z,z',w,w')})$.

6. Точно так же $\Lambda_K^\infty g \in \text{Dom}(A_\infty^{(z,z',w,w')})$ и

$$A_\infty^{(z,z',w,w')} \Lambda_K^\infty g = \Lambda_K^\infty A_K^{(z,z',w,w')} g.$$

7. Предположим, что для каждого K выбрано какое-то подпространство $\mathcal{F}_K \subseteq \text{Dom}(A_K^{(z,z',w,w')})$, являющееся существенной областью определения для генератора $A_K^{(z,z',w,w')}$. Тогда подпространство $\mathcal{F}_\infty \subset C_0(\Omega)$, порожденное всеми подпространствами вида $\Lambda_K^\infty \mathcal{F}_K$, $K = 1, 2, \dots$, является существенной областью определения для генератора $A_\infty^{(z,z',w,w')}$.

Полагая $\mathcal{F}_K = C_c(\mathbb{GT}_K)$, получаем из этого утверждения и теоремы 3.1 важное для нас

Следствие 5.1. *Подпространство*

$$\mathcal{F}_\infty := \text{span} \left(\bigcup_{K=1}^{\infty} \Lambda_K^\infty C_c(\mathbb{GT}_K) \right) \subset C_0(\Omega), \quad (5.1)$$

порожденное образами подпространств финитных функций $C_c(\mathbb{GT}_K)$, является существенной областью определения для генератора $A_\infty^{(z,z',w,w')}$.

5.2. Сходимость операторных полугрупп. Приведенные ниже определения и теорема взяты из [8, гл. 1, разд. 6].

Предположим, что задана бесконечная последовательность вещественных банаховых пространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ и еще одно вещественное банахово пространство $\mathcal{L}_\infty$. Далее, предположим, что для каждого номера N задан оператор $\pi_N: \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_N$ с нормой ≤ 1 . Норма вектора f из какого-либо банахова пространства обозначается ниже через $\|f\|$.

Определение 5.2. Последовательность векторов $\{f_N \in \mathcal{L}_N : N = 1, 2, \dots\}$ аппроксимирует вектор $f \in \mathcal{L}_\infty$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N - \pi_N f\| = 0.$$

В этом случае будем писать $f_N \rightarrow f$.

Определение 5.3. Предположим дополнительно, что в каждом из пространств $\mathcal{L}_N$ ($N = 1, 2, \dots$) и $\mathcal{L}_\infty$ задана сильно непрерывная полугруппа сжимающих операторов, которую мы обозначим соответственно через $T_N(t)$ и $T_\infty(t)$. Скажем, что полугруппы $T_N(t)$ аппроксимируют полугруппу $T_\infty(t)$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq t_0} \|T_N(t)\pi_N f - \pi_N T_\infty(t)f\| = 0 \quad \text{для всех } f \in \mathcal{L}_\infty \text{ и } t_0 > 0.$$

В этом случае пишем $T_N(t) \rightarrow T_\infty(t)$.

Определение 5.4. Пусть, как и выше, $T_N(t)$ и $T_\infty(t)$ — сильно непрерывные сжимающие полугруппы в пространствах $\mathcal{L}_N$ и $\mathcal{L}_\infty$ соответственно, и обозначим через A_N и A_∞ их генераторы. Скажем, что оператор A_∞ аппроксимируется операторами A_N (и будем записывать это как $A_N \rightarrow A_\infty$), если для любого вектора f из некоторой существенной области $\mathcal{F} \subseteq \text{Dom}(A_\infty)$ можно подобрать последовательность векторов $\{f_N \in \text{Dom}(A_N)\}$ так, что $f_N \rightarrow f$ и $A_N f \rightarrow A_\infty f$ в смысле определения 5.2.

Иными словами, это означает, что векторы из графика оператора $A_\infty|_{\mathcal{F}}$ аппроксимируются векторами из графиков операторов A_N . Заметим, что если указанное условие выполнено для какой-то существенной области $\mathcal{F}$, то оно справедливо и для всей области определения $\text{Dom}(A_\infty)$, однако для практического применения удобна именно приведенная выше формулировка.

Теорема 5.5. Пусть $T_N(t)$, $T_\infty(t)$, A_N , A_∞ те же, что и выше. Если $A_N \rightarrow A_\infty$ в смысле определения 5.4, то $T_N(t) \rightarrow T_\infty(t)$ в смысле определения 5.3.

Это часть теоремы 6.1 из книги [8, гл. 1].

5.3. Основная теорема. Вернемся к конкретным феллеровским полугруппам $T_N^{(z, z', w, w')}(t)$ и $T_\infty^{(z, z', w, w')}(t)$, которые были определены в разд. 5.1.

Зададим операторы $\pi_N: C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\mathbb{GT}_N)$. Это делается так:

$$(\pi_N f)(\lambda) = f(\omega(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N,$$

где мы используем вложение $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$ (см. разд. 4.3). Тот факт, что π_N переводит $C_0(\Omega)$ в $C_0(\mathbb{GT}_N)$, следует из свойств вложения $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$, отмеченных в конце разд. 4.3 (свойства 1 и 2). Далее, очевидно, что $\|\pi_N\| \leq 1$. Следовательно, мы можем применять формализм, описанный в разд. 5.2.

Теорема 5.6. Пусть $T_N^{(z, z', w, w')}(t)$ и $T_\infty^{(z, z', w, w')}(t)$ — феллеровские полугруппы, определенные в разд. 5.1. Параметры (z, z', w, w') предполагаются фиксированными, а $N \rightarrow \infty$. Тогда имеет место сходимость полугрупп $T_N^{(z, z', w, w')}(t) \rightarrow T_\infty^{(z, z', w, w')}(t)$, понимаемая в смысле определения 5.3.

Доказательство. Общая идея доказательства та же, что в предложении 5.5 из работы [6], где рассматривалась модель бесконечномерных марковских процессов, связанная с бесконечной симметрической группой. Мы опираемся на теоремы 3.1, 4.1 и 5.5, а также утверждения, приведенные в разд. 5.1.

1. Зафиксируем произвольное натуральное число K и функцию $g \in C_c(\mathbb{GT}_K)$ (напомним, что символ $C_c(\cdot)$ обозначает пространство финитных функций). Далее, положим $f := \Lambda_K^\infty g$ и $f_N := \Lambda_K^N g$ для всех $N > K$.

Поскольку g лежит в $C_0(\mathbb{GT}_K)$, мы видим, что $f \in C_0(\Omega)$ и $f_N \in C_0(\mathbb{GT}_N)$. Докажем, что $f_N \rightarrow f$ в смысле определения 5.2. Для этого надо проверить,

что при $N \rightarrow \infty$

$$\|\pi_N f - f_N\| \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Ввиду финитности функции g достаточно доказать это в случае, когда g является дельта-функцией в какой-то точке $\varkappa \in \mathbb{GT}_K$. Но тогда $f(\omega) = \Lambda_K^\infty(\omega, \varkappa)$ для $\omega \in \Omega$ и $f_N(\lambda) = \Lambda_K^N(\lambda, \varkappa)$ для $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Далее, из определения оператора π_N следует, что

$$(\pi_N f)(\lambda) = f(\omega(\lambda)) = \Lambda_K^\infty(\omega(\lambda), \varkappa), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N,$$

а значит,

$$\|\pi_N f - f_N\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |\Lambda_K^\infty(\omega(\lambda), \varkappa) - \Lambda_K^N(\lambda, \varkappa)|.$$

А тогда (5.2) есть в точности утверждение теоремы 4.1.

2. Пусть f и f_N те же, что и выше. Покажем, что тогда $A_N^{(z, z', w, w')} f_N \rightarrow A_\infty^{(z, z', w, w')} f$, т. е.

$$\|\pi_N A_\infty^{(z, z', w, w')} f - A_N^{(z, z', w, w')} f_N\| \rightarrow 0. \quad (5.3)$$

Прежде всего надо убедиться в том, что это высказывание имеет смысл, иными словами, $f \in \text{Dom}(A_\infty^{(z, z', w, w')})$ и $f_N \in \text{Dom}(A_N^{(z, z', w, w')})$. Для этого мы замечаем, что $g \in \text{Dom}(A_K^{(z, z', w, w')})$ в силу теоремы 3.1, а затем применяем утверждения 5 и 6 из разд. 5.1.

Далее мы замечаем, что пространство $C_c(\mathbb{GT}_K)$ инвариантно относительно оператора $A_K^{(z, z', w, w')}$: это опять-таки следует из той же теоремы и определения разностного оператора Q . Но тогда, применяя коммутационные соотношения для генераторов (см. те же самые утверждения 5 и 6), мы видим, что (5.3) получается из (5.2) заменой функции g на функцию $A_K^{(z, z', w, w')} g$.

3. Объединяя доказанное выше со следствием 5.1, мы видим, что $A_N^{(z, z', w, w')} \rightarrow A_\infty^{(z, z', w, w')}$ в смысле определения 5.4. Теперь применение теоремы 5.5 завершает доказательство. $\square$

§ 6. Следствия и замечания

6.1. Сходимость марковских процессов. Как было отмечено в §2, из свойства феллеровости полугрупп $T_\infty^{(z, z', w, w')}(t)$ и $T_N^{(z, z', w, w')}(t)$ следует, что они порождают марковские процессы; обозначим эти процессы соответственно через $X_\infty^{(z, z', w, w')}(t)$ и $X_N^{(z, z', w, w')}(t)$, $N = 1, 2, \dots$. Предполагая заданными начальные распределения этих процессов в момент $t = 0$, мы будем обозначать через $M_\infty(t_1, \dots, t_k)$ и $M_N(t_1, \dots, t_k)$ их конечномерные распределения, отвечающие произвольным заданным моментам $0 < t_1 < \dots < t_k$, $k = 1, 2, \dots$. Каждое из этих распределений является вероятностной мерой на прямом произведении k копий пространства Ω или $\mathbb{GT}_N$ соответственно. Далее, используя вложения $\mathbb{GT}_N \rightarrow \Omega$, мы переносим меры с $\mathbb{GT}_N$ в Ω . Это позволяет говорить о сходимости вероятностных мер в следующем утверждении.

Следствие 6.1. Если начальные распределения процессов $X_N^{(z,z',w,w')}(t)$ выбраны так, что при $N \rightarrow \infty$ они слабо сходятся к начальному распределению процесса $X_\infty^{(z,z',w,w')}(t)$, то имеет место слабая сходимост

$$M_N(t_1, \dots, t_k) \rightarrow M_\infty(t_1, \dots, t_k)$$

всех конечномерных распределений.

Доказательство. Это выводится из теоремы 5.6: рассуждение точно такое же, как в [6, следствие 3.6]. $\square$

В действительности сходимость феллеровских полугрупп влечет за собой сходимость соответствующих марковских процессов и в более сильном смысле (сходимость траекторий), см. [8, гл. 4, теорема 2.11].

6.2. Инвариантная мера и обратимость. Как показано в [4], рассматриваемые процессы обладают стационарными распределениями, которые мы обозначим через $M_\infty^{(z,z',w,w')}$ и $M_N^{(z,z',w,w')}$. Более того, согласно [11], имеет место слабая сходимость $M_N^{(z,z',w,w')} \rightarrow M_\infty^{(z,z',w,w')}$. Возьмем эти меры в качестве начальных распределений. Тогда соответствующие конечномерные распределения будут стационарны, т. е. инвариантны относительно сдвига временных параметров $t_1, \dots, t_k$ на одну и ту же константу.

Следствие 6.2. В стационарном режиме процесс $X_\infty^{(z,z',w,w')}(t)$ является обратимым.

Свойство обратимости означает, что стационарные распределения инвариантны относительно обращения $t \rightarrow -t$ временного параметра.

Доказательство следствия 6.2. В силу предыдущего следствия достаточно установить обратимость допредельных процессов — марковских цепей $X_N^{(z,z',w,w')}(t)$. А для них это тестируется на уровне Q -матрицы: надо проверить выполнение условия симметрии

$$M_N^{(z,z',w,w')}(\lambda)Q(\lambda, \nu) = M_N^{(z,z',w,w')}(\nu)Q(\nu, \lambda), \quad \lambda, \nu \in \mathbb{GT}_N$$

(напомним, что матрица Q , которая тоже зависит от основных параметров и от N , определена в §3). Наконец, последнее соотношение легко усматривается из определения матрицы Q и явного вида стационарных распределений $M_N^{(z,z',w,w')}$ (см. [11] и [4]). $\square$

6.3. Явный вид генератора $A_\infty^{(z,z',w,w')}$. Мы располагаем полным описанием генераторов $A_N^{(z,z',w,w')}$ допредельных процессов — марковских цепей $X_N^{(z,z',w,w')}(t)$: оно дается теоремой 3.1. Для предельного процесса $X_\infty^{(z,z',w,w')}(t)$ ситуация иная: наша конструкция не дает явного описания генератора $A_\infty^{(z,z',w,w')}$. Вопрос о вычислении генератора $A^{(z,z',w,w')}$ не тривиален. В родственных моделях, связанных с бесконечной симметрической группой, генераторы бесконечномерных марковских процессов можно описать как некоторые дифференциальные операторы второго порядка, реализуемые в алгебре симметрических функций Sym , см. [3] и [6]. Похожее, но более сложное описание было получено в работе [14] и для генератора $A_\infty^{(z,z',w,w')}$: оказывается, что его действие на функции из пространства $\mathcal{F}_\infty$ (см. (5.1)) задается некоторым бесконечномерным дифференциальным оператором второго порядка; этот оператор

явно вычислен, и он реализуется в некоторой новой алгебре, которая связана с унитарными группами подобно тому, как алгебра Sym связана с симметрическими группами. Благодаря следствию 5.1 этот результат работы [14] приобретает более завершённый вид, поскольку мы знаем теперь, что генератор $A_\infty^{(z,z',w,w')}$ полностью определяется своим сужением на подпространство $\mathcal{F}_\infty$.

6.4. Диффузионное свойство? Абстрактное определение диффузии состоит в том, что это строго марковский процесс с непрерывными траекториями.

Вопрос 6.3. Верно ли, что предельные процессы $X_\infty^{(z,z',w,w')}(t)$ на пространстве Ω являются диффузиями?

Наличие свойства строгой марковости обеспечивается самой конструкцией, так что вопрос заключается в непрерывности траекторий.

Следующие аргументы говорят в пользу того, что ответ положительный. Во-первых, это тот факт, что генератор задается дифференциальным оператором (хотя и не совсем в прямом смысле). Во-вторых, непрерывность траекторий была доказана в [3] для процессов на дуальном объекте к бесконечной симметрической группе. Более того, можно показать, что это же верно и в родственной модели, рассматривавшейся в [6].

6.5. Аналогия с моделью Дайсона. Дайсон [7] показал, что броуновское движение на компактной унитарной группе $U(N)$ порождает некоторый марковский процесс на спектрах унитарных матриц, иначе говоря, на пространстве N -частичных конфигураций на единичной окружности. Статья Шпона [18] привлекла внимание к задаче обоснования предельного перехода $N \rightarrow \infty$ в модели Дайсона. Эта задача оказалась трудной, но в последнее время в ней произошёл прорыв благодаря результатам Катори, Танемумы, Осады, Цаи; вот ссылки на некоторые последние работы: [9], [15], [16], [19].

Методы этих авторов резко отличаются от нашего с Бородиным подхода, и наши допредельные марковские цепи $X_N^{(z,z',w,w')}(t)$ не имеют прямой связи с дайсоновскими N -мерными диффузиями. В то же время между ними ощущается некоторое родство — это обсуждается в моем обзоре [12].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. J. Anderson, *Continuous-time Markov chains: An applications-oriented approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes*, Ann. of Math., **161**:3 (2005), 1319–1422; <http://arxiv.org/abs/math/0109194>.
- [3] A. Borodin, G. Olshanski, *Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions*, Probab. Theory Related Fields, **144**:1–2 (2009), 281–318; <http://arxiv.org/abs/0706.1034>.
- [4] A. Borodin, G. Olshanski, *Markov processes on the path space of the Gelfand–Tsetlin graph and on its boundary*, J. Funct. Anal., **263**:1 (2012), 248–303; <http://arxiv.org/abs/1009.2029>.
- [5] A. Borodin, G. Olshanski, *The boundary of the Gelfand–Tsetlin graph: A new approach*, Adv. Math., **230**:4–6 (2012), 1738–1779; <http://arxiv.org/abs/1109.1412>.
- [6] A. Borodin, G. Olshanski, *Markov dynamics on the Thoma cone: a model of time-dependent determinantal processes with infinitely many particles*, Electron. J. Probab., **18** (2013), paper 75, 1–43; <http://arxiv.org/abs/1303.2794>.

- [7] F. J. Dyson, *A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix*, J. Math. Phys., **3** (1962), 1191–1198.
- [8] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*, Wiley, New York, 2005.
- [9] M. Katori, H. Tanemura, *Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels*, Markov Process. Related. Fields, **17**:4 (2011), 541–580; <http://arxiv.org/abs/1106.4360>.
- [10] T. M. Liggett, *Continuous time Markov processes*, Graduate Texts in Math., vol. 113, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [11] G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group*, J. Funct. Anal., **205**:2 (2003), 464–524; <http://arxiv.org/abs/math/0109193>.
- [12] G. Olshanski, *Markov dynamics on the dual object to the infinite-dimensional group* (записки миникурса в летней школе «Вероятность и статистическая физика», Санкт-Петербург, июнь 2012), в кн.: Proc. Symposia in Pure Math. (в печати); <http://arxiv.org/abs/1310.6155>.
- [13] G. Olshanski, *The Gelfand–Tsetlin graph and Markov processes (extended version of talk at ICM-2014, Seoul)*, in: Proc. Intern. Congress of Math., vol. IV, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, 431–454; <http://arxiv.org/abs/1404.3646>.
- [14] G. Olshanski, *The representation ring of the unitary groups and Markov processes of algebraic origin*, Adv. Math., special issue dedicated to the memory of Andrei Zelevinsky (to appear); <http://arxiv.org/abs/1504.01646>.
- [15] H. Osada, *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Ann. Probab., **41**:1 (2013), 1–49; <http://arxiv.org/abs/0902.3561>.
- [16] H. Osada, H. Tanemura, *Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels*, <http://arxiv.org/abs/1412.8678>.
- [17] L. Petrov, *The Boundary of the Gelfand–Tsetlin graph: New proof of Borodin–Olshanski’s formula, and its q -analogue*, Moscow Math. J., **14**:1 (2014), 121–160; <http://arxiv.org/abs/1208.3443>.
- [18] H. Spohn, *Interacting Brownian particles: a study of Dyson’s model*, in: Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, IMA Vol. Math. Appl., vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 151–179.
- [19] Li-Cheng Tsai, *Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson’s model*, <http://arxiv.org/abs/1405.6692>.

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: olsh2007@gmail.com

Поступила в редакцию
1 июня 2015 г.